应用数学和力学，第 13 卷第 4 期（1992 年 4 月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

Reissner板切口尖端应力应变场

钱 俊　　龙驭球

（南京 华东工学院）　（北京 清华大学）

（1990年10月2日收到）

摘　要

本文利用双重幂级数展开法推导出 Reissner 板切口特征方程，进而应用 Muller 迭代法求得不同切口张角下特征值序列解答，最后获得 Reissner 板切口尖端应力应变场。

关键词　Reissner板　切口　应力应变场

一、前　言

在实际工程中，常常会遇到切口问题，如框支剪力墙、重力坝坝踵、坝趾区以及焊接板的角区，都是工程中常见的切口实例。由于切口尖端存在应力应变奇异性，容易发生局部破坏，进而危及整个结构的安全，因此分析各种类型切口尖端应力应变场分布规律，具有一定的理论意义和实际价值。

Williams[1]利用特征函数法首次建立了平面均质材料切口的特征方程，在此基础上，文献[2]～[4]研究了更为复杂的切口问题。

关于含裂纹平板弯曲问题，早期的研究[5][6]大多局限于采用 Kirchhoff 经典理论。用 Kirchhoff 经典理论分析平板断裂问题，在理论上是有一定缺陷的。由于它忽略了剪切应变的影响，从而导致Ⅱ型应力强度因子不独立，不能有效反映裂纹尖端应力应变奇异性。用考虑剪切变形的 Reissner 板理论代替经典板理论研究平板弯曲断裂问题，可以纠正经典理论带来的一些缺陷，从而更真实地反映裂纹尖端应力应变特性。这方面有代表性的是 J.K.Knowles[7]和柳春图[8]的工作。

关于带切口平板弯曲问题，迄今尚未见文用 Reissner 板理论推导切口尖端应力应变场。本文首次获得 Reissner 板切口尖端应力应变场表达式，得出了一些有用的结论，为进一步计算 Reissner 板切口应力强度因子提供了理论依据。

二、Reissner板切口特征方程及其解

1. 基本方程

考虑一带有切口的受弯平板，如图1所示。以三个广义位移ψ_r，ψ_θ，w表示的Reissner

板基本方程为：

$$\left.\begin{aligned}&D\left[\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial r}-\frac{\psi_r}{r^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r\partial\theta}\right.\\&\qquad\left.-\frac{3-\nu}{2}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\right]+C\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\psi_r\right)=0\\&D\left[\frac{1+\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r\partial\theta}+\frac{3-\nu}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial r}\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta^2}-\frac{1-\nu}{2}\frac{\psi_\theta}{r^2}\right]+C\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\psi_\theta\right)=0\\&C\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial r}+\frac{\psi_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}\right)\right]+P=0\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

式中：

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\quad\text{为抗弯刚度}$$

$$C=\frac{5}{6}Gh\quad\text{为抗剪刚度}$$

E为弹性模量，G为剪切模量，ν为泊松比，h为板厚，P外荷集度。

ψ_r,ψ_θ是变形前垂直于中面的直线段在变形后的转角，其中ψ_r是rz面内的转角，以从r轴转向z轴的方向为正；ψ_θ为θz平面内的转角，以从θ方向转向z轴的方向为正；w为挠度。

板的内力与位移关系为：

$$\left.\begin{aligned}&M_r=-D\left[\frac{\partial\psi_r}{\partial r}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}+\frac{\psi_r}{r}\right)\right],\ M_\theta=-D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta}+\frac{\psi_r}{r}+\nu\frac{\partial\psi_r}{\partial r}\right]\\&M_{r\theta}=-D\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}+\frac{\partial\psi_\theta}{\partial r}-\frac{\psi_\theta}{r}\right)\\&Q_r=C\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\psi_r\right),\ \ Q_\theta=C\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\psi_\theta\right)\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

切口边界条件为：

$$M_\theta=M_{r\theta}=Q_\theta=0\qquad\theta=\pm\alpha\tag{2.3}$$

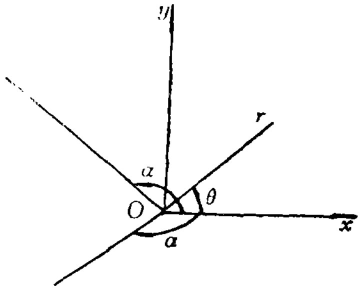

图 1

2. 特征展开与特征方程的导出

将ψ_r，ψ_θ，w展开成双重幂级数形式如下：

$$\left.\begin{aligned}\psi_r&=\sum_j\sum_n r^{\lambda_j+n}a_{nj}(\theta,\lambda)\\\psi_\theta&=\sum_j\sum_n r^{\lambda_j+n}b_{nj}(\theta,\lambda)\\w&=\sum_j\sum_n r^{\lambda_j+n}c_{nj}(\theta,\lambda)\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

