

# 用数学规划的方法优化跳台 滑雪的起跳动作\*

关汝华 李 润 于立然

(吉林大学) (吉林工业大学) (吉林省电子技术研究所)  
(钱伟长推荐, 1991年5月26日收到)

## 摘 要

本文以风洞实验、高速摄影和测力实验得到的有限的、离散的数据为依据, 采用多刚体系统动力学理论和数学规划的方法, 对跳台滑雪(以下简称跳雪)的起跳动作进行分析和优化, 提出了跳雪起跳的最优技术动作. 文中给出算例, 与国内、外有关文献的结果比较, 说明本文的计算与优化是合理的.

**关键词** 数学规划 优化 多刚体系统动力学 跳台滑雪

## 一、前 言

本文是国家自然科学基金资助项目——《跳台滑雪姿态及新式起跳动作技术研究》的主要研究内容.

我国跳雪运动的历史较短, 迄今国内还没有九十米级跳台, 但是该项运动发展很快, 从第七届冬奥会上可以看到这点, 很有可能在不久的冬季奥运会上拿到奖牌, 因此加强科研与训练的配合十分重要、十分迫切.

自从五十年代日本的谷一郎教授对跳雪的动作进行重大改革以来, 跳雪的技术日趋完善, 特别是七十年代、八十年代西德的斯特劳马尼、英国的 A·J·沃德·史密斯, D·克莱门茨, 日本的矢谷, 挪威的 P·Tveit, P·O·Pedersen, 瑞士的 A·Sagesser, P·A·Neukom 及苏联的 Лудвиг, П. Жимизов 等人以风洞实验为基础, 根据高速摄影及测力得到的数据, 对跳雪做了较系统的研究. 但他们都是把人体当作一个刚体来研究, 通过对优秀运动员的技术动作的分析, 参照风洞实验的结果来改进技术动作.

本文把人体简化为七部分组成的多刚体系统, 以离台时刻人体系统质心的合速度最大为目标函数, 以动量矩原理、技术动作的要求及人体自身条件等为约束条件, 把人体系统各刚体的相对角度作为基本变量(这些量决定了人体运动过程中的姿式), 建立了一系列非线性

\* 国家自然科学基金资助项目.

规划, 求解此系列规划就得到人体起跳过程中各时刻的最优姿式以及水平速度、垂直速度等, 这对运动员的科学训练有重要参考价值。

## 二、人体简化模型及计算表达式

国际滑雪联合会 (F.I.S) 把跳雪运动分为五个部分: (1) 速滑; (2) 起跳; (3) 自由飞跃; (4) 着地; (5) 滑跑; 其中起跳是最关键的环节。

根据动作特点, 本文把人体简化七个部分组成的多刚体系统, 如图 1 所示, 分别以  $B_i$ ,  $m_i$ ,  $\omega_i$ ,  $I_i$ ,  $\rho_i$  表示第  $i$  个刚体和它的质量、绝对角速度、相对其质心的转动惯量及其质心  $C_i$  对固定坐标系原点  $O$  的矢径 ( $O$  为起跳点, 固定在零刚体  $B_0$ —地面上),  $h_i$ ,  $\Omega_i$  分别表示第  $i$  个铰、 $B_i$  对其内接刚体  $B_j(i)$  的相对角速度,  $\theta_i$  表示  $B_i$  对  $B_j(i)$  的角度 ( $i=1, 2, \dots, 7$ ), 且设: 人体矢状面对称, 起跳中做平面运动, 各个铰都是圆柱铰。根据文献 [1] 得运动学公式:

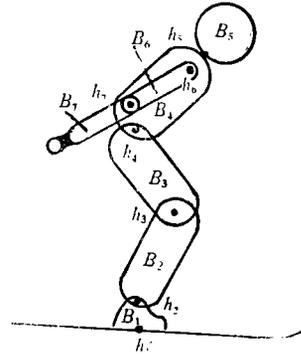


图 1

$$(\omega) = -(T)^T (\Omega) = -(T)^T (\dot{\theta}) \quad (2.1)$$

$$\rho = (b^e)^T (1) + r_1(1) \quad (2.2)$$

其中  $(T)$  为通路矩阵,  $(b^e)$  为位形矩阵,  $r_1$  是  $h_1$  对  $O$  点的矢径,  $(1) = (1, 1, \dots, 1)^T$  为 7 阶列矩阵, 而:

$$(\omega) = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7)^T, \quad (\rho) = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_7)^T, \quad (\dot{\theta}) = (\dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_7)^T$$

## 三、建立非线性规划优化跳雪的起跳动作

人离开跳台瞬间系统质心在合理方向上的速度越大, 跳雪的距离就越远。设系统的质心的水平速度、垂直速度分别为  $v_1$ ,  $v_2$ , 空气密度  $d=1.225 \times 9.8 \text{ N/m}^3$ , 令:  $\theta_i = \theta_i \mathbf{k}$ ,  $\omega_i = \omega_i \mathbf{k}$  (见图 2 坐标系), 人体阻力面积、升力面积及总质量分别记为  $A_r$ ,  $A_L$ ,  $m$ , 地面对人的反作用力, 摩擦系数及空气的阻力、升力、升阻比分别记为  $F$ ,  $\mu$ ,  $f_r$ ,  $f_L$ ,  $K_j$ . 在 45 米级跳台人离台速度达到 18m/s 左右, 故可用公式: ( $v_1 = v_1 \mathbf{i}$ ,  $v_2 = v_2 \mathbf{j}$ )

$$f_r = \frac{1}{2} d v_1^2 A_r, \quad f_L = \frac{1}{2} d v_1^2 A_L = \frac{1}{2} d v_1^2 K_j A_r,$$

于是有:

$$\frac{1}{2} d v_1^2 A_r + F \mu = -m \frac{d v_1}{d t} \quad (3.1)$$

设完成起跳所用的时间为  $T$ ,  $n$  为大于 1 的正整数,  $\Delta t = T/n$ , 在  $\Delta t$  内把 (3.1) 式近似看成一个常微分方程, 令:  $A = -d A_r / 2m$ ,  $B = -F \mu / m$ , 于是 (3.1) 式变为:

$$\frac{d v_1}{d t} = A v_1^2 + B \quad (3.2)$$

用 Picard 逐次逼近法解(3.2)式, 令  $v_1^0$ 、 $v_2^0$  分别为起跳的初始水平速度、垂直速度的大小, 一次逼近解为:

$$v_1^{(1)} = v_1^0 + \int_{t_0}^t [A(v_1^0)^2 + B] dt = v_1^0 + [A(v_1^0)^2 + B](t - t_0)$$

注意到对此问题, 一次逼近解的误差已是高阶小量, 故用  $v_1^{(1)}$  近似表示  $v_1$ , 即:

$$v_1 = v_1^0 - \left[ \frac{1}{2m} dA_r(v_1^0)^2 + \frac{1}{m} F\mu \right] \Delta t \quad (3.3)$$

同上分析, 由:  $F + f_L - mg = mdv_2/dt$ , 得:

$$v_2 = v_2^0 + \left( \frac{F}{m} + \frac{1}{2m} dv_1^2 K_j A_r - g \right) \Delta t \quad (3.4)$$

设人直立正面迎风时, 刚体  $B_4$  与  $B_6$ 、 $B_7$  的迎风面积为  $S_4$  (注意到起跳时两臂靠在体侧),  $B_3$  的为  $S_3$ ,  $B_2$  的为  $S_2$ ,  $B_5$  的为  $S_5$ , 由图 2 容易得到:

$$\begin{aligned} A_r = & S_2 \sin \theta_2 + S_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) \\ & + S_4 \sin(\theta_4 - \theta_3 + \theta_2) \\ & + S_5 \sin(\theta_5 - \theta_4 + \theta_3 - \theta_2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$S_i (i=2, 3, 4, 5)$  及人体各种姿态下的升阻比  $K_j$  由风洞实验来确定。

