Sine-Gordon方程孤立子解的表达式*

徐宝智　　方小卫

（浙江大学数学系）（杭州自动化研究所）

（戴世强推荐，1991年1月25日收到）

摘　要

本文研究Sine-Gordon方程

$$u_{xt}=\sin u \tag{A}$$

的反散射解．给出了(A)的孤立子解的简洁表达式，并讨论了单孤立子解和双孤立子解．

关键词　反散射　孤立子解　反射系数

一

在文[1]中已讨论了Sine-Gordon方程(A)的反散射解，给出了解的计算公式

$$u_x=4K_1(x,\ x)\qquad\text{或}\qquad u_x^2=8dK_2(x,\ x)/dx$$

其中$K(x,\ y)=(K_1(x,y),\ K_2(x,y))^T$满足Gelfand-Levitan方程

$$\overline{K}(x,\ y)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}F(x+y)+\int_x^\infty K(x,\ z)F(z+y)dz=0\qquad(x<y)$$

$$F(x)=\sum_{m=1}^{N}C_m\exp[i\zeta_m x]+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\xi)\exp[i\xi x]d\xi$$

并在反射系数R为零及束缚态特征值$\zeta_j(j=1,2,\cdots,N)$是纯虚数的假定下得到了方程(A)的N孤立子解为

$$u(x,\ t)=\operatorname{arc}\cos\left\{1-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\ln\det(I+B^*B)\right\} \tag{1.1}$$

其中　$B=(b_{mn})$，$B^*=(b^*_{mn})$，$b_{mn}=b_m b^*_n/(\zeta_m-\zeta^*_n)$

$$b_m=\sqrt{C_m(0)}\exp[i\zeta_m x-it/4\zeta_m]$$

本文给出在同样假定下(A)的N孤立子解的一个简洁表达式，它在具体计算时较公式(1.1)要方便得多，这就是下面的

定理1　设(i)$R(\xi,\ 0)=0$，(ii)束缚态特征值$\zeta_j(j=1,2,\cdots,N)$是纯虚数，即$\zeta_j=i\eta_j$，$\eta_j>0$为实数则(A)的孤立子解表达式为

$$u(x,\ t)=-4\operatorname{tg}^{-1}\frac{\operatorname{Im}\det(M-iI)}{\operatorname{Re}\det(M-iI)} \tag{1.2}$$

* 国家自然科学基金资助项目．

其中矩阵 $M(x)=\int_x^{\infty}\Phi^T(z)\Phi(z)dz$, $\Phi(x)=(\sqrt{C_1}\exp[-\eta_1 x],\cdots,\sqrt{C_N}\exp[-\eta_N x])^T$, $C_j(t)(j=1,2,\cdots,N)$为归范系数，I表示$N\times N$单位阵.

为证明定理1，先叙述二个引理.

引理1 若$x=(x_1,\cdots,x_N)$, $y=(y_1,\cdots,y_N)^T$, $A=(a_{ij})_{N\times N}$则有等式

$xAy=\mathrm{Tr}(yxA)$ （其中$\mathrm{Tr}A$表示阵A的迹）.

引理2 设$V(x)$为连续矩阵函数，且在任一点x_0为非奇异，即$\det V(x_0)\neq 0$则

$$\frac{d}{dx}\ln\det V(x)=\mathrm{Tr}\left(\frac{dV}{dx}V^{-1}\right)$$

以下证明定理1.

在定理1的条件(ii)假设下可以证明归范化系数$C_j(t)$是实的，且$K_1(x,y;t)$, $K_2(x,y;t)$均为实的，这时的K_1, K_2满足的G.L.方程为

$$\left.\begin{aligned} &K_1(x,y;\ t)=F(x+y;\ t)+\int_x^{\infty}K_2(x,\ z;\ t)F(z+y;\ t)dz \\ &K_2(x,\ y;\ t)=-\int_x^{\infty}K_1(x,\ z;\ t)F(z+y;\ t)dz \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

$\because$ $R(\xi,\ 0)=0$

可知积分核

$$F(z)=\sum_{m=1}^{N}C_m(t)\exp[-\eta_m x]$$

则有 $$F(x+y;\ t)=\sum_{m=1}^{N}\sqrt{C_m}\exp[-\eta_m x]\cdot\sqrt{C_m}\exp[-\eta_m y]\equiv\Phi(x)\Phi^T(y)$$