将(2.4)代入(2.1)，按r同幂次项重新排列并令r同幂次项系数之和为零，得零阶方程为：

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda_j^2-1)a_{0j}+\frac{1-\nu}{2}a_{0j}^{(\theta\theta)}+\frac{1+\nu}{2}\lambda_j b_{0j}^{(\theta)}-\frac{3-\nu}{2}b_{0j}^{(\theta)}=0\\&\frac{1+\nu}{2}\lambda_j a_{0j}^{(\theta)}+\frac{3-\nu}{2}a_{0j}^{(\theta)}+\frac{1-\nu}{2}(\lambda_j^2-1)b_{0j}+b_{0j}^{(\theta\theta)}=0\\&c_{0j}^{(\theta\theta)}+\lambda_j^2c_{0j}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

求解上述微分方程组得：

$$\left.\begin{aligned}a_{0j}=&A_{0j}\cos(\lambda_j+1)\theta+B_{0j}\sin(\lambda_j+1)\theta+C_{0j}\cos(\lambda_j-1)\theta\\&+D_{0j}\sin(\lambda_j-1)\theta\\b_{0j}=&B_{0j}\cos(\lambda_j+1)\theta-A_{0j}\sin(\lambda_j+1)\theta\\&+K_{0j}D_{0j}\cos(\lambda_j-1)\theta-K_{0j}C_{0j}\sin(\lambda_j-1)\theta\\c_{0j}=&E_{0j}\cos\lambda_j\theta+F_{0j}\sin\lambda_j\theta\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

其中A_{0j}，B_{0j}，C_{0j}，D_{0j}，E_{0j}，F_{0j}为待定系数，λ_j将由特征方程确定，

$$K_{0j}=\frac{(1+\nu)\lambda_j+(3-\nu)}{(1+\nu)\lambda_j-(3-\nu)}.$$

将(2.4)代入(2.3)，并利用(2.2)得零阶边界条件为：

$$b_{0j}^{(\theta)}+(\lambda_j\nu+1)a_{0j}=0,\ a_{0j}^{(\theta)}+(\lambda_j-1)b_{0j}=0,\ c_{0j}^{(\theta)}=0\qquad\theta=\pm\alpha\tag{2.7}$$

将(2.6)代入(2.7)经过归并化简后得：

$$2\lambda_j(\nu-1)A_{0j}\cos(\lambda_j+1)\alpha+2[-K_{0j}(\lambda_j-1)+(1+\lambda_j\nu)]C_{0j}\cos(\lambda_j-1)\alpha=0\tag{2.8a}$$

$$2\lambda_jA_{0j}\sin(\lambda_j+1)\alpha+(\lambda_j-1)(K_{0j}+1)C_{0j}\sin(\lambda_j-1)\alpha=0\tag{2.8b}$$

$$2\lambda_j(\nu-1)B_{0j}\sin(\lambda_j+1)\alpha+2[-K_{0j}(\lambda_j-1)+(1+\lambda_j\nu)]D_{0j}\sin(\lambda_j-1)\alpha=0\tag{2.8c}$$

$$2\lambda_jB_{0j}\cos(\lambda_j+1)\alpha+(\lambda_j-1)(K_{0j}+1)D_{0j}\cos(\lambda_j-1)\alpha=0\tag{2.8d}$$

$$F_{0j}\cos\lambda_j\alpha=0\tag{2.8e}$$

$$E_{0j}\sin\lambda_j\alpha=0\tag{2.8f}$$

由(2.8a)、(2.8b)得使A_{0j}，C_{0j}不同时为零的λ_j满足：

$$\sin2\lambda_j\alpha+\lambda_j\sin2\alpha=0\tag{2.9a}$$

由(2.8c)、(2.8d)得使B_{0j}，D_{0j}不同时为零的λ_j满足：

$$\sin2\lambda_j\alpha-\lambda_j\sin2\alpha=0\tag{2.9b}$$

由(2.8e)得使F_{0j}不为零的λ_j满足：

$$\cos\lambda_j\alpha=0\tag{2.9c}$$

由(2.8f)得使E_{0j}不为零的λ_j满足：

$$\sin\lambda_j\alpha=0\tag{2.9d}$$

综合(2.9)各方程得使原问题有非零解的λ_j满足下述方程：

$$(\sin2\lambda_j\alpha+\lambda_j\sin2\alpha)(\sin2\lambda_j\alpha-\lambda_j\sin2\alpha)\cos\lambda_j\alpha\sin\lambda_j\alpha=0\tag{2.10}$$

