

# 一种改进边界元法在弹性 扭转问题中的应用\*

杜 生 广

(西北工业大学, 1991年4月30日收到)

## 摘 要

本文用一种改进边界元法分析与计算了椭圆截面等直杆的扭转问题, 并与边界元法的解进行比较, 其结果极为符合. 然而, 改进边界元法较边界元法所需要的数据量少得多, 计算时间也将大大减少了. 因此, 本文方法对求解Poisson方程问题是一种经济而行之有效的数值计算方法.

**关键词** 弹性扭转 泊松方程 边界元法 改进边界元法

## 一、引 言

图 1 所示为任意截面形状等直杆的弹性扭转问题, 这就是众所周知的Saint-Venant扭转问题. 利用Prandtl应力函数 $\varphi$ , 则扭转问题成为如下的Poisson方程问题<sup>[1]</sup>, 即

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = -2GK = b & (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \\ \varphi = 0 & (\text{在 } \Gamma \text{ 上}) \end{cases} \quad (1.1)$$

式中  $G$  是剪切模量,  $K$  表示杆的单位长度扭转角.

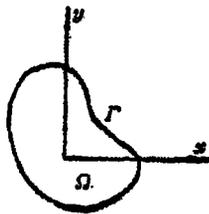


图1 边界 $\Gamma$ 与区域 $\Omega$

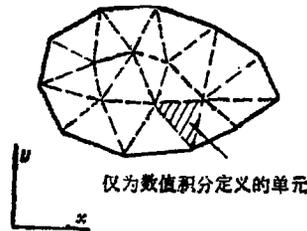


图2 边界单元及内部单元

通常用边界元法求解Poisson方程(1.1), 其边界积分方程<sup>[2]~[6]</sup>为

$$c_i \varphi_i - \int_{\Gamma} \varphi q^* d\Gamma = - \int_{\Gamma} q \varphi^* d\Gamma + \int_{\Omega} b \varphi^* d\Omega \quad (1.2)$$

• 张汝清推荐.

式中  $q = \partial\varphi/\partial n$ ,  $q^* = \partial\varphi^*/\partial n$ ,  $\varphi^*$  是满足下列方程

$$\nabla^2\varphi^* = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$$

的基本解,  $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$  为 Dirac 函数. 对于二维问题, 基本解  $\varphi^*$  取如下形式

$$\varphi^* = \frac{1}{2\pi} \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$$

将  $\varphi^*$  及其法向导数  $\partial\varphi^*/\partial n$  代入式 (1.2) 得

$$c_i\varphi_i - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} d\Gamma = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} q \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| d\Gamma + \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} b(\mathbf{r}) \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| d\Omega \quad (1.3)$$

其中  $c_i$  是由点  $i$  所在边界的几何特性确定的常数,  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)n = (x - x_i)n_x + (y - y_i)n_y$ ,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ . 式 (1.3) 为用边界元法求解 Poisson 方程问题的基本方程.

为了求含有  $b$  项的区域积分, 即式 (1.2) 或 (1.3) 右边第二项

$$\int_{\Omega} b\varphi^* d\Omega \quad \text{或} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} b(\mathbf{r}) \ln|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| d\Omega$$

我们必须将区域  $\Omega$  离散成一系列与有限元法中采用形状相似的“网格”或“内部单元”(见图2), 但这里却又不需要任何内部未知数, 这与有限元法的概念完全不同. 对每一个单元都可以应用数值积分公式<sup>[4]~[6]</sup>, 得

$$\int_{\Omega} b\varphi^* d\Omega = \sum_{N_e} \left( \sum_{j=1}^k w_j (b\varphi^*)_j \right) A_e$$

式中  $N_e$  为内部单元数,  $k$  为每一个单元上积分点数,  $w_j$  为加权函数,  $A_e$  是单元的面积. 这个区域积分是一个冗长的数值计算过程, 这种区域内的离散化失去了边界元法求解 Laplace 方程问题仅离散边界的主要优点, 因而计算这个问题所需要的数据和计算时间将大大增加.

本文采用 Green 公式把区域积分可以变换成边界积分, 不用建立内部单元, 而仅须离散问题的边界, 这种方法称作改进边界元法.

