应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

半可微半紧1-集压缩映象的正不动点的存在性*

宋 建 伟

（江西师范大学数学系，1991年4月15日收到）

摘 要

本文得到一些半可微半紧1-集压缩映象的不动点定理．这些结果是[1, 2, 4, 5, 7]中某些已知结果的推广．

关键词 半可微 半紧1-集压缩 正不动点

在本文中，我们将利用文[8]中所定义的不动点指数，得出序Banach空间中半可微半紧1-集压缩映象的一些不动点定理．这些定理推广了在0或∞处Frechet可微的全连续或严格集压缩映象的不动点定理，并且以半可微k-集压缩映象的不动点定理为特例($0<k<1$)(见[1,2,4,5,7])．设E是一个实Banach空间，P是E中的一个锥，$P_r=\{x\in P;\ \|x\|\leqslant r\}$，$\alpha(Q)$表$E$中有界集$Q$的非紧性测度，有关$\alpha(Q)$的性质可参见[3]．映象$T$：$P\to E$称为是正齐次的，如果$T(tx)=tT(x)$对所有的$t\geqslant 0$及$x\in P$成立；$T$称为是增的，如果当$x\leqslant y$时，有$T(x)\leqslant T(y)$成立．以下我们用$E(P,E)$表示$P$上所用连续有界、正齐次增映象的全体．显然，如果$T$：$E\to E$是一个有界线性映象，且是正的（即$T(P)\subset P$），则$T\in E(P,E)$，反之不成立．映象$T$：$D\subset E\to E$称为是半紧的，如果对$D$中的任意有界序列$\{x_n\}$，当$x_n-T(x_n)\to y\in E$时，则$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$．张庆雍在[8]中定义了半紧1-集压缩映象的不动点指数，得到了下列结果：

引理1 设P是实Banach空间E中的一个锥，T：$P_r\to P$是一个半紧1-集压缩映象．如果存在r_1，r_2：$0<r_1,r_2<r$，$r_1\neq r_2$使得

（i） 对所有的$x\in\partial P_{r_1}$及$\lambda>1$，有$T(x)\neq\lambda x$；

（ii） 存在$x_0\in P,x_0\neq 0$，使得$x-T(x)\neq\lambda x_0$对所有$\lambda\geqslant 0$及$x\in\partial P_{r_2}$成立．

则T有不动点$x^*\in P$且满足$\min\{r_1,r_2\}<\|x^*\|<\max\{r_1,r_2\}$．

下面给出半可微的定义，它是Frechet微分概念的推广．

定义[7] (i)映象T：$P\to E$称为在∞关于P是半可微的，如果存在映象$T_\infty\in E(P,E)$使得对所有的$h\in P$，有

$$T(h)=T_\infty(h)+w_\infty(h),\ 且w_\infty(h)=o(\|h\|)\ (当\|h\|\to\infty) \tag{1}$$