此即为 Reissner 板切口的特征方程。

3. 特征方程解

Muller 迭代法是计算超越方程根的有效方法。本文将之应用于计算(2.10)的全部根，包括实根与复根，得出不同切口张角下特征值序列解答，列于表1。

随着切口内角的逐渐减小，最小特征值λ_1逐渐增大，表明切口尖端的奇异性逐渐减小。当切口内角趋于180°时，切口尖端奇异性消失。

三、Reissner板切口尖端应力应变场

为分析方便起见，将特征方程(2.10)的根分为两部分，一部分由{λ_1，λ_4，λ_5，λ_8，…}组成，代表对部称分；另一部分由{λ_2，λ_3，λ_6，λ_7,…}组成，代表反对称部分。下面分别推导对称部分和反对称部分的位移系数，进而推得切口尖端应力表达式。

表1　　　　**Reissner 板切口特征值变化表**

2α / λ_j	360°		350°		330°		300°		270°		240°	
λ_1	0.500000	0 0	0.500053	0.0	0.501453	0.0	0.512222	0.0	0.544484	0.0	0.615731	0.0
λ_2	0.500000	0.0	0.514286	0.0	0.545455	0.0	0.600000	0.0	0.666666	0.0	0.750000	0.0
λ_3	0.500000	0.0	0.529355	0.0	0.598192	0.0	0.730901	0.0	0.908529	0.0	1.148913	0.0
λ_4	1.000000	0.0	1.028571	0.0	1.090909	0.0	1.200000	0.0	1.333333	0.0	1.500000	0.0
λ_5	1.000000	0.0	1.058843	0.0	1.202157	0.0	1.471028	0.141853	1.629257	0.231251	1.833550	0.252260
λ_6	1.500000	0.0	1.542857	0.0	1.636364	0.0	1.800000	0.0	2.000000	0.0	2.250000	0.0
λ_7	2.500000	0.0	1.588609	0.0	1.838934	0.0	2.074826	0.229426	2.301328	0.315837	2.589479	0.348375
λ_8	2.000000	0.0	2.057143	0.0	2.181818	0.0	2.400000	0.0	2.666667	0.0	3.000000	0.0
λ_9	1.500000	0.0	1.499728	0.0	1.490378	0.0	2.567762	0.284901	2.971844	0.373931	3.343717	0.414037
λ_{10}	2.500000	0.0	2.571429	0.0	2.727273	0.0	3.000000	0.0	3.333333	0.0	3.750000	0.0
λ_{11}	2.000000	0.0	1.999107	0.0	1.948556	0.0	3.279767	0.326690	3.641420	0.418787	4.096928	0.464641
λ_{12}	3.000000	0.0	3.085714	0.0	3.272727	0.0	3.600000	0.0	4.000000	0.0	4.500000	0.0
λ_{13}	2.000000	0.0	2.118822	0.0	2.440492	0.114207						
λ_{14}	3.500000	0.0	3.600000	0.0	3.818132	0.0						
λ_{15}	2.500000	0.0	2.649696	0.0	2.987005	0.166741						
λ_{16}	4.000000	0.0	4.114286	0.0	4.363636	0.0						
λ_{17}	2.500000	0.0	2.497980	0.0								
λ_{18}	4.500000	0.0	4.628571	0.0								
λ_{19}	3.000000	0.0	2.996141	0.0								
λ_{20}	5.000000	0.0	5.142857	0.0								

Ⅰ. 对称情况下的位移系数

1. $n=0$

i) $j=1,5,9,\cdots$

此时λ_j满足(2.9a)式，由(2.8a)、(2.8b)可推得：

$$C_{0j}=m_{0j}\beta_j$$

其中

$$m_{0j}=-\frac{2\lambda_j\sin(\lambda_j+1)\alpha}{(\lambda_j-1)(1+K_{0j})\sin(\lambda_j-1)\alpha}$$