本文用改进边界元法分析与计算了椭圆截面等直杆的扭转问题, 并与边界元法进行了比较, 其结果极为相符. 然而, 改进边界元法较边界元法所需要的数据少得多, 计算时间则减少了. 因此, 对求解 Poisson 方程问题, 本文方法是一种经济而行之有效的数值计算方法.

## 二、基本公式

在如下情况下, 区域积分

$$\int_{\Omega} b\varphi^* d\Omega \quad (2.1)$$

可以变换成边界积分, 这就是“ $b$ ”本身是一个调和函数, 即满足

$$\nabla^2 b = 0 \quad (2.2)$$

显然, 当“ $b$ ”是一个常数或是一个关于  $x$ ,  $y$  的线性函数时, 式 (2.2) 是满足的.

把式 (2.1) 变换成边界积分的方法是以存在一个函数  $w$  为前提的, 即

$$\nabla^2 w = \varphi^* \quad (2.3)$$

利用二维 Green 第二公式

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma$$

其中  $u, v$  函数在边界及其所包围的区域上必须连续可微。用  $b, w$  分别替换上式中的  $u, v$ ，上式可写成

$$\int_{\Omega} (b \nabla^2 w - w \nabla^2 b) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( b \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial b}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2.4)$$

注意到  $\nabla^2 b = 0$  及  $\nabla^2 w = \varphi^*$ ，式(2.4)可以简化为

$$\int_{\Omega} b \varphi^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left( b \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial b}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (2.5)$$

式(2.5)表明，如果能找到函数  $w$ ，就可以方便地把区域积分变换成边界积分。

对于各向同性的二维问题，在极坐标中，式(2.3)可写成

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{1}{2\pi} \ln r$$

其中  $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ ，对上式进行两次积分，得

$$w = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{r^2}{4} \ln r - \frac{r^2}{8} - \frac{r^2}{8} \right) + c_1 \ln r + c_2$$

在满足式(2.3)条件下，可以给  $c_1, c_2$  以任意常值，如取  $c_1 = c_2 = 0$ ，于是

$$w = \frac{r^2}{8\pi} (\ln r - 1) = \frac{r^2}{8\pi} (\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| - 1)$$

用上式可以计算

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{(x - x_i)}{8\pi} (2 \ln r - 1) n_x + \frac{(y - y_i)}{8\pi} (2 \ln r - 1) n_y$$

或

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{8\pi} (2 \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| - 1) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}$$

将  $w$  及其法向导数  $\partial w / \partial n$  代入式(2.5)得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b \varphi^* d\Omega = \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left[ b(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} (2 \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| - 1) \right. \\ \left. - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2 (\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| - 1) \frac{\partial b}{\partial n} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.6)$$

把上式代入方程(1.3)，将得出改进边界元法的边界积分方程

$$\begin{aligned} c_i \varphi_i - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} d\Gamma = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} q \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| d\Gamma \\ + \frac{1}{8\pi} \int_{\Gamma} \left[ b(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} (2 \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| - 1) \right. \\ \left. - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2 (\ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| - 1) \frac{\partial b}{\partial n} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (2.7)$$

在本文 Poisson 方程中  $b$  为常数，对于光滑边界，于是方程(2.7)可写为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi_i - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \varphi \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} d\Gamma = - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} q \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| d\Gamma \\ + \frac{b}{8\pi} \int_{\Gamma} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} (2 \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| - 1) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.8)$$

把边界划分成  $N$  个常值单元, 对于给定点  $i$ , 方程(2.8)变为离散形式

$$\frac{1}{2} \varphi_i + \sum_{j=1}^N H_{ij} \hat{\varphi}_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j + \sum_{j=1}^N V_{ij}$$

或 
$$\sum_{j=1}^N H_{ij} \varphi_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j + \sum_{j=1}^N V_{ij} \quad (2.9)$$

式中 
$$H_{ij} = \begin{cases} H_{ij} & (\text{当 } i \neq j) \\ H_{ij} + \frac{1}{2} & (\text{当 } i = j) \end{cases}$$

$H_{ij}$ ,  $G_{ij}$  和  $V_{ij}$  利用四点 Gauss 求积公式计算.

