应用数学和力学，第13卷第4期(1992年4月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 具有非光滑边界层函数的线性变系数抛物型方程初边值问题的差分格式

苏煜城　　张由余

(南京大学数学系，1990年12月25日收到)

**摘　　要**

本文利用非均匀网格和指数型拟合差分方法给出了具有非光滑边界层函数的线性抛物型方程关于小参数$\varepsilon$一致收敛的差分格式．文章还给出了误差估计和数值结果．

**关键词**　非光滑边界层　特征边界　非均匀网格　指数型拟合　一致收敛的差分格式　抛物型方程

## 一、引　　言

Butuzov, Nesterov[1]曾研究过问题：

$$\left.\begin{aligned}&\mu\partial u/\partial t=\mu^2a(x)\partial^2u/\partial x^2-b(x)\partial u/\partial x+f(x,t,\mu)\\&(x,t)\in\Omega=(0<x<1)\times(0<t\leqslant T)\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

$$u|_{t=0}=0,\quad u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=1}=0\tag{1.2}$$

的渐近解，本文利用了他们的一些结果，研究该问题的差分解法．方程(1.1)在$t$方向和$x$方向的导数项带有不同量级的小参数$\mu$，退化方程的特征线平行于$x$轴，因此边界$\Gamma_1=(t=0, 0\leqslant x\leqslant 1)$是特征边界，摄动问题(1.1)，(1.2)靠近$t=0$附近的边界层函数由一阶偏微分方程来确定．该方程的解穿过由原点(0,0)引出的特征线时，其一阶导数将出现第一类间断点，因此在$t=0$附近的边界层函数是非光滑的．在边界$\Gamma_3=(x=1, 0<t\leqslant T)$附近边界层函数由常微分方程确定．本文根据这一问题的以上特性建立了在整个区域中关于小参数$\varepsilon$一致收敛的差分格式．我们沿$x$方向采用定步长，沿$t$方向采用非均匀网格．我们采用指数型拟合和非均匀网格相结合的方法对方程离散化，当非均匀网格满足加密条件时，差分格式关于小参数一致收敛，我们还给出了误差估计．

## 二、摄动问题渐近解的构造[1]

在$\bar{\Omega}=\{0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant T\}$内讨论下面线性抛物型方程初边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\partial u/\partial t=\varepsilon^2 a(x)\partial^2 u/\partial x^2-b(x)\partial u/\partial x+f(x,t)\\&(x,t)\in\Omega=(0<x<1)\times(0<t\leqslant T)\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

$$u|_{t=0}=0\tag{2.2}$$

$$u|_{x=0}=0\tag{2.3}$$

$$u|_{x=1}=0\tag{2.4}$$

这里函数$a(x)$，$b(x)$，$f(x,t)$充分光滑，$a(x)\geqslant a_0>0$，$b(x)\geqslant b_0>0$，$f(x,t)$在角点$(0,0)$满足一阶相容性条件，即$f(0,0)=0$，且当$(x,t)\in(-\infty<x\leqslant 1,t\geqslant 0)$时，$f(x,t)$，$b(x)$满足：$|f/b|=o(1)$，$|(f/b)'_x|=o(1)$。

问题(2.1～2.4)的解的渐近表达式是：

$$u(x,t,\varepsilon)=\bar u_0(x,t)+\tilde\pi_0(x,\tau,\xi)+\theta_0(\zeta,t)+R_0(\zeta,\tau,\theta)+o(\varepsilon)\tag{2.5}$$

其中$\bar u_0$是退化方程的解：

$$b(x)\partial\bar u_0/\partial x=f(x,t),\bar u_0(0,t)=0\tag{2.6}$$

$\tilde\pi(x,\tau,\xi)$是$\Gamma_1$附近光滑化的边界层函数，$\tilde\pi=g(\xi)\bar\pi_0(x,\tau)$，$\pi_0$满足：

$$\partial\pi_0/\partial\tau+b(x)\partial\pi_0/\partial x=0,\ \pi_0(x,0)=-\bar u_0(x,0),\ \pi_0(0,\tau)=0\tag{2.7}$$

$$\pi_0(x,\ \tau)=\begin{cases}\pi_0^1=-\bar u_0(B^{-1}[B(x)-\tau],0) & \tau\leqslant B(x)\\ \pi_0^2=0 & \tau\geqslant B(x)\end{cases}$$