β_j代表A_{0j}。

而由(2.8c)、(2.8d)、(2.8e)、(2.8f)推得：

$$B_{0j}=D_{0j}=E_{0j}=F_{0j}=0$$

于是由(2.6)得：

$$\left.\begin{aligned}a_{0j}&=[\cos(\lambda_j+1)\theta+m_{0j}\cos(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\\b_{0j}&=-[\sin(\lambda_j+1)\theta+K_{0j}m_{0j}\sin(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\\c_{0j}&=0\end{aligned}\right\}\tag{3.1a}$$

ii) $j=4,8,12,\cdots$

此时λ_j仅满足(2.9d)，于是由(2.8)推得：

$E_{0j}\neq0$，且$A_{0j}=B_{0j}=C_{0j}=D_{0j}=F_{0j}=0$

由(2.6)得：

$$a_{0j}=0,\quad b_{0j}=0,\quad c_{0j}=\beta_j\cos\lambda_j\theta\tag{3.1b}$$

其中β_j代表E_{0j}.

2. $n=1$

由(2.4)知此时有：

$$\psi_r=r^{\lambda_j+1}a_{1j},\quad \psi_\theta=r^{\lambda_j+1}b_{1j},\quad w=r^{\lambda_j+1}c_{1j}\tag{3.2}$$

i) $j=1,5,9,\cdots$

将(3.2)代入(2.1)，并利用(3.1a)可解得：

$$\left.\begin{aligned}a_{1j}&=A_{1j}\cos(\lambda_j+2)\theta+B_{1j}\sin(\lambda_j+2)\theta+C_{1j}\cos\lambda_j\theta+D_{1j}\sin\lambda_j\theta\\b_{1j}&=B_{1j}\cos(\lambda_j+2)\theta-A_{1j}\sin(\lambda_j+2)\theta+K_{1j}D_{1j}\cos\lambda_j\theta-K_{1j}C_{1j}\sin\lambda_j\theta\\c_{1j}&=E_{1j}\cos(\lambda_j+1)\theta+F_{1j}\sin(\lambda_j+1)\theta+\frac{\lambda_j+1-K_{0j}(\lambda_j-1)}{4\lambda_j}\beta_j\cos(\lambda_j-1)\theta\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

其中：

$$K_{1j}=\frac{(1+\nu)(1+\lambda_j)+(3-\nu)}{(1+\nu)(1+\lambda_j)-(3-\nu)}$$

将(3.2)代入(2.3)并利用(3.1a)得相应的边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}&b_{1j}^{(\theta)}+a_{1j}+\nu(\lambda_j+1)a_{1j}=0\\&a_{1j}^{(\theta)}+\lambda_jb_{1j}=0\\&c_{1j}^{(\theta)}+[\sin(\lambda_j+1)\theta+K_{0j}m_{0j}\sin(\lambda_j-1)\theta]\beta_j=0\end{aligned}\right\}\quad\theta=\pm\alpha\tag{3.4}$$

将(3.3)代入(3.4)最后解得：

$A_{1j}=B_{1j}=C_{1j}=D_{1j}=F_{1j}=0$，$E_{1j}=f_{1j}\beta_j$

其中：

$$f_{1j}=-\frac{\lambda_j+1-K_{0j}(\lambda_j-1)}{4\lambda_j(\lambda_j+1)}(\lambda_j-1)\frac{\sin(\lambda_j-1)\alpha}{\sin(\lambda_j+1)\alpha}+\frac{1}{\lambda_j+1}\frac{\sin(\lambda_j+1)\alpha+K_{0j}m_{0j}\sin(\lambda_j-1)\alpha}{\sin(\lambda_j+1)\alpha}$$

由(3.3)得：

$$a_{1j}=0,\quad b_{1j}=0,\quad c_{1j}=[f_{1j}\cos(\lambda_j+1)\theta+g_{1j}\cos(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\tag{3.5a}$$

