应用数学和力学，第13卷第4期(1992年4月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一族Liouville可积的有限维Hamilton系统*

马 文 秀

（上海 复旦大学数学研究所，1990年1月31日收到）

摘 要

本文生成了一族Liouville可积的Hamilton相流彼此可交换的有限维Hamilton系统，并且给出了一串对合的显式公共运动积分及其一组对合的显式生成元。

关键词 对合系 运动积分 生成子 Hamilton系统 可积性

一、引言与一个可积系统的导出

我们知道：许多力学运动方程可以表示成一种定义在辛流形(P, w)上的Hamilton系统[1,2]。当P取有限维和无限维流形时，相应的Hamilton系统正好对应于经典力学系统情形和发展方程情形[3]。

设D为$\boldsymbol{R}^{2N}$的一个开区域，譬如$D=\boldsymbol{R}^{2N}$。当$P=D$时，选取正则坐标系$(p, q)=(p_1,\cdots,p_N, q_1,\cdots,q_N)$，

令
$$w=dp\wedge dq=\sum_{i=1}^{N}dp_i\wedge dq_i$$

则由Hamilton函数H生成的Hamilton系统可写成[4,5]

$$p_t=-\frac{\partial H}{\partial q},\quad q_t=\frac{\partial H}{\partial p},\quad p=(p_1,p_2,\cdots,p_N)^T,\quad q=(q_1,q_2,\cdots,q_N)^T \tag{1.1}$$

同时一个函数H定义了一个Hamilton向量场

$$\vartheta_H=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \tag{1.2}$$

而二个函数F，H的Poisson括弧为

$$\{F,\ H\}=w(\vartheta_H,\ \vartheta_F)=\vartheta_H F=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right) \tag{1.3}$$

一个函数集$\{F_i|i\in I\}$（I是一个任意的指标集）如果满足$\{F_j,\ F_k\}=0$，$\forall j,k\in I$，则被称为

* 钱伟长推荐.

1989年6月30日第一次收到.

是对合的函数集.

定义1[4,6] 对定义在流形$P=D$上的Hamilton系统(1.1)，如果存在N个运动积分F_1, $F_2,\cdots,F_N$在P上满足

(i) $\{H, F_i\}=0$, $i=1,2,\cdots,N$;

(ii) $\{F_j, F_k\}=0$, j, $k=1,2,\cdots,N$;

(iii) N个1-形式dF_1, dF_2, $\cdots$, dF_N线性无关;

则被称为是Liouville可积的.

利用Lax的等谱技巧，可以推演出一大类Liouville可积的经典系统[7,8]，包括著名的周期 Toda 格和Calogero-Moser N 体系统. 最近，曹策问提出了 Lax 系统的非线化思想[9]，在此基础上发展起来的非线化方法也可生成许多经典 Liouville 可积系统[10,11]；屠规彰发现了无限维可积Hamilton系统所相应的驻定方程可以变换成一个有限维的 Liouville可积系统[12]. 本文我们按文[13]中的方法产生了一族 Liouville 可积的有限维 Hamilton系统.

设$A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_N)$，其中$a_1,a_2,\cdots,a_N$是$N$个两两不同的实常数，$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$表示$\boldsymbol{R}^N$的标准内积. 我们考虑具有如下Hamilton函数H的Hamilton系统(1.1)：

$$H=\frac{1}{2}\langle p,\ p\rangle+\frac{1}{2}\langle A^4q,\ q\rangle+\frac{1}{2}f(\langle q,q\rangle,\ \langle Aq,q\rangle,\ \langle A^2q,q\rangle,\ \langle A^3q,q\rangle) \tag{1.4}$$

这里$f=f(y_0,y_1,y_2,y_3)$是一个y_0,y_1,y_2,y_3的四元待定多项式. 此时(1.1)成为

$$p_t=-\left(A^4q+\sum_{i=0}^{3}\frac{\partial f}{\partial y_i}A^iq\right),\quad q_t=p \tag{1.5}$$

其中 $$\frac{\partial f}{\partial y_i}=\frac{\partial f}{\partial y_i}(\langle q,q\rangle,\ \langle Aq,q\rangle,\ \langle A^2q,q\rangle,\ \langle A^3q,q\rangle)\qquad (i=0,1,2,3)$$

令 $$B_{m+1}=\frac{1}{4}\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geq 0}}\begin{vmatrix}\langle A^ip,p\rangle & \langle A^ip,q\rangle\\ \langle A^jq,p\rangle & \langle A^jq,q\rangle\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\langle A^{m+1}p,p\rangle\qquad (m\geq -1) \tag{1.6}$$