考虑到  $\theta_3$ 、 $\theta_4$  对  $F$  的影响较大, 令:

$$\begin{aligned} F = & F(\theta_3, \theta_4) = a\theta_3^2 + b\theta_3 + c\theta_4^2 \\ & + e\theta_4 + f\theta_3\theta_4 + h \end{aligned} \quad (3.6)$$

根据高速摄影及测力得到的数据, 采用二元函数六点插值确定系数  $a, b, c, e, f, h$ 。这样  $v_1, v_2$  就都表示成  $\theta_i$  的函数了 ( $i=2, 3, 4, 5; \theta_1=0$ )。

起跳离地瞬间作用于人体的俯仰力矩及地面的反作用力等外力对系统质心的合力矩应该为零, 故对系统质心动量矩守恒, 即:

$$\sum_{i=1}^7 I_i \omega_i + \sum_{i=1}^7 m_i \omega_i |\rho_c - \rho_i|^2 = 0 \quad (3.7)$$

注意到在图 2 坐标系中,  $\omega_1=0$ ,  $\omega_2>0$ ,  $\omega_3<0$ ,  $\omega_4=\omega_6=\omega_7>0$ ,  $\omega_5<0$ , (3.7)式左边第二项可近似取为零, 而由 Kane-Smith 公式:

$$\theta_i(t) = \theta_i^T + (\theta_i^T - \theta_i^0) \left( \frac{t}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (3.8)$$

$\theta_i^0$ ,  $\theta_i^T$  分别表示动作开始和完成时刻刚体  $B_i$  对其内接刚体  $B_j(i)$  的相对角度, 记  $\theta_i(t) = \theta_i$ ,  $\theta_i(0) = \theta_i|_{t=0}$ , 于是有:

$$\dot{\theta}_i = (\theta_i^T - \theta_i^0) \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (3.9)$$

由于  $T$  很小 (约为 0.2 秒),  $n>1$ , 故  $\Delta t = T/n$  也很小 (若  $n=9$ ,  $\Delta t=0.022$  秒), 近似有:

$$\dot{\theta}_i = (\theta_i - \theta_i^0) \left( \frac{1}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} \cos \frac{2\pi t}{\Delta t} \right) \quad (3.10)$$

根据(2.1)式, 则(3.7)式可写为,

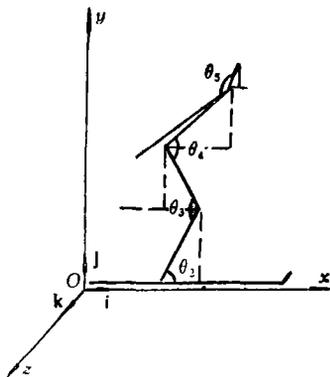


图 2

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^7 I_i (\theta_2 - \theta_2^0) - \sum_{i=3}^7 I_i (\theta_3 - \theta_3^0) \\ & + \sum_{i=4}^7 I_i (\theta_4 - \theta_4^0) - I_6 (\theta_5 - \theta_5^0) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

令  $t_0=0, t_j=Tj/n=\Delta t_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), 由(3.8):

$$\theta_i(t_j) = \theta_i^T + (\theta_i^T - \theta_i^0) \left( t_j/T - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi t_j}{T} \right) \quad (3.12)$$

以  $\theta_i$  ( $i=2, 3, 4, 5$ ) 为自变量, 以  $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$  为目标函数, 在四维空间  $R(j)$ :  $\theta_i(t_{j-1}) \leq \theta_i \leq \theta_i(t_j)$  ( $i=2, 3, 4, 5; j=1, 2, \dots, n$ ) 上建立求最优动作的非线性规划  $NP(j)$ ,  $NP(1)$  的初值为起跳开始时刻的  $\theta_i(0)$ 、 $v_1^0$ 、 $v_2^0$ ,  $NP(1)$  的最优解作为  $NP(2)$  的初值, 依此类推. 这样, 给定人体参数和起跳的初条件, 确定  $K_j$  后依次求解  $n$  个非线性规划就可得到人体系统各个时刻的  $\theta_i$ , 并求得系统质心的水平速度、垂直速度及离台瞬间  $v$  与水平方向的夹角 (起跳角). 由上述分析, 得到非线性规划  $NP(j)$  为:

$NP(j)$ : Obj.:  $\max v(\theta_i) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

$$\begin{aligned} \text{S. t. :} \quad & \sum_{i=2}^7 I_i (\theta_2 - \theta_2^0) - \sum_{i=3}^7 I_i (\theta_3 - \theta_3^0) \\ & + \sum_{i=4}^7 I_i (\theta_4 - \theta_4^0) - I_6 (\theta_5 - \theta_5^0) = 0, \end{aligned}$$

$$(\theta_i(t_{j-1}) \leq \theta_i \leq \theta_i(t_j); \quad i=2, 3, 4, 5; \quad j=1, 2, \dots, n)$$

本文自编了计算机程序, 用直接法 (网格法) 解此系列非线性规划.

## 四、算 例

下面以第六届、第七届全国冬运会跳雪冠军李宝权为例进行试算.

李宝权身高 1.70m, 体重  $62 \times 9.8\text{N}$ , 雪板重  $10 \times 9.8\text{N}$ , 由回归方程算得: (单位:  $9.8\text{N} \cdot \text{m}^2$ )

$$\begin{aligned} I_2 &= 0.075, & I_3 &= 0.229, & I_4 &= 0.997, \\ I_5 &= 0.016, & I_6 &= 0.027, & I_7 &= 0.042, \end{aligned}$$

根据对李宝权的风洞实验确定了迎风面积:

$$S_2 = 0.08\text{m}^2, \quad S_3 = 0.13\text{m}^2, \quad S_4 = 0.32\text{m}^2, \quad S_5 = 0.04\text{m}^2;$$

同时确定了各种姿态下的  $K_j$ .

根据受试者的 45 米级台跳时的高速摄影及测力数据写出求插值函数  $F(\theta_3, \theta_4)$  的系数的六元一次方程组, 用主元素消去法求得:

$$\begin{aligned} a &= 87718.58, & b &= -18677.67, & c &= 41601.79, \\ e &= 144303.73, & f &= -125597.99, & h &= 93827.44, \end{aligned}$$

将上述数据代入(3.6)式就得到了  $F(\theta_3, \theta_4)$  的表达式.

由高速摄影知李完成起跳的时间  $T=0.2\text{s}$ ,  $v_1^0=18.76\text{m/s}$ ,  $v_2^0=0\text{m/s}$ , 取  $n=9$ , 将上

述数据代入规划 $NP(j)$ , 在计算机上算得9个规划的结果如下:

表 1

	$x[2]$	$x[3]$	$x[4]$	$x[5]$	$H_2$	$v_2$	$v$
$K[1]=0.078$	80.656	82.032	38.637	99.459	18.740	0.171	18.741
$K[2]=0.138$	80.964	88.441	46.036	99.986	18.718	0.439	18.723
$K[3]=0.209$	81.116	98.624	58.165	99.986	18.694	0.869	18.714
$K[4]=0.482$	81.116	115.898	79.508	127.765	18.666	1.483	18.725
$K[5]=0.517$	86.389	128.833	88.573	138.167	18.636	2.247	18.771
$K[6]=0.461$	87.852	151.236	114.084	153.814	18.603	3.256	18.886
$K[7]=0.185$	89.443	166.890	131.088	160.091	18.568	4.483	19.101
$K[8]=0.120$	89.978	179.176	145.405	167.784	18.532	5.716	19.393
$K[9]=0.120$	90.062	179.263	145.405	169.010	18.496	6.967	19.765
Ang=20.65	$F=5197.898$						

表中左边一列是 $K_j$ 的取值,  $x[2]$ ,  $x[3]$ ,  $x[4]$ ,  $x[5]$ ,  $H_i$ ,  $v_i$ ,  $v$ 分别表示 $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\theta_4$ ,  $\theta_5$ , 水平速度, 垂直速度和合速度, 最后一行Ang=20.65表示起跳角, 地面的反作用力 $F=5197.898$  (牛顿)  $\approx 529.86$  (公斤)。