其中

$$g_{1j}=[\lambda_j+1+K_{0j}(\lambda_j-1)]/4\lambda_j$$

ii) 当$j=4,8,12,\cdots$

将(3.2)代入(2.1)，并利用(3.1b)可解得：

$$\left.\begin{aligned}a_{1j}&=A_{1j}\cos(\lambda_j+2)\theta+B_{1j}\sin(\lambda_j+2)\theta+C_{1j}\cos\lambda_j\theta\\&\quad+D_{1j}\sin\lambda_j\theta-\frac{C}{D[\lambda_j(1+\nu)/2+2]}\beta_j\cos\lambda_j\theta\\b_{1j}&=B_{1j}\cos(\lambda_j+2)\theta-A_{1j}\sin(\lambda_j+2)\theta+K_{1j}D_{1j}\cos\lambda_j\theta-K_{1j}C_{1j}\sin\lambda_j\theta\\c_{1j}&=E_{1j}\cos(\lambda_j+1)\theta+F_{1j}\sin(\lambda_j+1)\theta\end{aligned}\right\}\quad(3.6)$$

将(3.2)代入(2.3)并利用(3.1b)得相应的边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}&b_{1j}^{(\theta)}+a_{1j}+\nu(\lambda_j+1)a_{1j}=0\\&a_{1j}^{(\theta)}+\lambda_j b_{1j}=0,\ c_{1j}^{(\theta)}=0\end{aligned}\right\}\quad\theta=\pm\alpha\quad(3.7)$$

将(3.6)代入(3.7)最后解得：

$$B_{1j}=D_{1j}=F_{1j}=E_{1j}=0$$

$$A_{1j}=\frac{c_1a_{22}-c_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\beta_j=l_{1j}\beta_j,\quad C_{1j}=\frac{c_2a_{11}-c_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\beta_j=\nu_{1j}\beta_j$$

其中：

$$a_{11}=2(\lambda_j+1)(\nu-1)\cos(\lambda_j+1)\alpha,\quad a_{12}=2[-K_{1j}\lambda_j+1+\nu(\lambda_j+1)]\cos\lambda_j\alpha$$

$$a_{21}=2(\lambda_j+1)\sin(\lambda_j+2)\alpha,\quad a_{22}=\lambda_j(1+K_{1j})\sin\lambda_j\alpha$$

$$c_1=\frac{2C[1+\nu(\lambda_j+1)]}{D((1+\nu)\lambda_j/2+2)}\cos\lambda_j\alpha,\quad c_2=\frac{C}{D((1+\nu)\lambda_j/2+2)}\lambda_j\sin\lambda_j\alpha$$

最后由(3.6)得：

$$a_{1j}=[\alpha_{1j}\cos\lambda_j\theta+l_{1j}\cos(\lambda_j+2)\theta]\beta_j$$
$$b_{1j}=-[K_{1j}\nu_{1j}\sin\lambda_j\theta+l_{1j}\sin(\lambda_j+2)\theta]\beta_j$$
$$c_{1j}=0$$

其中

$$\alpha_{1j}=\nu_{1j}-\frac{C}{D(\lambda_j(1+\nu)/2+2)}$$

Ⅱ. 反对称情况下的位移系数

与Ⅰ类似，可推出反对称情况下的位移系数表达式，具体推导过程从略，这里仅列出其最终结果。

1. $n=0$

i) $j=2,6,10,\cdots$

$$a_{0j}=0,\quad b_{0j}=0,\quad c_{0j}=\beta_j\sin\lambda_j\theta\quad(3.6a)$$

ii) $j=3,7,11,\cdots$

$$\left.\begin{aligned}a_{0j}&=[\sin(\lambda_j+1)\theta+m'_{0j}\sin(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\\b_{0j}&=[\cos(\lambda_j+1)\theta+K_{0j}m'_{0j}\cos(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\\c_{0j}&=0\end{aligned}\right\}\quad(3.6b)$$

其中

$$m'_{0j}=-\frac{2\lambda_j\cos(\lambda_j+1)\alpha}{(\lambda_j-1)(1+K_{0j})\cos(\lambda_j-1)\alpha}$$

2. $n=1$

i) $j=2,\ 6,\ 10,\cdots$

$$\left.\begin{aligned}&a_{1j}=[\alpha'_{1j}\sin\lambda_j\theta+l'_{1j}\sin(\lambda_j+2)\theta]\beta_j\\&b_{1j}=[l'_{1j}\cos(\lambda_j+2)\theta+K_{1j}\nu'_{1j}\cos\lambda_j\theta]\beta_j\\&c_{1j}=0\end{aligned}\right\}\qquad(3.7a)$$