(注意当$m=-1$时；上式中第一项的和式无意义，这里我们假定$B_0=\langle p,p\rangle/2$)

设$m\geq 0$，(p,q)满足Hamilton系统(1.5). 我们按文[13]中的途径考虑B_{m+1}关于时间变量t的演化规律，即适当选取f，我们希望能得到与B_{m+1}演化规律一致的另一函数$-C_{m+1}$，这样就可得出系统(1.5)的运动积分$B_{m+1}+C_{m+1}$. 依次选取

$$\frac{\partial f}{\partial y_3}=-\langle q,q\rangle \tag{1.7a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2}=\frac{3}{4}\langle q,q\rangle^2-\langle Aq,q\rangle \tag{1.7b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}=-\frac{1}{2}\langle q,q\rangle^3+\frac{3}{2}\langle q,q\rangle\langle Aq,q\rangle-\langle A^2q,q\rangle \tag{1.7c}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_0}=\frac{5}{16}\langle q,q\rangle^4-\frac{3}{2}\langle q,q\rangle^2\langle Aq,q\rangle+\frac{3}{4}\langle Aq,q\rangle^2+\frac{3}{2}\langle q,q\rangle\langle A^2q,q\rangle-\langle A^3q,q\rangle \tag{1.7d}$$

则dB_{m+1}/dt的确是另一函数关于时间t的全导数，即$dB_{m+1}/dt=-dC_{m+1}/dt$，这里$\{C_m\}_{m=-1}^{\infty}$是按下式定义的

$$C_{m+1}=\sum_{i=0}^{4}f_i\langle A^{m+5-i}q,q\rangle,\qquad m\geqslant -1 \tag{1.8a}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&f_0=f_0(q)=1/2,\ f_1=f_1(q)=-\langle q,q\rangle/4\\
&f_2=f_2(q)=\langle q,q\rangle^2/8-\langle Aq,q\rangle/4\\
&f_3=f_3(q)=-\frac{1}{16}\langle q,q\rangle^3+\frac{1}{4}\langle q,q\rangle\langle Aq,q\rangle-\frac{1}{4}\langle A^2q,q\rangle\\
&f_4=f_4(q)=\frac{1}{32}\langle q,q\rangle^4-\frac{3}{16}\langle q,q\rangle^2\langle Aq,q\rangle+\frac{1}{8}\langle Aq,q\rangle^2\\
&\qquad+\frac{1}{4}\langle q,q\rangle\langle A^2q,q\rangle-\frac{1}{4}\langle A^3q,q\rangle
\end{aligned}\right\} \tag{1.8b}$$

特别地，

$$C_0=\frac{1}{32}\langle q,q\rangle^5-\frac{1}{4}\langle q,q\rangle^3\langle Aq,q\rangle+\frac{3}{8}\langle q,q\rangle\langle Aq,q\rangle^2+\frac{3}{8}\langle q,q\rangle^2\langle A^2q,q\rangle$$
$$-\frac{1}{2}\langle Aq,q\rangle\langle A^2q,q\rangle-\frac{1}{2}\langle q,q\rangle\langle A^3q,q\rangle+\frac{1}{2}\langle A^4q,q\rangle$$

当(1.4)的Hamilton函数$H=B_0+C_0$时，我们有

$$f(y_0,y_1,y_2,y_3)=\frac{1}{16}y_0^5-\frac{1}{2}y_0^3y_1+\frac{3}{4}y_0y_1^2+\frac{3}{4}y_0^2y_2-y_0y_3-y_1y_2 \tag{1.9}$$

此时f满足(1.7)，于是上面的推导表明了下列结果：

命题1 当f由(1.9)确定时，$\{B_m+C_m\}_{m=0}^{\infty}$是系统(1.5)的一串运动积分. #

在第二节中我们将证明当f由(1.9)确定时，系统(1.5)是Liouville可积的.

附注1 Hamilton系统(1.5)在理论上即是具有势函数

$$U=\frac{1}{2}\langle A^4q,q\rangle+\frac{1}{2}f(\langle q,q\rangle,\ \langle Aq,q\rangle,\ \langle A^2q,q\rangle,\ \langle A^3q,q\rangle)$$

的N个自由度q_1，q_2，…，q_N的保守经典系统$q_{tt}=-\partial U/\partial q$，但其真实的物理模型怎样还尚未确知.