计算结果表明李宝权离台时刻最优姿态是小腿与雪板垂直 ( $\theta_2=90.062^\circ$ ), 小腿与大腿成的角 $\theta_3$ 为 $179.263^\circ$ , 大腿与躯干成的角 $\theta_4$ 为 $145.405^\circ$ , 头与躯干成的角 $\theta_5$ 为 $169.01^\circ$ ,  $H_i$ 逐渐下降, 由 $18.76\text{m/s}$ 降至 $18.496\text{m/s}$ ,  $v_i$ 由零增至 $6.967\text{m/s}$ ,  $v$ 开始有所下降,  $0.06$ 秒后开始增加, 最后达到 $19.765\text{m/s}$ 。

由高速摄影知, 李宝权离台时刻 $\theta_2=91.997^\circ$ , 与优化结果相近,  $\theta_3=132.138^\circ$ ,  $\theta_4=99.301^\circ$ , 与优化结果对比, 这两个角过小, 影响了跳雪成绩。李离台时刻 $H_i=16.89\text{m/s}$ ,  $v_i=0.60\text{m/s}$ , 起跳角为 $0.04^\circ$ ,  $v=16.90\text{m/s}$ , 与优化结果对比, 李宝权若能充分发挥起跳的爆发力, 大幅度提高 $v_i$ 及 $\theta_3$ ,  $\theta_4$ 的值可能会提高成绩。

文献[2]提出起跳方式大致分为两种类型, (见图3)世界上的优秀选取采手两种方式的都有。根据李宝权的身体条件, 按本文的优化结果, 李采用(II)的起跳方式更好。

从计算结果看, 与文献[3]对比,  $v_i$ 与 $F$ 值偏大, 这与计算误差有关。产生误差的主要原因有:

1. 把人体简化为七个刚体的多体系统, 人体结构参数 $I_i$ ,  $m_i$ 等由回归方程算得, 有一定的误差。
2. 高速摄影影片的解析、地面反作用力的实测都有误差, 因此插值函数 $F(\theta_3, \theta_4)$ 有一定的误差, 对优化结果影响较大。
3.  $K_j$ 的确定及 $S_i$ 的计算有一定的误差。
4. 计算中的舍入误差对优化的结果有一定的影响。

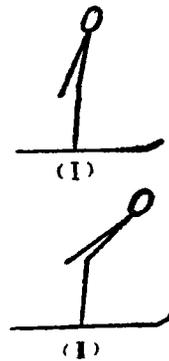


图 3

## 参 考 文 献

- [ 1 ] J· 维腾伯格, 《多刚体系统动力学》, 北京航空学院出版社, (1986).  
[ 2 ] 李豹, 吴德义译, 跳台滑雪技术, 《滑雪》杂志, (1985,1).  
[ 3 ] A·J· 沃德· 史密斯, D· 克莱门茨, 实验测定滑雪运动员的气动特性, 南方安, 张如清摘译自  
*The Aerodynamics Journal* (Dec.1982).

## Optimization of the Take-Off Movement of Ski Jumping with the Method of Mathematical Programming

Guan Ru-hua

(*Jilin University, Changchun*)

Li Run

(*Jilin University of Technology, Changchun*)

Yu Li-ran

(*Jilin Institute of Electronic Technology, Changchun*)

### Abstract

This paper is based on the finite and dispersed data which were obtained from the experiments of the wind tunnel and of the force measurement and from the high-speed photography. It analyses and optimizes the take-off movement of ski jumping with the theory of dynamics of systems of rigid bodies and with the method of mathematical programming. The paper describes the optimal take-off movement of ski jumping. Furthermore, it presents an example and compares the result with those of other papers published at home and abroad. The comparison shows that our computation and optimization are reasonable and well-grounded.

**Key words** mathematical programming, optimization, dynamics of systems of rigid bodies, ski jumping