其中：

$$l'_{1j}=\frac{c'_1a'_{22}-c'_2a'_{12}}{a'_{11}a'_{22}-a'_{12}a'_{21}},\quad \nu'_{1j}=\frac{c'_2a'_{11}-c'_1a'_{21}}{a'_{11}a'_{22}-a'_{12}a'_{21}}$$

$$a'_{11}=2(\lambda_j+1)(\nu-1)\sin(\lambda_j+2)\alpha$$

$$a'_{12}=2[-K_{1j}\lambda_j+1+\nu(\lambda_j+1)]\sin\lambda_j\alpha$$

$$a'_{21}=2(\lambda_j+1)\cos(\lambda_j+2)\alpha,\ a'_{22}=\lambda_j(1+K_{1j})\cos\lambda_j\alpha$$

$$c'_1=\frac{2[1+\nu(\lambda_j+1)]C}{D\left(\frac{1+\nu}{2}\lambda_j+2\right)}\sin\lambda_j\alpha,\ c'_2=\frac{C}{D\left(\frac{1+\nu}{2}\lambda_j+2\right)}\lambda_j\cos\lambda_j\alpha$$

$$\alpha'_{1j}=\nu'_{1j}-\frac{C}{D(\lambda_j(1+\nu)/2+2)}$$

ii) $j=3,7,11,\cdots$

$$a_{1j}=0,\ b_{1j}=0,\ c_{1j}=[f'_{1j}\sin(\lambda_j+1)\theta+g'_{1j}\sin(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\qquad(3.7b)$$

其中：

$$f'_{1j}=-\frac{\lambda_j+1-K_{0j}(\lambda_j-1)}{4\lambda_j(\lambda_j+1)}(\lambda_j-1)m'_{0j}\frac{\cos(\lambda_j-1)\alpha}{\cos(\lambda_j+1)\alpha}$$

$$+\frac{\cos(\lambda_j+1)\alpha+K_{0j}m'_{0j}\cos(\lambda_j-1)\alpha}{(\lambda_j+1)\cos(\lambda_j+1)\alpha}$$

$$g'_{1j}=m'_{1j}[\lambda_j+1-K_{0j}(\lambda_j-1)]/4\lambda_j$$

利用应力位移关系(2.2)，便可导出各阶应力分量表达式如下。

Ⅲ. 对称情况下的应力场

1. $n=0$

i) $j=1,5,9,\cdots$

$$\left.\begin{aligned}M_r=&-Dr^{\lambda_j-1}\{(1-\nu)\lambda_j\cos(\lambda_j+1)\theta+m_{0j}[(\lambda_j+\nu)\\&-K_{0j}\nu(\lambda_j-1)]\cos(\lambda_j-1)\theta\}\beta_j\\M_\theta=&-Dr^{\lambda_j-1}\{(\nu-1)\lambda_j\cos(\lambda_j+1)\theta\\&+m_{0j}[1+\lambda_j\nu-K_{0j}(\lambda_j-1)]\cos(\lambda_j-1)\theta\}\beta_j\\M_{r\theta}=&\frac{D(1-\nu)}{2}r^{\lambda_j-1}[2\lambda_j\sin(\lambda_j+1)\theta\\&+(\lambda_j-1)(1+K_{0j})m_{0j}\sin(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\\Q_r=&-Cr^{\lambda_j}[\cos(\lambda_j+1)\theta+m_{0j}\cos(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\\Q_\theta=&Cr^{\lambda_j}[\sin(\lambda_j+1)\theta+K_{0j}m_{0j}\sin(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\end{aligned}\right\}\qquad(3.8a)$$

ii) $j=4,8,12,\cdots$

$$\left.\begin{aligned}&M_r=0,\ M_\theta=0,\ M_{r\theta}=0\\&Q_r=Cr^{\lambda_j-1}(\lambda_j\cos\lambda_j\theta)\beta_j,\ Q_\theta=Cr^{\lambda_j-1}(-\lambda_j\sin\lambda_j\theta)\beta_j\end{aligned}\right\}\tag{3.8b}$$