$\bar\pi_0$是$\pi_0^1(x,\tau)$在整个区域$\bar\Omega$上的延拓函数，$\tau=B(x)$是方程(2.7)的特征线，

$$\tau=\frac{t}{\varepsilon},\ B(x)=\int_0^x\frac{1}{b(s)}ds,\quad \xi=\frac{B(x)-\tau}{\varepsilon},\quad g(\xi)=\frac{1}{\sqrt\pi}\int_{-\infty}^{\xi}\exp(-s^2)ds$$

$\tilde\pi_0$满足：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\frac{\partial\tilde\pi_0}{\partial t}-\varepsilon^2 a(x)\frac{\partial^2\tilde\pi_0}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial\tilde\pi_0}{\partial x}=o(\varepsilon^2)\\&\tilde\pi_0(x,0,\xi)+\bar u_0(x,0)=o(\varepsilon^2),\ \tilde\pi_0(0,\tau,\xi)=o(\varepsilon^2)\end{aligned}\right\}\tag{2.7$'$}$$

$H=\theta_0+R_0$是$\Gamma_3$附近的边界层函数，它满足：

$$\left.\begin{aligned}&a(1)\partial^2 H/\partial\zeta^2+b(1)\partial H/\partial\zeta=0\\&H(0,\tau,t,\theta)=-\bar u_0(1,t)-\tilde\pi_0(1,\tau,\theta),\qquad H\to 0(\zeta\to\infty)\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

这里 $\zeta=(1-x)/\varepsilon^2$，$\theta=\xi|_{x=1}=(B(1)-\tau)/\varepsilon$

## 三、摄动问题解的导数估计

**引理3.1** 设

$$Lu=\varepsilon^2 a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b(x)\frac{\partial u}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t),\qquad a(x)\geqslant a_0>0$$

$a,b,f$在$\Omega$内充分光滑，若在$\Omega$中$Lu\geqslant 0(Lu\leqslant 0)$，$u$在$\Omega$内有正的极大（负的极小）值，且在点$p^0(x^0,t^0)$处达到，则对于所有的$p\in\bar\Omega$有$u(p)=u(p_0)$。

**证明** 参看[6]p.45引理4。

**引理3.2** 条件同引理3.1。若$u\neq\mathrm{const}$，并满足微分不等式$Lu\geqslant 0(Lu\leqslant 0)$，则$u$不可能在区域$\Omega$内达到正的极大（负的极小）值。

**证明** 由引理3.1直接推得.

**定理3.1** 条件同引理3.1，若$u\neq$const，且在边界$\Gamma$上$u\leqslant 0(u\geqslant 0)$，那么当$Lu\geqslant 0(Lu\leqslant 0)$时，$u\leqslant 0(u\geqslant 0)$.

**引理3.3** 当$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$时，下面不等式成立：

$$|g'(x)|\leqslant|g(\beta)-g(\alpha)|\cdot\frac{1}{\beta-\alpha}+\sup_{[\alpha,\beta]}|g''(x)|\cdot\frac{\beta-\alpha}{2} \tag{3.1}$$

**证明** 见[3].

由引理3.3，定理3.1和方程本身的变换，可得到

**定理3.2** 对于问题(2.1)～(2.4)的解$u(x,t,\varepsilon)$有如下的导数估计：

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial x^i\partial t^{k-i}}\right|\leqslant M\varepsilon^{-(i+k)}\qquad(i=0,1,2,3,4) \tag{3.2}$$

其中$M$为与$\varepsilon$无关的常数.

## 四、差分格式的建立

在区域$\bar\Omega$上引入网格$\bar W_h=\bar W_{h_2}\times\bar W_{h_1}$，其中$\bar W_{h_1}=\{t_i,\ i=0,1,\cdots,N_1,\ 0=t_0<t_1<\cdots<t_{N_1}=T\}$，$\bar W_{h_2}=\{x_j=jh_2,j=0,1,\cdots,N_2,x_0=0,x_{N_2}=1\}$，假定$\Gamma_h=\bar W_h\cap\Gamma$，$W_h=\bar W_h\cap\Omega$，$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$，$\Gamma_2=(x=0,0<t\leqslant T)$，构造问题(2.1)～(2.4)的差分格式如下：