二、一个可积的Hamilton系统族

我们设

$$h_m=B_m+C_m,\qquad m\geqslant 0 \tag{2.1}$$

这里B_m，C_m分别由(1.6)，(1.8)确定. 显然$\{h_m\}_{m=0}^{\infty}$是p，q的多元多项式族. 一个重要的事实由下面定理1给出，为此先证一个引理.

引理1 设

$$D_m=\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}(\langle A^iq,q\rangle A^jp-\langle A^ip,q\rangle A^jq),\qquad m\geqslant 0 \tag{2.2}$$

则我们有

(i) $\langle D_m,\ q\rangle=0,\ m\geqslant 0$

$$\langle D_m, A^k q\rangle=\sum_{i=0}^{k-1}(\langle A^i q,q\rangle\langle A^{m+k-i}p,q\rangle-\langle A^i p,q\rangle\langle A^{m+k-i}q,q\rangle),$$

$$k\geqslant 1,\ m\geqslant 0$$

(ii) $\langle D_m,\ A^{n+1}q\rangle-\langle D_n,\ A^{m+1}q\rangle=0,\quad m,\ n\geqslant 0$

$$\langle D_m, A^{n+k+1}q\rangle-\langle D_n, A^{m+k+1}q\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{k}(\langle A^{m+i}p,q\rangle\langle A^{n+k-i+1}q,q\rangle-\langle A^{m+i}q,q\rangle\langle A^{n+k-i+1}p,q\rangle),$$

$$k\geqslant 1,\ m,n\geqslant 0$$

证明 (i) 显然有$\langle D_m,\ q\rangle=0,\ m\geqslant 0$，设$k\geqslant 1,\ m\geqslant 0$.

$$\langle D_m,\ A^k q\rangle=\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}(\langle A^i q,q\rangle\langle A^{j+k}p,q\rangle-\langle A^i p,q\rangle\langle A^{j+k}q,q\rangle)$$

$$=\sum_{\substack{i+j=m+k\\ i,j\geqslant 0}}(\langle A^i q,q\rangle\langle A^j p,q\rangle-\langle A^i p,q\rangle\langle A^j q,q\rangle)$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1}(\langle A^{m+k-i}q,q\rangle\langle A^i p,q\rangle-\langle A^{m+k-i}p,q\rangle\langle A^i q,q\rangle)$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}(\langle A^i q,q\rangle\langle A^{m+k-i}p,q\rangle-\langle A^i p,q\rangle\langle A^{m+k-i}q,q\rangle)$$

(ii) 设$m\geqslant 0,\ n\geqslant 0$.

$$\langle D_m,\ A^{n+1}q\rangle-\langle D_n,\ A^{m+1}q\rangle$$

$$=\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}(\langle A^i q,q\rangle\langle A^{n+j+1}p,q\rangle-\langle A^i p,q\rangle\langle A^{n+j+1}q,q\rangle)$$

$$-\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geqslant 0}}(\langle A^i q,q\rangle\langle A^{m+j+1}p,q\rangle-\langle A^i p,q\rangle\langle A^{m+j+1}q,q\rangle)$$

$$=\left(\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}\langle A^i q,q\rangle\langle A^{n+j+1}p,q\rangle+\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geqslant 0}}\langle A^i p,q\rangle\langle A^{m+j+1}q,q\rangle\right)$$

$$-\left(\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}\langle A^i p,q\rangle\langle A^{n+j+1}q,q\rangle+\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geqslant 0}}\langle A^i q,q\rangle\langle A^{m+j+1}p,q\rangle\right)$$

$$=\sum_{\substack{i+j=m+n+1\\ i,j\geqslant 0}}\langle A^i q,q\rangle\langle A^j p,q\rangle-\sum_{\substack{i+j=m+n+1\\ i,j\geqslant 0}}\langle A^i p,q\rangle\langle A^j q,q\rangle=0$$

再设$k\geqslant 1$，$m,n\geqslant 0$。

$$
\begin{aligned}
&\langle D_m,\ A^{n+k+1}q\rangle-\langle D_n,\ A^{m+k+1}q\rangle\\
&=\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}(\langle A^iq,q\rangle\langle A^{n+k+j+1}p,q\rangle-\langle A^ip,q\rangle\langle A^{n+k+j+1}q,q\rangle)\\
&\quad-\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geqslant 0}}(\langle A^iq,q\rangle\langle A^{m+k+j+1}p,q\rangle-\langle A^ip,q\rangle\langle A^{m+k+j+1}q,q\rangle)\\
&=\left(\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}\langle A^iq,q\rangle\langle A^{n+k+j+1}p,q\rangle+\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geqslant 0}}\langle A^ip,q\rangle\langle A^{m+k+j+1}q,q\rangle\right)\\
&\quad-\left(\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}\langle A^ip,q\rangle\langle A^{n+k+j+1}q,q\rangle+\sum_{\substack{i+j=n\\ i,j\geqslant 0}}\langle A^iq,q\rangle\langle A^{m+k+j+1}p,q\rangle\right)\\
&=-\sum_{i=1}^{k}\langle A^{m+i}q,q\rangle\langle A^{n+k-i+1}p,q\rangle+\sum_{i=1}^{k}\langle A^{m+i}p,q\rangle\langle A^{n+k-i+1}q,q\rangle \qquad \#
\end{aligned}
$$