2. $n=1$

i) $j=1,5,9,\cdots$

$$\left.\begin{aligned}&M_r=0,\ M_\theta=0,\ M_{r\theta}=0\\&Q_r=Cr^{\lambda_j}(\lambda_j+1)[f_{1j}\cos(\lambda_j+1)\theta+g_{1j}\cos(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\\&Q_\theta=Cr^{\lambda_j}[-(\lambda_j+1)f_{1j}\sin(\lambda_j+1)\theta-(\lambda_j-1)g_{1j}\sin(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\end{aligned}\right\}\tag{3.9a}$$

ii) $j=4,8,12,\cdots$

$$\left.\begin{aligned}M_r=&-Dr^{\lambda_j}\{[\alpha_{1j}(\lambda_j+1+\nu)-K_{1j}\nu_{1j}\nu\lambda_j]\cos\lambda_j\theta+[l_{1j}(\lambda_j+1+\nu)\\&-\nu l_{1j}(\lambda_j+2)]\cos(\lambda_j+2)\theta\}\beta_j\\M_\theta=&-Dr^{\lambda_j}\{[\alpha_{1j}(\lambda_j\nu+\nu+1)-K_{1j}\nu_{1j}\lambda_j]\cos\lambda_j\theta\\&+[l_{1j}(\lambda_j\nu+\nu+1)-l_{1j}(\lambda_j+2)]\cos(\lambda_j+2)\theta\}\beta_j\\M_{r\theta}=&\frac{D(1-\nu)}{2}r^{\lambda_j}[\lambda_j(\alpha_{1j}+K_{1j}\nu_{1j})\sin\lambda_j\theta+2(\lambda_j+1)l_{1j}\sin(\lambda_j+2)\theta]\beta_j\\Q_r=&-Cr^{\lambda_j+1}[\alpha_{1j}\cos\lambda_j\theta+l_{1j}\cos(\lambda_j+2)\theta]\beta_j\\Q_\theta=&Cr^{\lambda_j+1}[K_{1j}\nu_{1j}\sin\lambda_j\theta+l_{1j}\sin(\lambda_j+2)\theta]\beta_j\end{aligned}\right\}\tag{3.9b}$$

Ⅳ. 反对称情况下的应力场

1. $n=0$

i) $j=2,6,10,\cdots$

$$\left.\begin{aligned}&M_r=0,\ M_\theta=0,\ M_{r\theta}=0\\&Q_r=C\lambda_jr^{\lambda_j-1}\beta_j\sin\lambda_j\theta,\ Q_\theta=C\lambda_jr^{\lambda_j-1}\beta_j\cos\lambda_j\theta\end{aligned}\right\}\tag{3.10a}$$

ii) $j=3,7,11,\cdots$

$$\left.\begin{aligned}M_r=&-Dr^{\lambda_j-1}\{(1-\nu)\lambda_j\sin(\lambda_j+1)\theta+m'_{0j}[(\lambda_j+\nu)\\&-K_{0j}\nu(\lambda_j-1)]\sin(\lambda_j-1)\theta\}\beta_j\\M_\theta=&-Dr^{\lambda_j-1}\{(\nu-1)\lambda_j\sin(\lambda_j+1)\theta\\&+m'_{0j}[1+\lambda_j\nu-K_{0j}(\lambda_j-1)]\sin(\lambda_j-1)\theta\}\beta_j\\M_{r\theta}=&-\frac{D(1-\nu)}{2}r^{\lambda_j-1}\{2\lambda_j\cos(\lambda_j+1)\theta\\&+m'_{0j}(\lambda_j-1)(1+K_{0j})\cos(\lambda_j-1)\theta\}\beta_j\\Q_r=&-Cr^{\lambda_j}[\sin(\lambda_j+1)\theta+m'_{0j}\sin(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\\Q_\theta=&-Cr^{\lambda_j}[\cos(\lambda_j+1)\theta+m'_{0j}K_{0j}\cos(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\end{aligned}\right\}\tag{3.10b}$$