* 张石生推荐．

我们称T_∞为T在∞处关于P的半导数；

(ii) 映象$T:P\to E$称为在x处关于P是半可微的，如果存在映象$T_x\in E(P,E)$使得对所有的$h\in P$有

$$T(x+h)=T(x)+T_x(h)+w(x,h)$$

且$w(x,h)=o(\|h\|)$ （当$\|h\|\to 0$）

我们称T_x为T在x处关于P的半导数．

Petryshyn在[7]中，利用k-集压缩映象的不动点指数，得到了几个关于半可微k-集压缩映象的不动点定理．为得到我们的结果，先给出下列引理．

引理2 设$T:P\to P$在∞处关于P有一个半导数T_∞．如果T是半紧1-集压缩映象，则T_∞也是映P到P的半紧1-集压缩映象．

证明 由[7]中引理1知T_∞是映P到P的1-集压缩映象．因此仅需证明T_∞是半紧的．为此，设$\{x_n\}\subset P$是任意一个有界序列，满足$x_n-T_\infty(x_n)\to y\in P$．故有$\alpha(\{x_n-T_\infty(x_n)\})=0$．令$a=\inf\limits_n\{\|x_n\|\}$，$b=\sup\limits_n\{\|x_n\|\}$，则$b<+\infty$．由(1)知$\dfrac{\|w_\infty(x)\|}{\|x\|}\to 0$（当$\|x\|\to\infty$时）．设$\varepsilon>0$，则可选取$r=r(\varepsilon)>0$使得当$x\in P$且$\|x\|\geqslant r$时，有$\|w_\infty(x)\|\leqslant b^{-1}\varepsilon\|x\|$．若$a>0$，设$\lambda\geqslant ra^{-1}$，$x\in\{x_n\}$，则$\|\lambda x\|\geqslant r$，因此$\|w_\infty(\lambda x)\|\leqslant b^{-1}\varepsilon\|\lambda x\|\leqslant\lambda\varepsilon$．因为$\alpha(\{w_\infty(\lambda x_n)\})\leqslant\operatorname{diam}(\{w_\infty(\lambda x_n)\})\leqslant 2\lambda\varepsilon$，故

$$\begin{aligned}\lambda\alpha\left(\left\{x_n-\frac{T(\lambda x_n)}{\lambda}\right\}\right)&=\alpha(\{\lambda x_n-T(\lambda x_n)\})\\&\leqslant\alpha(\{\lambda x_n-T_\infty(\lambda x_n)\})+\alpha(\{w_\infty(\lambda x_n)\})<4\lambda\varepsilon.\end{aligned}$$

即有$\alpha\left(\left\{x_n-\dfrac{T(\lambda x_n)}{\lambda}\right\}\right)<4\varepsilon$，由$\varepsilon>0$的任意性知$\alpha(\{\lambda x_n-T(\lambda x_n)\})=0$．若$a=0$，不失一般性，设$x_n\to 0$(当$n\to\infty$时)．由于$T$是1-集压缩映象，从而$\alpha(\{T(\lambda x_n)\})\leqslant\alpha(\{\lambda x_n\})=0$对$\lambda>0$成立．由此可知$\alpha(\{\lambda x_n-T(\lambda x_n)\})=0$．因此，无论$a>0$或$a=0$，总有$\alpha(\{\lambda x_n-T(\lambda x_n)\})=0$，这说明，存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$使得$\lambda x_{n_k}-T(\lambda x_{n_k})\to y\in E$．由于$T$是半紧，因此存在$\{\lambda x_{n_k}\}$的收敛子列$\{\lambda x_{n_{k_j}}\}$．从而$\{x_{n_k}\}$有收敛子列$\{x_{n_{k_j}}\}$．即，$T_\infty$是半紧映象．证毕．

引理3 设$T:P\to P$在0处关于P有一个半导数T_0，并且$T(0)=0$．如果T是半紧1-集压缩映象，则T_0也是映P到P的半紧1-集压缩映象．

证明 由[7]引理4知T_0是映P到P的1-集压缩映象．因此仅需证明T_0是半紧的，为此，设$\{x_n\}\subset P$是任意一个有界序列，使得$x_n-T_0(x_n)\to y$(当$n\to\infty$时)．由T_0的定义知，对每个$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$使得$T(h)=T_0(h)+w(0,h)$，且$\|w(0,h)\|\leqslant\varepsilon\|h\|$对一切满足$\|h\|\leqslant\delta$的$h\in P$成立．设$\lambda=\delta/r$，其中$\sup\limits_n\{\|x_n\|\}<r<+\infty$．则有$\{\lambda x_n\}\subset P_\delta$且$\alpha(\{w(0,\lambda x_n)\})\leqslant\operatorname{diam}\{w(0,\lambda x_n)\}\leqslant\operatorname{diam}\{w(0,h);\ h\in P_\delta\}\leqslant 2\varepsilon\delta=2\varepsilon r\lambda$．因此有

$$\begin{aligned}\lambda\alpha\left(\left\{x_n-\frac{T(\lambda x_n)}{\lambda}\right\}\right)&=\alpha(\{\lambda x_n-T(\lambda x_n)\})\\&\leqslant\alpha(\{\lambda x_n-T_0(\lambda x_n)\})+\alpha(\{w(0,\lambda x_n)\})\\&\leqslant\lambda(\{x_n-T_0(x_n)\})+2\varepsilon r\lambda=2\varepsilon r\lambda.\end{aligned}$$