$$L_h u^h_{ij}\equiv[\varepsilon^2 a(x_i)\sigma_i(\rho)u^h_{x\bar x}-b(x_i)u^h_{\mathring{x}}-\varepsilon u^h_{\bar t}]=f(x_i,t_j),\qquad(x_i,t_j)\in W_h \tag{4.1}$$

$$u_{0j}=u_{N_2j}=0,\quad u_{i0}=0$$

这里 $\sigma_i(\rho)=\dfrac{b(x_i)}{2a(x_i)}\cdot\rho\cdot\coth\left(\dfrac{b(x_i)}{2a(x_i)}\cdot\rho\right)$，$\rho=\dfrac{h_2}{\varepsilon^2}$

$$u_{\mathring{x}}=\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h_2},\quad u_{\bar t}=\frac{u_{ij}-u_{i,j-1}}{h_1^j},\quad h_1^j=t_j-t_{j-1}$$

$u_{ij}$表示$u(x,t)$在点$(x_i,t_j)$的近似值.$a_i,b_i,f_{ij}$分别为$a(x_i)$，$b(x_i)$，$f(x_i,t_j)$，$h_1=\max\limits_j h_1^j$，$h=\max(h_1,h_2)$，$N_0=\max(N_1,N_2)$.

按[3]给出$\Gamma_1$邻域内结点的加密公式：

$$t_j=\lambda\left(\frac{j}{N_1}\right),\quad\lambda(s)=\begin{cases}\psi(s) & 0\leqslant s\leqslant\alpha\\ \beta+\sigma(s-\alpha) & \alpha\leqslant s\leqslant 1\end{cases} \tag{4.2}$$

这里$\psi(s)=\bar a\varepsilon\ln[q/(q-s)]$，$q$为一个小于1的正常数，$\bar a$为一个正常数，$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$，$\varepsilon_0=Tq/\bar a$，$\alpha$为过点$(1,T)$作函数$\psi(s)=\bar a\varepsilon\ln[q/(q-s)]$的切线所得到的切点的横坐标，$\beta=\psi(\alpha)$，$\sigma=\psi'(\alpha)=\bar a\varepsilon/(q-\alpha)$. $\alpha$可通过迭代法求得.

由$\lambda'(s)$的单调性推得对一切$s$，$\lambda'(s)\leqslant\sigma\leqslant T/(1-q)=q_1$，并且$t_j-t_{j-1}\leqslant\lambda'(s_j)/N_1$，由此得出估计式：

$$t_j-t_{j-1}\leqslant q_1/N_1,\qquad 1\leqslant j\leqslant N_1\ (s_j=j/N_1) \tag{4.3}$$

在给出差分格式(4.1)，(4.2)的极大值原理之前，我们先给出一个引理.

**引理4.1** $|x\coth x-1|\leqslant cx^k$，$x\in[0,+\infty)$，$1\leqslant k\leqslant 2$.

**证明** 参看[4]中附录B.

将(4.1)式写成下面的形式：

$$L_h u_{ij} = -(d_{ij}u_{ij} - e_{i+1,j}u_{i+1,j} - w_{i-1,j}u_{i-1,j} - n_{i,j-1}u_{i,j-1}) = f_{ij} \tag{4.4}$$

其中 $n_{i,j-1} = \dfrac{\varepsilon}{h_1^{\prime}}$，$d_{ij} = \dfrac{2\sigma_i(\rho)\varepsilon^2 a_i}{h_2^2} + \dfrac{\varepsilon}{h_1^{\prime}}$

$$e_{i+1,j} = -\frac{b_i}{2h_2} + \frac{\sigma_i(\rho)\varepsilon^2 a_i}{h_2^2},\quad w_{i-1,j} = \frac{\sigma_i(\rho)\varepsilon^2 a_i}{h_2^2} + \frac{b_i}{2h_2}$$

**定理4.1** 在 $a(x)\geqslant a_0>0$，$b(x)\geqslant b_0>0$ 的假定下，若 $L_h u_{ij}\leqslant 0$，$u_{ij}|_{\Gamma_h}\geqslant 0$，那么$u_{ij}\geqslant 0$，$(x_i,t_j)\in\overline{W}_h$。