为了解积分方程组(1.3)，可设$K_1(x,\ y)=G_1(x)\Phi^T(y)$, $K_2(x,\ y)=G_2(x)\Phi^T(y)$, 代入方程组(1.3)，并记

$$M(x)=\int_x^{\infty}\Phi^T(z)\Phi(z)dz$$

得到 $G_1(x)=\Phi(x)+G_2(x)M(x)$, $G_2(x)=-G_1(x)M(x)$

消去$G_2(x)$，并记$M^2(x)+E=D$，且可证D为非奇异，

故 $G_1(x)=\Phi(x)D^{-1}$, $G_2(x)=-\Phi(x)D^{-1}M(x)$

因此

$$K_1(x,\ x;\ t)=\Phi(x)D^{-1}\Phi^T(x),\ K_2(x,\ x;\ t)=-\Phi(x)D^{-1}M(x)\Phi^T(x)$$

所以

$$\frac{u_x^2}{4}-i\frac{u_{xx}}{2}=2\frac{\partial}{\partial x}[K_2(x,\ x;\ t)-iK_1(x,\ x;\ t)]$$

$$=2\frac{\partial}{\partial x}[-\Phi(x)D^{-1}M(x)\Phi^T(x)-i\Phi(x)D^{-1}\Phi^T(x)]$$

应用引理1，并注意$\Phi^T(x)\Phi(x)=-dM(x)/dx$，则

$$\frac{u_x^2}{4}-i\frac{u_{xx}}{2}=2\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Tr}\left(M(x)\frac{dM(x)}{dx}D^{-1}+i\frac{dM(x)}{dx}D^{-1}\right)$$

$$=2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mathrm{Tr}\left[(M+iI)\frac{dM}{dx}(M-iI)^{-1}(M+iI)^{-1}\right]\right\}$$

$$=2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mathrm{Tr}\frac{d(M-Ii)}{dx}(M-iI)^{-1}\right\}$$

再应用引理2得到

$$\frac{u_x^2}{4}-i\frac{u_{xx}}{2}=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det(M(x)-iI)$$

取其虚部并积分两次可知

$$u(x,\ t)=-4\mathrm{tg}^{-1}\frac{\mathrm{Im}\ \det(M-iI)}{\mathrm{Re}\ \det(M-iI)}$$

此即为公式(1.2)成立。

二

以下用公式(1.2)计算S-G方程(A)的单孤立子解与双孤立子解。

(1) 单孤立子解

取$N=1$，则$M(x,\ t)=C_1(t)\exp[-2\eta_1(t)x]/2\eta_1(t)$， A.K.N.S 演化定理知 $\eta_1(t)=\eta_1(0)$，$C_1(t)=C_1(0)\exp[-t/4\eta_1(0)]$

$$\therefore\quad u(x,\ t)=-4\mathrm{tg}^{-1}(-\exp[2\eta_1x+t/2\eta_1-\ln(C_1(0)/\eta_1(0))])$$

此即为(A)的单扭子解。

(2) 双孤立子解

取$N=2$，则

$$M=\begin{pmatrix}(C_1/2\eta_1)\exp[-2\eta_1x] & (\sqrt{C_1}\sqrt{C_2}/(\eta_1+\eta_2))\exp[-(\eta_1+\eta_2)x]\\ (\sqrt{C_1}\sqrt{C_2}/(\eta_1+\eta_2))\exp[-(\eta_1+\eta_2)x] & (C_2/2\eta_2)\exp[-2\eta_2x]\end{pmatrix}$$

此时 $\mathrm{Im}\ \det(M-iI)=-((C_1/2\eta_1)\exp[-2\eta_1x]+(C_2/2\eta_2)\exp[-2\eta_2x])$

$\mathrm{Re}\ \det(M-iI)=-1+Gr_1r_2\exp[-2x(\eta_1+\eta_2)]$

由A.K.N.S演化定理知$\eta_i(t)=\eta_i(0)$，$C_i(t)=C_i(0)\exp[-t/4\eta_i(0)]$，$i=1,2$由公式(1.2)知

$$u(x,\ t)=-4\mathrm{tg}^{-1}[(r_1\exp[-X]+r_2\exp[-Y])/(1-Gr_1r_2\exp[-(X+Y)])]$$