即有$\alpha\left(\left\{x_n-\dfrac{T(\lambda x_n)}{\lambda}\right\}\right)\leqslant 2\varepsilon r$．由$\varepsilon>0$的任意性可知$\alpha\left(\left\{x_n-\dfrac{T(\lambda x_n)}{\lambda}\right\}\right)=0$．因此存在$\{x_n\}$的子列$\{x_{n_k}\}$使得$x_{n_k}-\dfrac{T(\lambda x_{n_k})}{\lambda}\to y\in E$(当$k\to\infty$时)，即$\lambda x_{n_k}-T(\lambda x_{n_k})\to\lambda y$（当$k\to\infty$时）．

由于T是半紧的，则存在$\{\lambda x_{n_k}\}$的收敛子序列$\{\lambda x_{n_{kj}}\}$。亦即$\{x_n\}$有收敛子序列$\{x_{n_{kj}}\}$。因此，T_0是半紧的。证毕。

在给出本文的结果以前，按照[2]，我们称映象A属于类$E_+^1(P)$（相应地$E_1^-(P)$），如果$A\in E(P,E)$并且存在$\lambda_0>1$，$h_0\in{}^0P$使得$A(h_0)=\lambda_0 h_0$及$A(h)\neq h$对一切$h\in{}^0P$成立（相应地，$A\in E(P,E)$并且$A(h)\neq\lambda h$对一切$\lambda\geqslant 1$及$h\in{}^0P$成立）。

定理1 设$T:P\to P$是一个半紧1-集压缩映象并且在∞处关于P有半导数T_∞。如果$T_\infty\in E_+^1(P)$并且存在$\delta>0$使得对$x\in\partial P_\delta$，$\lambda>1$有$T(x)\neq\lambda x$，则T在${}^0P$中有正不动点。

证明 为给出定理的证明，注意下列结论（见[5]）：如果u，$v\in P$，$u\neq 0$，$\{\lambda_n\}\subset(0,+\infty)$是一个数列满足$\lambda_n\to\infty$（当$n\to\infty$时），则存在$n_0\in N^+$，使得$v-\lambda_{n_0}u\notin P$。

由于$T_\infty\in E_+^1(P)$，则存在$\lambda_0>1$，$h_0\in{}^0P$使得$T_\infty(h_0)=\lambda_0 h_0$并且对一切$h\in{}^0P$，有$T_\infty(h)\neq h$。下面证明：存在$r_\infty>0$使得对某个固定的$r>r_\infty$，当$x\in\partial P_r,\beta\geqslant 0$时，$x\neq T(x)+\beta h_0$。

事实上，若不然，则存在数列$\{r_n\}\subset(0,+\infty)$，$\{x_n\}\subset{}^0P$及$\{\beta_n\}\subset[0,+\infty)$使得$r_n\to\infty$ $(n\to\infty)$，$\|x_n\|=r_n$且$x_n=T(x_n)+\beta_n h_0$。由(1)知$x_n=T_\infty(x_n)+w_\infty(x_n)+\beta_n h_0$。因为$T_\infty$是正齐次的，而$\|x_n\|=r_n$，故

$$(I-T_\infty)\left(\frac{x_n}{r_n}\right)=\frac{w_\infty(x_n)}{\|x_n\|}+(\beta_n/r_n)h_0 \tag{2}$$

因为$\left\|\frac{x_n}{r_n}\right\|=1$且$\frac{\|w_\infty(x_n)\|}{\|x_n\|}\to 0(\|x_n\|=r_n\to\infty)$，由(2)，利用$\left\{(I-T_\infty)\left(\frac{x_n}{r_n}\right)\right\}$的有界性可知$\{\beta_r/r_n\}$是有界的。故可设$\beta_n/r_n\to\eta\geqslant 0(n\to\infty)$（不然的话，可取子列）。由(2)得

$$(I-T_\infty)\left(\frac{x_n}{r_n}\right)\to\eta h_0(n\to\infty).$$

因为T是半紧的，由引理2知T_∞也是半紧的，故存在$\left\{\frac{x_n}{r_n}\right\}$的子列$\left\{\frac{x_{n_k}}{r_{n_k}}\right\}$使得$\frac{x_{n_k}}{r_{n_k}}\to z\in P$，且$\|z\|=1$。从而$z-T_\infty(z)=\eta h_0$（因$T_\infty$连续）。因$T_\infty\in E_+^1(P)$，易知$\eta>0$且$z-\eta h_0=T_\infty(z)\in P$，即$z-\eta h_0\geqslant 0$。由于$T_\infty$是增的和正齐次的，故$T_\infty(z)\geqslant T_\infty(\eta h_0)=\eta T_\infty(h_0)=\eta\lambda_0 h_0$亦即$\eta\lambda_0 h_0\leqslant T_\infty(z)=z-\eta h_0$或$\eta(1+\lambda_0)h_0\leqslant z$。从而$T_\infty[\eta(1+\lambda_0)h_0]\leqslant T_\infty(z)\in P$，即$\eta(1+\lambda_0)\lambda_0 h_0\leqslant z-\eta h_0$或$\eta(1+\lambda_0+\lambda_0^2)\leqslant z$。由此继续可得