**证明** 令

$$\vec{u}_j = (u_{1j}, u_{2j}, \cdots, u_{N_2-1,j})^T,\quad \vec{f}_j = (f_{1j}, f_{2j}, \cdots, f_{N_2-1,j})^T,\qquad (j=1,\cdots,N_1)$$

将(4.4)改写成矩阵向量形式$A_j\cdot\vec{u}_j = -\vec{f}_j + B_j\vec{u}_{j-1} + \vec{A}_{0j}$

其中

$$A_j = \begin{pmatrix} d_{1j} & -e_{2j} & & \\ -w_{1j} & d_{2j} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -e_{N_2-1,j} \\ & & -w_{N_2-2,j} & d_{N_2-1,j} \end{pmatrix},\quad B_j = \mathrm{diag}(n_{1,j-1},\cdots,n_{N_2-1,j-1})$$

$\vec{A}_{0j}$是(4.4)式的左端项中的$u_{i+1,j}$，$u_{i-1,j}$ 在$\Gamma_h$上取值时移至右端所得到的向量。由 $d_{ij}$，$e_{i+1,j}$，$w_{i-1,j}$的表达式，我们易证：

$$d_{ij}\geqslant 0,\ e_{i+1,j}>0,\ w_{i-1,j}>0,\ d_{ij}-e_{i+1,j}-w_{i-1,j}\geqslant 0$$

故由[5]知$A_j^{-1}>0$。由已知条件和数学归纳法可证得$u_j\geqslant 0$，于是定理得证。

## 五、差分问题解的误差估计

### 5.1 古典估计

我们用差分计算了$L_h$作用于差$u(x_i,t_j)-u_{ij}$得到

$$L_h(u(x_i,t_j)-u_{ij}) = L_h u(x_i,t_j) - Lu(x_i,t_j)$$

记$R_{ij}=u(x_i,t_j)-u_{ij}$，有

$$|L_h R_{ij}| \leqslant \varepsilon^2 M \sup_{[x_{i-1},x_{i+1}]}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t_j)\right|\cdot\left|\sigma_i(\rho)-1\right| + Mh_2^2\varepsilon^2\sup_{[x_{i-1},x_{i+1}]}\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t_j)\right|$$

$$+Mh_2\sup_{[x_{i-1},x_{i+1}]}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t_j)\right| + \varepsilon(t_j-t_{j-1})\sup_{[t_{j-1},t_j]}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t)\right|$$

由引理4.1（取$k=1$），导数估计(3.2)以及(4.3)式知

$$\left.\begin{aligned} &|L_h R_{ij}| \leqslant M(h\varepsilon^{-4}+h^2\varepsilon^{-6}+h\varepsilon^{-1}) && (x_i,t_j)\in W_h \\ &R_{ij}=0 && (x_i,t_j)\in\Gamma_h \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

构造闸函数$v_{ij}=k(h\varepsilon^{-4}+h^2\varepsilon^{-6}+h\varepsilon^{-1})x$，适当选取正常数$k$，易得

$$L_h v_{ij}\pm L_h R_{ij}\leqslant 0\quad (x_i,t_j)\in W_h;\quad v_{ij}\pm R_{ij}\geqslant 0\quad (x_i,t_j)\in\Gamma_h$$

故由定理4.1推得

$$|u(x_i,t_j)-u_{ij}|\leqslant M(h\varepsilon^{-4}+h^2\varepsilon^{-6}+h\varepsilon^{-1}) \tag{5.2}$$

### 5.2 非古典估计

记$u_1(x,t)=\bar{u}_0(x,t)+\bar{\pi}_0(x,\tau,\xi)$，$u_2(x,t)=u_1(x,t)+H(\zeta,\tau,t,\theta)$，$c(x)=b(x)/a(x)$，

由第二节知道$u=u_2+o(\varepsilon)$.