$N$  个节点的全部方程组可以用矩阵形式表示为

$$\mathbf{H}\Phi = \mathbf{G}Q + \mathbf{B} \quad (2.10)$$

注意到在边界上的  $N_1$  个  $\varphi$  值和  $N_2$  个  $q$  值为已知, ( $N_1 + N_2 = N$ ), 因而在式(2.10)中有一组  $N$  个未知数, 按照把全部未知数都置于方程左边的方式重新排列, 则可写为

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2.11)$$

式中  $\mathbf{X}$  是未知数  $\varphi$  和  $q$  的向量, 向量  $\mathbf{F}$  包含  $\mathbf{B}$  项.

解出式(2.11), 从而得边界上全部  $\varphi$  值及  $q$  值, 进而计算任意内部点上的  $\varphi$  值.

### 三、算例与结果分析

设有等椭圆截面杆的扭转, 长轴和短轴分别为 10cm 和 5cm, 扭矩为 100N·cm.

由于对称性, 只需要考虑区域的四分之一. 用边界元法分析, 把边界分割成 16 个常值单元(或节点), 区域分割成 20 个内部单元(见图3). 用改进边界元法分析, 在边界上仅离散成 16 个具有相同密度的常值单元(图4). 为了提高精度, 需要把边界单元数增加到 26 个, 再次进行计算.

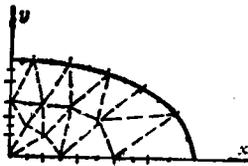


图3 边界元法离散

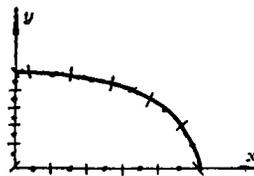


图4 改进边界元法离散

本文方法与边界元法<sup>[3]</sup>得到的结果见表1.

由表1中计算结果分析可见, 改进边界元法的结果与边界元法的值相当符合. 在增多单元数之后, 可以提高计算精度. 在精度相同情况下, 改进边界元法较边界元法的计算时间大大减少了(几乎减少一半).

表 1

改进边界元与边界元结果比较

坐标 (cm)		应 力 函 数 $\varphi$ (N/cm)				
$x$	$y$	解析法	边 界 元 法		改进边界元法	
			16 单元	26 单元	16 单元	26 单元
6.0	2.6458	-0.2356	-0.2192	-0.2305	-0.2160	-0.2252
5.0	1.6582	-0.4074	-0.3903	-0.4027	-0.3924	-0.4022
0.0	3.5	-0.3246	-0.3107	-0.3174	-0.3120	-0.3171
0.0	1.5	-0.5793	-0.5613	-0.5723	-0.5629	-0.5714
3.0	0.0	-0.5586	-0.5621	-0.5543	-0.5636	-0.5623
在IBM-PC 上运行时间			40秒	70秒	17秒	45秒

#### 四、结 束 语

1. 本文方法的计算结果与解析值相当接近,这说明该方法的计算精度比较高的。
2. 本文方法的解与边界元法的值相当符合,但前者具有需要的数据量少,计算时间少等优点。
3. 本文方法应用范围广,可以计算各种截面形状的实心 and 空心等直杆的扭转问题,还可以计算有热源、有旋平面稳定温度场、速度场等工程问题。

总之,对于Poisson方程问题,本文方法是一种经济而行之有效的数值方法。

#### 参 考 文 献

- [1] 徐芝纶,《弹性力学》(上册)(1984).
- [2] Brebbia, C.A., J.C.F. Telles and L.C. Wrobel, *Boundary Element Techniques (Theory and Applications in Engineering)*, Springer-Verlag (1984), 75—79.
- [3] 杜生广,边界元法在弹性扭转问题中的应用,西北工业大学科技资料DZH8718 (1987).
- [4] Brebbia, C.A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London (1978), 86—89.
- [5] Brebbia, C.A. and S. Walker, *Boundary Element Techniques in Engineering* (1980), 45—47.
- [6] 严更、丁方明,《边界单元法基础》(1986), 111—112.

## Application of an Improved Boundary Element Method on the Problem of Elastic Torsion

Du Sheng-guang

(*Northwestern Polytechnical University, Xi'an*)

### Abstract

An improved boundary element method has been used in analyzing and calculating the problems of the torsion of a prismatic bar with elliptical cross section. In this paper the calculated results correspond with the values of boundary element method. However, the quantity of data required by the improved boundary element method is much less than that required by boundary element method, and calculating time will be greatly reduced. Therefore, the procedure of this paper is an economical and efficient numerical computational way for solving Poisson equation problem.

**Key words** elastic torsion, Poisson equation, boundary element method, improved boundary element method