$$z-\eta(1+\lambda_0^2+\cdots+\lambda_0^n)h_0\in P\qquad\forall n\in N^+.$$

因为$\lambda_0>1$，$h\in{}^0P$，这与前述结论矛盾。

取$r>\max\{\delta,r_\infty\}$，由引理1知，存在$x^*\in P$使得$T(x^*)=x^*$且$\delta<\|x^*\|<r$。即$T$在${}^0P$中有正不动点。证毕。

仿定理1之证明，可证下面定理。

定理2 设T：$P\to P$是一个半紧1-集压缩映象，$T(0)=0$，并且在0处关于P为一个半导数T_0。如果$T_0\in E_+^1(P)$且存在$r>0$使得$T(x)\neq\lambda x$对一切$x\in\partial P_r$及$\lambda>1$成立，则T在${}^0P$中存在正不动点。

为得其它定理，我们引进下列概念：

定义1 映象T：$D\subset P\to P$称为强半紧映象（简记s-半紧映象），如果对每个D中有界序列$\{x_n\}$，当$\lambda x_n-T(x_n)$对一切$\lambda\geqslant 1$收敛时，恒有$\{x_n\}$的收敛子列$\{x_{n_k}\}$。

注1 由定义易证，任何k-集压缩映象$(0<k<1)$及任何凝聚映象都是s-半紧映象；每个s-半紧映象一

定是半紧映象。

注2 考察引理2及引理3之证明易知，在引理2和引理3中，若T分别是s-半紧的，则T_∞与T_0也分别是s-半紧的。

定理3 设T：$P\to P$是s-半紧1-集压缩映象，并且在∞处关于P有半导数T_∞。如果$T_\infty\in E_1^-(P)$且存在$\delta>0$，$x_0\in{}^0P$使得$x-T(x)\neq\beta x_0$对一切$x\in\partial P_\delta$及$\beta\geqslant 0$成立，则T在${}^0P$中有正不动点。

证明 只要证明，存在$r_\infty>0$，使得对每个固定的$r\geqslant r_\infty$，有

$$T(x)\neq\lambda x,\ (\forall x\in\partial P_r\text{及}\lambda\geqslant 1) \tag{3}$$

事实上，若(3)成立，考察定理条件及引理1，即可得所需结论。下面证明(3)成立。

假若(3)式不成立，则存在$\{r_n\}\subset(0,+\infty)$，$x_n\in\partial P_{r_n}$及$\lambda_n\geqslant 1$，使得$r_n\to\infty(n\to\infty)$且$T(x_n)=\lambda_n x_n$，故有

$$\left\|\frac{w_\infty(x_n)}{r_n}\right\|=1/r_n\|T(x_n)-T_\infty(x_n)\|=1/r_n\|\lambda_n x_n-T_\infty(x_n)\|$$

$$=\left\|\frac{\lambda_n x_n}{r_n}-T_\infty\left(\frac{x_n}{r_n}\right)\right\|,$$

因为$\left\|\frac{w_\infty(x_n)}{r_n}\right\|\to 0(\|x_n\|=r_n\to\infty)$且$\left\{T_\infty\left(\frac{x_n}{r_n}\right)\right\}$是有界的，因此$\{\lambda_n\}$有界。不失一般性，设$\lambda_n\to\lambda_0\geqslant 1(n\to\infty)$。故有

$$\left\|\frac{\lambda_0 n_n}{r_n}-T_\infty\left(\frac{x_n}{r_n}\right)\right\|=1/r_n\|\lambda_0 x_n-T_\infty(x_n)\|=1/r_n\|\lambda_0 x_n-T(x_n)-w_\infty(x_n)\|$$

$$\leqslant|\lambda_0-\lambda_n|\left\|\frac{x_n}{r_n}\right\|+1/r_n\|w_\infty(x_n)\|\to 0\qquad(n\to\infty)$$