对于$u_1,u_2(x,t)$有下面的估计式：

$$|L(u-u_1)|\leqslant M\varepsilon \qquad (x,t)\in\bar{\Omega} \tag{5.3}$$

$$|\tilde{\pi}_{0\tau}|\leqslant M\varepsilon^{-1}[\exp(-\xi^2)\cdot|\bar{\pi}_0(x,\tau)|+\varepsilon g(\xi)|\bar{\pi}_{0\tau}(x,\tau)|] \tag{5.4a}$$

$$|\tilde{\pi}_{0\tau\tau}|\leqslant M\varepsilon^{-2}[\varepsilon\exp(-\xi^2)|\bar{\pi}_{0\tau}(x,\tau)|+|\xi|\exp(-\xi^2)|\bar{\pi}_0(x,\tau)| +\varepsilon^2 g(\xi)|\bar{\pi}_{0\tau\tau}|] \tag{5.4b}$$

$$|\tilde{\pi}_{0x}|\leqslant M\varepsilon^{-1}[\exp(-\xi^2)|\bar{\pi}_0(x,\tau)|+\varepsilon g(\xi)|\bar{\pi}_{0x}(x,\tau)|] \tag{5.4c}$$

$$|\tilde{\pi}_{0xx}|\leqslant M[\varepsilon^{-1}\exp(-\xi^2)(|\bar{\pi}_{0x}(x,\tau)|+|\bar{\pi}_0(x,\tau)|)+\varepsilon^{-2}|\xi|\exp(-\xi^2)|\bar{\pi}_0| +g(\xi)|\bar{\pi}_{0xx}(x,\tau)|] \qquad (x,t)\in\Omega \tag{5.4d}$$

$$|u(x,t)-u_2(x,t)|\leqslant M\varepsilon \qquad (x,t)\in\Omega \tag{5.5}$$

$$|L(u(x,t)-u_2(x,t))|\leqslant M[\varepsilon+\exp(-\zeta c(1)/4)] \tag{5.6}$$

现在来证明这些估计式．易证(5.3)～(5.5)．为了证明(5.6)式，只需证

$$|LH(\zeta,\tau,t,\theta)|\leqslant M[\varepsilon+\exp(-\zeta c(1)/4)]$$

由Taylor展式

$$a(x)=a(1)-\varepsilon^2\zeta a'(1)+(1/2)\varepsilon^4\zeta^2 a''(\eta_1) \qquad x<\eta_1<1$$

$$b(x)=b(1)-\varepsilon^2\zeta b'(1)+(1/2)\varepsilon^4\zeta^2 b''(\eta_2) \qquad x<\eta_2<1$$

和(2.8)式，我们有

$$\left|\varepsilon^2 a(x)\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-b(x)\frac{\partial H}{\partial x}\right|\leqslant M\left[\varepsilon+\exp\left(-\frac{c(1)}{4}\zeta\right)\right]$$

由下面引理5.1的证明知道，$|\partial\tilde{\pi}_0(x,\tau,\xi)/\partial\tau|\leqslant M$，从而有

$$\varepsilon\left|\frac{\partial H(\zeta,\tau,t,\theta)}{\partial t}\right|\leqslant M\left[\varepsilon+\exp\left(-\frac{c(1)}{4}\zeta\right)\right]$$

由三角不等式推得(5.6)式成立.

**引理5.1** 当$(x,t)\in W_h$时，下面不等式成立：

$$\begin{aligned}|L_h(u^h-u_1)|&\leqslant|L(u-u_1)|+|(L-L_h)u_1|\\ &\leqslant M\varepsilon+\varepsilon|\tilde{\pi}_{0\bar{t}}-\partial\tilde{\pi}_0/\partial t|+b(x)|u_{1\hat{x}}-\partial u_1/\partial x|+\varepsilon^2 a(x)|u_{1x\bar{x}}|\\ &\quad+\varepsilon^2 a(x)|(\sigma(\rho)-1)u_{1x\bar{x}}|+\varepsilon^2 a(x)|\partial^2 u_1/\partial x^2|\\ &\leqslant M(h+\varepsilon)\end{aligned} \tag{5.7}$$

**证明** 首先分$\tau\geqslant c_0>B(1)$ （$c_0$与$\varepsilon$无关）和$0\leqslant\tau<c_0$两种情形利用$|B^{-1}(\varepsilon\xi)|\leqslant c\varepsilon|\xi|$，$|t_i-t_{i-1}|\leqslant M\varepsilon h_1^{-1}(0\leqslant t_i/\varepsilon<c_0)$和估计式(5.3)～(5.4d)证明$|\partial^2\tilde{\pi}_0/\partial x^2|$，$|\partial^2\tilde{\pi}_0/\partial\tau^2|$的有界性，然后由这有界性得到(5.8)式.