定理1 多项式函数族$\{h_m=h_m(p,q)\}_{m=0}^{\infty}$是一个对合系，即

$$\{h_m,\ h_n\}=w(\vartheta_{h_n},\ \vartheta_{h_m})=\langle\frac{\partial h_m}{\partial q},\ \frac{\partial h_n}{\partial p}\rangle-\langle\frac{\partial h_m}{\partial p},\ \frac{\partial h_n}{\partial q}\rangle=0,\qquad m,n\geqslant 0$$

证明 由上节末命题1知$\{h_m,\ h_0\}=dh_m/dt=0$，$m\geqslant 0$。下面着手证明$\{h_{m+1},\ h_{n+1}\}=0$，$m,n\geqslant 0$。

因为$B_m=(1/4)F_m(2,0,0)$，$m\geqslant 0$，

（注意对任意三个实常数a,b,c，由下式确定的函数系$\{F_m(a,b,c)\}_{m=0}^{\infty}$都是对合系，见[14]）

$$
\begin{aligned}
&F_0(a,b,c)=a\langle p,p\rangle+2b\langle p,q\rangle+c\langle q,q\rangle\\
&F_m(a,b,c)=a\langle A^mp,p\rangle+2b\langle A^mp,q\rangle+c\langle A^mq,q\rangle\\
&\qquad+\sum_{\substack{i+j=m-1\\ i,j\geqslant 0}}\begin{vmatrix}\langle A^ip,p\rangle & \langle A^ip,q\rangle\\ \langle A^jq,p\rangle & \langle A^jq,q\rangle\end{vmatrix},\qquad m\geqslant 1
\end{aligned}
$$

所以$\{B_m\}_{m=0}^{\infty}$是对合系．另$\{C_m\}_{m=0}^{\infty}$都只是q的函数，故显然对合．因而只须证明

$$\{B_{m+1},\ C_{n+1}\}+\{C_{m+1},\ B_{n+1}\}=-\langle\frac{\partial B_{m+1}}{\partial p},\ \frac{\partial C_{n+1}}{\partial q}\rangle+\langle\frac{\partial C_{m+1}}{\partial q},\ \frac{\partial B_{n+1}}{\partial p}\rangle=0,\qquad m,n\geqslant 0$$

设$m\geqslant 0$，$n\geqslant 0$，从(1.6)和(1.8)不难得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B_{m+1}}{\partial p}&=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i+j=m\\ i,j\geqslant 0}}(\langle A^iq,q\rangle A^jp-\langle A^ip,q\rangle A^jq)+A^{m+1}p\\
&=D_m/2+A^{m+1}p
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial C_{m+1}}{\partial q}=\sum_{i=0}^{3}g_{im}A^iq+2\sum_{i=0}^{4}f_iA^{m+5-i}q$$

这里D_m和f_i分别由(2.2)和(1.8b)确定，而g_{im}由下列各式确定

$$g_{0m}=-\frac{1}{2}\langle A^{m+4}q,q\rangle+\frac{1}{2}\langle q,q\rangle\langle A^{m+3}q,q\rangle+\left(-\frac{3}{8}\langle q,q\rangle^2+\frac{1}{2}\langle Aq,q\rangle\right)\langle A^{m+2}q,q\rangle$$

$$+\left(\frac{1}{4}\langle q,q\rangle^4-\frac{3}{4}\langle q,q\rangle\langle Aq,q\rangle+\frac{1}{2}\langle A^2q,q\rangle\right)\langle A^{m+1}q,q\rangle$$

$$g_{1m}=-\frac{1}{2}\langle A^{m+3}q,q\rangle+\frac{1}{2}\langle q,q\rangle\langle A^{m+2}q,q\rangle+\left(-\frac{3}{8}\langle q,q\rangle^2+\frac{1}{2}\langle Aq,q\rangle\right)\langle A^{m+1}q,q\rangle$$