其中 $r_i=\dfrac{C_i(0)}{2\eta_i}$，　$G=\left(\dfrac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1+\eta_2}\right)^2$，　$X=2\eta_1x+\dfrac{t}{2\eta_1}$，　$Y=2\eta_2x+\dfrac{t}{2\eta_2}$

我们考察$|t|\to\infty$时，$u(x,\ t)$的性状。

1. X波：在$X=2\eta_1x+t/2\eta_1$附近，即x随t趋于无穷，但保持$X=2\eta_1x+t/2\eta_1$在紧集中变化，记$\Delta=\ln G$，

则

$$\mathrm{tg}\left(-\frac{u}{4}\right)=\frac{\exp[-X+\delta_1]+\exp[-X\eta_2/\eta_1+\delta_2+\beta_1t]}{1-\exp[-X-X\eta_2/\eta_1+\delta_1+\delta_2+\beta_1t+\Delta]}$$

当$t\to-\infty$及$t\to\infty$时，$\exp[-X+\delta_1]$及$-\exp[X-\delta_1-\Delta]$分别为其渐近主部，因此

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{u}{4}\right)\approx\begin{cases}\exp[-(2\eta_1x+t/2\eta_1)+\delta_1] & t\to-\infty\\ -\exp[(2\eta_1x+t/2\eta_1)-\delta_1-\Delta] & t\to\infty\end{cases}$$

2. Y波，在$Y=2\eta_2x+t/2\eta_2$附近考虑时

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{u}{4}\right)=\frac{\exp[-Y\eta_2/\eta_1+\beta_2t+\delta_1]+\exp[-Y+\delta_2]}{1-\exp[-Y-Y\eta_2/\eta_1+\delta_1+\delta_2+\Delta+\beta_2t]}$$

当$t\to-\infty$及$t\to\infty$时，$-\exp[Y-\delta_2-\Delta]$及$\exp[-Y+\delta_2]$分别为其渐近主部，因此

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{u}{4}\right)\approx\begin{cases}-\exp[2\eta_2x+t/2\eta_2-\delta_2-\Delta] & t\to-\infty\\ \exp[-(2\eta_2x+t/2\eta_2)+\delta_2] & t\to\infty\end{cases}$$

上述分析结果表明有

定理2 设$u(x,t)$是S-G方程(A)的解，$0<\eta_1<\eta_2$，则(A)当$|t|\to\infty$时，$u(x,t)$分裂为二个相距越来越远的孤立波，若将在X，Y附近的孤立波分别称为X波和Y波，则有

X波： $$u(x,t)\approx\begin{cases}-4\operatorname{tg}^{-1}(\exp[-(2\eta_1x+t/2\eta_1)+\delta_1]) & t\to-\infty\\ -4\operatorname{tg}^{-1}(-\exp[2\eta_1x+t/2\eta_1-\delta_1-\Delta]) & t\to\infty\end{cases}$$

Y波： $$u(x,t)\approx\begin{cases}-4\operatorname{tg}^{-1}(-\exp[2\eta_2x+t/2\eta_2-\delta_2-\Delta]) & t\to-\infty\\ -4\operatorname{tg}^{-1}(\exp[-(2\eta_2x+t/2\eta_2)+\delta_2]) & t\to\infty\end{cases}$$

其波速分别为$-1/4\eta_1^2$，$-1/4\eta_2^2$。

（2） 每一孤立波都具有孤立子特性，X，Y波在$t\sim0$附近相互作用后，快波X赶上慢波，但两波都不改变各自的波形、波速和波幅。唯一改变的是位相，位相改变分别为$\Delta/2\eta_1$和$-\Delta/2\eta_2$。

参 考 文 献

[1] Ablowitz, M.J., D.J. Kaup, A.C. Newell and H. Segur, Method for solving the Sine-Gordon equation, *Phys. Rev. Lett.*, 30 (1973), 1262—1264.

The Expression of Soliton Solution for Sine-Gordon Equation

Xu Bao-zhi

(Zhejiang University, Hangzhou)

Fang Xiao-wei

(Hangzhou Automatic Institute, Hangzhou)

Abstract

In this paper, we study the inverse scattering solution for Sine-Gordon equation

$$u_{xt}=\sin u \qquad (A)$$

A particularly concise expression of the soliton solution is obtained, and the single soliton and double soliton solutions are discussed.

Key words inverse scattering, soliton solution, reflection coefficient