**引理5.2** 当$(x,t)\in W_h$时，下列不等式成立：

$$|L_h(u^h-u_2)|\leqslant M[h+\varepsilon+\exp(-\zeta c(1)/4)] \tag{5.8}$$

**证明** $|L_h(u^h-u_2)|\leqslant|L(u-u_2)|+|(L-L_h)u_2|$，由(5.6)和(5.7)式知只须证明$|(L-L_h)H(\zeta,\tau,t,\theta)|\leqslant M(h+\varepsilon)$即可．由三角不等式得到

$$|(L-L_h)H(\zeta,\tau,t,\theta)|\leqslant\varepsilon\left|H_{\bar{t}}-\frac{\partial H}{\partial t}\right|+\left|\varepsilon^2 a(x)\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}-b(x)\frac{\partial H}{\partial x} -\varepsilon^2 a(x)\sigma(\rho)H_{x\bar{x}}+b(x)H_{\hat{x}}\right|$$

对于项$\varepsilon|H_{\bar{t}}-\partial H/\partial t|$，由(5.4b)和(5.7)的证明过程可推得$\varepsilon|H_{\bar{t}}-\partial H/\partial t|\leqslant M(h+\varepsilon)$．下

面就$\rho=h_2/\varepsilon^2$很大、很小、有界三种情形来证明估计式

$$|\varepsilon^2 a_i\partial^2 H/\partial x^2-b_i\partial H/\partial x-\varepsilon^2 a_i\sigma_i(\rho)H_{x\bar{x}}+b_i H_{\hat{x}}|\leqslant M(h+\varepsilon) \tag{5.9}$$

由(5.6)式的证明过程知

$$\varepsilon^2 a(x)\partial^2 H/\partial x^2-b(x)\partial H/\partial x=k_0[b'(1)-a'(1)c(1)]\cdot c(1)\zeta\exp(-c(1)\zeta)+o(\varepsilon^2) \tag{5.10}$$

这里$k_0=-\bar{u}_0(1,t)-\bar{\pi}_0(1,\tau)g(\theta)$。为方便起见，下面记$s_1=c(1)\rho/2$，$s=c(x)\cdot\rho/2$，通过直接计算我们有

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 a(x)\sigma(\rho)H_{x\bar{x}}-b(x)H_{\hat{x}}=&\exp(c(1)(x-1)/\varepsilon^2)\cdot(b(x)/2h_2)[\exp(s_1)\\&-\exp(-s_1)]^2\cdot[\coth(s)-\coth(s_1)]\cdot k_0\end{aligned} \tag{5.11}$$

1) $\rho\geqslant c_2$, $c_2$是一个很大的正常数。

$$[\exp(s_1)-\exp(-s_1)]^2\cdot[\coth(s)-\coth(s_1)]=2\exp[-2(s-s_1)]-2$$

i) 当$\zeta$有限时，

$$2\exp[\zeta c'(1)h_2+(1/2)h_2\varepsilon^2\zeta^2 c''(\eta_3)]-2=2\zeta c'(1)h_2+o(\varepsilon^2 h_2) \qquad x<\eta_3<1$$

将此式和$b(x)=b(1)-\varepsilon^2\zeta b'(\eta_4)$代入(5.11)右端，得到

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 a(x)\sigma(\rho)H_{x\bar{x}}-b(x)H_{\hat{x}}&=k_0\exp(-c(1)\zeta)\cdot(b(1)/2h_2)\cdot 2\zeta c'(1)h_2+o(\varepsilon^2)\\&=k_0[b'(1)-a'(1)c(1)]\cdot c(1)\zeta\exp(-c(1)\zeta)+o(\varepsilon^2)\end{aligned}$$

ii) 当$\zeta$无限即$\zeta\to+\infty$时，因为$1-x\geqslant h_2$所以$\exp(-c(1)\zeta)\leqslant\exp(-2s_1)$，从而

$$|\varepsilon^2 a(x)\sigma(\rho)H_{x\bar{x}}-b(x)H_{\hat{x}}|\leqslant\frac{b(x)}{h_2}[\exp(-2s)-\exp(-2s_1)]\to 0 \qquad \left(\because\frac{1}{h_2}<\rho^k\right)$$