因为T是s-半紧的，由注2知T_∞也是s-半紧的。因此，存在$\left\{\frac{x_n}{r_n}\right\}$的子列$\left\{\frac{x_{n_k}}{r_{n_k}}\right\}$使得$\frac{x_{n_k}}{r_{n_k}}\to z\in\partial P_1$。由$T$的连续性知，$\lambda_0 z-T_\infty(z)=0$，亦即$\lambda_0 z=T_\infty(z)$。这与$T_\infty\in E_1^-(P)$矛盾。证毕。

仿定理3之证明，可证下面定理：

定理4 设T：$P\to P$是一个s-半紧1-集压缩映象，$T(0)=0$，并且在0处关于P有一个半导数T_0。如果$T_0\in E_1^-(P)$并且存在$r>0$，$x_0\in{}^0P$使得对一切$x\in\partial P_r$及$\beta\geqslant 0$有$x-T(x)\neq\beta x_0$成立，则T在${}^0P$中有正不动点。

由定理1～4及[8]推论2.4，可得下面推论。

推论1 设T：$P\to P$是一半紧（或s-半紧）1-集压缩映象，并且在∞处关于P有半导数T_∞。如果存在$\delta>0$，使得对一切$x\in\partial P_\delta$有$x-T(x)\in P$及$T_\infty\in E_+^1(P)$（或对一切$x\in\partial P_\delta$有$T(x)-x\in P$及$T_\infty\in E_1^-(P)$），则T在${}^0P$中存在正不动点。

推论2 设T：$P\to P$是一个半紧（或s-半紧）1-集压缩映象，$T(0)=0$，并且在0处关于P有半导数T_0。如果存在$r>0$，使得对一切$x\in\partial P_r$有$x-T(x)\in P$及$T_0\in E_+^1(P)$(或对一切$x\in\partial P_r$有$T(x)-x\in P$及$T_0\in E_1^-(P)$)，则T在${}^0P$中存在正不动点。

考察以上各定理之证明，由引理1可得下面定理：

定理5 设T：$P\to P$是一个s-半紧1-集压缩映象，$T(0)=0$，如果T在0处和∞处关于P均有半导数T_0和T_∞，则当下列条件之一成立时，T在${}^0P$中存在正不动点：

（Ⅰ） $T_0\in E_1^-(P)$且$T_\infty\in E_+^1(P)$；

（Ⅱ） $T_0\in E_+^1(P)$且$T_\infty\in E_1^-(P)$.

注3 由引理1易知，定理1～5推广了Petryshyn[7]中定理1～3，进而推广了Amann[1]中定理13.2，13.6及[2]中定理2，Krasnoselskii[5]中定理11，16及Edmunds等[4]中定理6.

参 考 文 献

[1] Amann, H., Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problem in ordered Banach spaces, *SIAM Rev.*, 18 (1976), 620—709.

[2] Amann, H., Fixed points of asymptotically linear maps in ordered Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, 14 (1973), 162—171.

[3] Deimling, K., *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1985).

[4] Edmunds, D. E., A. J. Potter and C. A. Stuart, Noncompact positive operators, *Proc. R. Soc. London*, Ser. A, 328 (1972), 67—81.

[5] Krasnoselskii, M. A., *Positive Solutions of Operator Equations*, Noordhoff, Groningen (1964).

[6] Nussbaum, R. N., The fixed point index for local condensing maps, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 89 (1971), 217—258.

[7] Petryshyn, W. V., Fixed point theorems for semidifferentiable k-set-contractions in ordered Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 133 (1988), 297—305.

[8] 张庆雍，半紧1-集压缩映象的不动点指数和不动点定理，数学学报，5 (1984), 91—98.

Existence of Positive Fixed Points for Semidifferentiable Semicompact 1-Set-Contractions

Song Jian-wei

(*Department of Mathematics, Jiangxi Normal University, Nanchang*)

Abstract

This paper obtains some fixed point theorems of semidifferentiable semicompact 1-set-contraction maps, whcih extend some known results in [1,2,4,5,7].

Ked words semidifferentiable, semicompact 1-set-contraction, positive fixedpoint