2. $n=1$

i) $j=2,6,10,\cdots$

$$\left.\begin{aligned}
M_r&=-Dr^{\lambda_j}\{[\alpha'_{1j}(\lambda_j+1+\nu)-K_{1j}\nu'_{1j}\nu\lambda_j]\sin\lambda_j\theta\\
&\quad+[l'_{1j}(\lambda_j+1+\nu)-\nu l'_{1j}(\lambda_j+2)]\sin(\lambda_j+2)\theta\}\beta_j\\
M_\theta&=-Dr^{\lambda_j}\{[\alpha'_{1j}(\lambda_j\nu+\nu+1)-K_{1j}\nu'_{1j}\lambda_j]\sin\lambda_j\theta\\
&\quad+[l'_{1j}(\lambda_j\nu+\nu+1)-l'_{1j}(\lambda_j+2)]\sin(\lambda_j+2)\theta\}\beta_j\\
M_{r\theta}&=-\frac{D(1-\nu)}{2}r^{\lambda_j}\{[\alpha'_{1j}\lambda_j+\lambda_jK_{1j}\nu'_{1j}]\cos\lambda_j\theta\\
&\quad+2l'_{1j}(\lambda_j+1)\cos(\lambda_j+2)\theta\}\beta_j\\
Q_r&=-Cr^{\lambda_j+1}[\alpha'_{1j}\sin\lambda_j\theta+l'_{1j}\sin(\lambda_j+2)\theta]\beta_j\\
Q_\theta&=-Cr^{\lambda_j+1}[l'_{1j}\cos(\lambda_j+2)\theta+K_{1j}\nu'_{1j}\cos\lambda_j\theta]\beta_j
\end{aligned}\right\}\tag{3.11a}$$

ii)　$j=3,7,11,\cdots$

$$\left.\begin{aligned}
&M_r=0,\ M_\theta=0,\ M_{r\theta}=0\\
&Q_r=C(\lambda_j+1)r^{\lambda_j}[f'_{1j}\sin(\lambda_j+1)\theta+g'_{1j}\sin(\lambda_j-1)\theta]\beta_j\\
&Q_\theta=Cr^{\lambda_j}[(\lambda_j+1)f'_{1j}\cos(\lambda_j+1)\theta+(\lambda_j-1)g'_{1j}\cos(\lambda_j-1)\theta]\beta_j
\end{aligned}\right\}\tag{3.11b}$$

仿照上述步骤，还可推出更高阶的应力应变场结果，由于篇幅所限，不再一一列出。

利用表1，在$\alpha=\pi$时，将相应的λ_j代入上述应力应变场统一表达式中，稍作变动，不难推出 Reissner 板裂纹尖端应力应变场，结果与文献[8]相同。

从上面推出的切口尖端应力表达式可以看出，一般情况下，切口尖端附近剪应力τ_{rz}，$\tau_{\theta z}$的奇异性与σ_r，σ_θ，$\sigma_{r\theta}$是不同阶的，前者为r^{λ_2-1}，后者为r^{λ_1-1}. 仅当切口张角为零时，才有$\lambda_1=\lambda_2=0.5$，此时τ_{rz}，$\tau_{\theta z}$的奇异性与σ_r，σ_θ，$\sigma_{r\theta}$的奇异性同阶，与文[7]结论一致。

四、结　论

本文推导了 Reissner 板切口尖端应力应变场，得出了一些有用的结论。利用有关解答，可以在切口尖端构造奇异元，计算 Reissner 板切口应力强度因子。进一步地还可分析 Reissner 复合材料板切口性状。

参 考 文 献

[1] Williams, M. L., Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *J. Appl. Mech.*, **14** (1952), 526—528.

[2] Bogy, D. B., Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions, *J. Appl. Mech.*, **38** (1971), 377—386.

[3] Ting, T. C. and Jin Yi-jian, Eigen-functions at a singular point in transversely isotropic materials under axisymmetric deformations, *J. Appl. Mech.*, **52** (1985), 565—570.

[4] Somaratna, Nihal and T. C. T. Ting, Three-dimensional stress singularites at conical notches and inclusions in transversely isotropic materials, *J. Appl. Mech.*, **53** (1986), 89—96.

[5] Williams, M. L., Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending, *J. Appl. Mech.*, **28** (1961), 325—328.

[6] Sih, G. C., P. C. Paris and F. Erdogan, Crack tip stress intensity factors for plane extension and plate bending problems, *J. Appl. Mech.*, **29** (1962), 306—312.
[7] Knowles, J. K. and N. M. Wang, On the bending of an elastic plate containing a crack, *J. of Math. and Phy.*, 39 (1960), 223—236.
[8] 柳春图，承受弯曲的板在裂纹顶端附近的应力和变形，固体力学学报，(3) (1983), 441—447.

The Expression of Stress and Strain at the Tip of Notch in Reissner Plate

Qian Jun

(East China Institute of Technology, Nanjing)

Long Yu-qiu

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

In this paper, the eigenequation of notch in Reissner plate is derived by the eigenfunction method. Eigenvalues of different notches with different angles are calculated by Muller iteration method. The expression of stress and strain at the tip of notch in Reissner plate is obtained.

Key words Reissner plate, notch, fields of stress and strain