因此当$\rho\geqslant c_2$时，(5.9)式成立。

2) $\rho\leqslant c_1$，$c_1$是一个很小的正常数。

将$\exp(x)$在$x=0$处作Taylor展开，得到

$$[\exp(s_1)-\exp(-s_1)]^2\cdot[\coth(s)-\coth(s_1)]=4s_1(s_1-s)/s+o(s(s-s_1))$$

i) 当$\zeta$有限时，

$$-4s_1(s-s_1)/s=2h_2c'(1)\zeta+o(\varepsilon\cdot h_2)$$

ii) 当$\zeta$无限时，

$$\begin{aligned}\left|\frac{4s_1(s_1-s)}{s}\exp(-c(1)\zeta)\right|&=\left|\frac{2c(1)(c(x)-c(1))}{c(x)\cdot(x-1)}\ \frac{x-1}{\varepsilon^2}\ \frac{\varepsilon^2}{1}\ \frac{h_2}{\varepsilon^2}\right|\exp(-c(1)\zeta)\\&\leqslant M(h+\varepsilon)\cdot h_2\end{aligned}$$

所以在$\rho$很小时，估计式(5.9)成立。

3) $c_1\leqslant\rho\leqslant c_2$。其中$c_1$，$c_2$如上所述，类似前面两种情形的证明也可证得(5.9)式成立。

总之，不论$\rho$和$\zeta$取值如何，我们都有

$|(L-L_h)H(\zeta,\tau,t,\theta)|\leqslant M(h+\varepsilon)$，从而得到$|(L-L_h)u_2(x,t)|\leqslant M(h+\varepsilon)$，于是引理得证。

现构造辅助函数

$$W(x,t)=k_1(h+\varepsilon)(1+x)+k_2h_2\cdot\exp(-m\zeta)\pm[u^h-u_2(x,t)]$$

其中$k_1$，$k_2$为可选常数，

$$0<m<\min\left[\frac{c(1)}{4},\min_{[0,1]}b(x)/\max_{[0,1]}a(x)\right]$$

通过对$k_1$，$k_2$的选取，我们可证得

$$L_h W(x_i,t_j)\leqslant 0,\qquad (x_i,t_j)\in W_h$$

因为$(x_i,t_j)\in\Gamma_h$时，$u_{ij}^h=u(x_i,t_j)$，所以由(5.5)式推得

$$W(x_i,t_j)\geqslant 0,\qquad (x_i,t_j)\in\Gamma_h$$

利用定理4.1得到

$$|u^h-u_2|\leqslant M(h+\varepsilon)\tag{5.12}$$

由三角不等式，(5.12)和(5.5)推得

$$|u-u^h|\leqslant|u-u_2|+|u_2-u^h|\leqslant M(h+\varepsilon)\qquad (x,t)\in\overline{W}_h\tag{5.13}$$

综上所述我们得到本文的主要结果。

**定理5.1** 设$a(x),b(x),f(x,t)$充分光滑，$f(x,t)$在角点$(0,0)$满足一阶相容性条件。且当$(x,t)\in(-\infty<x\leqslant 1,t\geqslant 0)$时，$f(x,t),b(x)$满足$|f/b|=o(1)$，$|(f/b)_x'|=o(1)$，那么差分格式(4.1)当$h\to 0$时，在矩形域$\Omega$上关于小参数$\varepsilon$一致收敛，且有

$$|u(x,t)-u^h|\leqslant Mh^{\frac{1}{5}},\qquad (x,t)\in\overline{W}_h\tag{5.14}$$

**证明** 当 $0<\varepsilon\leqslant h^{\frac{1}{5}}$ 时，由估计式(5.13)得到

$$|u-u^h|\leqslant M(h+\varepsilon)\leqslant Mh^{\frac{1}{5}}$$

当$\varepsilon\geqslant h^{\frac{1}{5}}$时，由估计式(5.2)得到

$$|u-u^h|\leqslant Mh^{\frac{1}{5}}$$

所以对一切$(x,t)\in\overline{W}_h$我们有

$$|u(x,t)-u^h(x,t)|\leqslant Mh^{\frac{1}{5}}$$

其中$M$是与$\varepsilon$，$h$无关的正常数，于是定理得证。

## 六、数 值 例 子

考察例子：

$$\begin{cases}\varepsilon\dfrac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+2t\qquad (x,t)\in\Omega=(0<x<1)\times(0<t\leqslant 1)\\ u(0,t)=u(1,t)=0,\ u(x,0)=0\end{cases}$$

其渐近解为$u=2xt-2t\exp((x-1)/\varepsilon^2)+o(\varepsilon)$，下面通过表1,2 观察了渐近解和数值解之差随$\varepsilon,N_1,N_2$的变化情况，$N_1,N_2$的定义见第四节差分格式的建立。

**表 1**

| $\varepsilon=10^{-4}$ | $t_1$ | $t_2$ | $x_{N_2-1}$ | $x_{N_2-2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $N_1=10$<br>$N_2=10$ | 1.20178261E−04<br>6.37661051E−05<br>5.64121559E−05 | 2.58913857E−04<br>1.79004081E−04<br>7.9509776E−05 | 1.80334033E+00<br>1.80325030E+00<br>9.003E−05 | 1.60296918E+00<br>1.60289715E+00<br>7.204E−05 |
| $N_1=20$<br>$N_2=20$ | 6.13115899E−05<br>1.94773402E−05<br>4.18342497E−05 | 1.26854831E−04<br>5.82667790E−05<br>6.8588052E−05 | 1.90352590E+00<br>1.90343086E+00<br>9.504E−05 | 1.80334033E+00<br>1.80325480E+00<br>8.553E−05 |
| $N_1=40$<br>$N_2=70$ | 3.12951411E−05<br>5.02670895E−06<br>2.626843215E−05 | 6.36165369E−05<br>1.54920785E−05<br>4.81244584E−05 | 1.97508703E+00<br>1.97498827E+00<br>9.876E−05 | 1.94646259E+00<br>1.94636664E+00<br>9.595E−05 |

表 2

| $\varepsilon=10^{-8}$ | $t_1$ | $t_2$ | $x_{N_2-1}$ | $x_{N_2-2}$ |
|---|---|---|---|---|
| $N_1=20$ | 6.13115902E−09 | 1.26854831E−08 | 2.50027541E−02 | 2.36868197E−02 |
| | 1.94773411E−09 | 5.82667758E−09 | 2.50027434E−02 | 2.36868099E−02 |
| $N_2=20$ | 4.18342491E−09 | 6.85880652E−09 | 1.07E−08 | 9.8E−09 |

**注** 每个框子里的三行依次表示对应于同一点的渐近解、数值解及两解之差。表中的$t_1, t_2, x_{N_2-1}$，$x_{N_2-2}$依次表示$t=t_1, t=t_2, x=x_{N_2-1}$，$x=x_{N_2-2}$上取到最大误差(即线误差）的结点.

## 参 考 文 献

[1] Butuzov, V. F. and A. V. Nesterov, On the asymptotics of the solution of an equation of parabolic type with small parameters affecting the highest derivatives, *J. Vycisl. Math. and Math. Phys.*, 22(4) (1982), 865—870.

[2] Shishkin, G. I., Numerical solution of the boundary value problem for elliptic equations with small parameter at the leading derivative, *USSR Computational Math. Math. Phys.*, 26(7—8) (1986), 1019—1031.

[3] Bakhvalov, N.S., The optimization of methods of solving boundary value problems with a boundary layer, *USSR Computational Math. Math. Phys.*, 9(4) (1969), 841—859.

[4] Doolan, E. P., J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1980).

[5] Richards, Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962).

[6] Friedman, A., *Partial Differential Equation of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Inc. (1964).

# Difference Scheme for an Initial-Boundary Value Problem for Linear Coefficient-Varied Parabolic Differential Equation with a Nonsmooth Boundary Layer Function

Su Yu-cheng    Zhang You-yu

*(Nanjing University, Nanjing)*

**Abstract**

In this paper, using nonuniform mesh and exponentially fitted difference method, a uniformly convergent difference scheme for an initial-boundary value problem of linear parabolic differential equation with the nonsmooth boundary layer function with respect to small parameter $\varepsilon$ is given, and error estimate and numerical result are also given.

**Key words** nonsmooth boundary layer, characteristic boundary, nonuniform mesh, exponentially fitted, uniformly convergent difference scheme, parabolic differential equation