$$g_{2m}=-\langle A^{m+2}q,q\rangle/2+(1/2)\langle q,q\rangle\langle A^{m+1}q,q\rangle$$

$$g_{3m}=-\langle A^{m+1}q.q\rangle/2$$

由此利用引理1经过直接计算可得

$$\left\langle\frac{\partial B_{m+1}}{\partial p},\ \frac{\partial C_{n+1}}{\partial q}\right\rangle-\left\langle\frac{\partial C_{m+1}}{\partial q},\ \frac{\partial B_{n+1}}{\partial p}\right\rangle$$

$$=\frac{1}{2}\left\langle D_m,\ \frac{\partial C_{n+1}}{\partial q}\right\rangle-\frac{1}{2}\left\langle D_n,\ \frac{\partial C_{m+1}}{\partial q}\right\rangle+\left\langle A^{m+1}p,\ \frac{\partial C_{n+1}}{\partial q}\right\rangle-\left\langle A^{n+1}p,\ \frac{\partial C_{m+1}}{\partial q}\right\rangle$$

$$=0$$

所以定理结论为真．　　　　#

注意Vandermonde行列式$V(a_1,a_2,\cdots,a_N)$非零，这样当$p\to p_0$(p_0为$\boldsymbol{R}^N$的任意非零矢量)，$q\to 0$时，$N\times N$阶矩阵$(\partial h_0/\partial p,\ \partial h_1/\partial p,\ \cdots,\ \partial h_{N-1}/\partial p)$的行列式也非零，从而一定存在一个开区域$\Omega\subseteq\boldsymbol{R}^{2N}$，使在此开区域$\Omega$的每一点，$N$个1-形式$dh_0,dh_1,\cdots,dh_{N-1}$都线性无关，即$h_0,h_1,\cdots,h_{N-1}$在$\Omega$上独立．于是从定理1立即可以得出下列结论：

定理2　定义在开区域Ω上的有限维Hamilton系统族

$$p_t=-\partial h_n/\partial q,\qquad q_t=\partial h_n/\partial p,\qquad n\geqslant 0 \tag{2.3}$$

具有一串公共的多项式对合运动积分$\{h_m\}_{m=0}^{\infty}$，其中$h_0,h_1,\cdots,h_{N-1}$独立，因而Hamilton系统族(2.3)全是Liouville可积的．　　　　#

推论1　当f由(1.9)确定时，定义在开区域Ω上的Hamilton系统(1.5)是Liouville可积的．

证明　此时系统(1.5)即是系统族(2.3)的第一个方程组，故推论结论成立．　　　　#

推论2　有限维Hamilton系统族(2.3)的Hamilton相流彼此可交换．

证明　由于两个Hamilton相流可交换当且仅当相应的Hamilton向量场可交换[4]，故从

$$[\vartheta_{h_m},\ \vartheta_{h_n}]=-\vartheta_{\{h_m,h_n\}}\text{及}\{h_m,h_n\}=0,\quad m,n\geqslant 0$$

可知结论为真．　　　　#

三、运动积分的生成元

设$\{G_k\}_{k=1}^{N}$为共焦对合系[15]，即

$$G_k=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\frac{(p_kq_j-p_jq_k)^2}{a_k-a_j}\qquad(k=1,2,\cdots,N) \tag{3.1}$$

而 $\{E\}_{k=1}^{N}$ 为

$$E_k=\frac{1}{4}G_k+\frac{1}{2}p_k^2+\sum_{i=0}^{4}f_i(q)a_k^{4-i}q_k^2, \qquad (k=1,2,\cdots,N) \tag{3.2}$$

这里$f_i(q)$是由(1.8b)定义的．考虑一个定义在$\boldsymbol{R}^N\times\boldsymbol{R}^N$上的双线性函数

$$Q_z(\xi,\eta)=\langle(zI_N-A)^{-1}\xi,\ \eta\rangle$$

这里I_N是N阶单位阵，$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)^T$，$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N)^T$．显然当 $|z|>\max(|a_1|,|a_2|,\ \cdots,\ |a_N|)$时我们有

$$Q_z(\xi,\ \eta)=\sum_{k=1}^{N}(z-a_k)^{-1}\xi_k\eta_k=\sum_{m=0}^{\infty}z^{-m-1}\langle A^m\xi,\ \eta\rangle \tag{3.3}$$

而且已经知道 $\{G_k\}_{k=1}^{N}$ 的生成函数为（见[15]）

$$\mathscr{G}=\sum_{k=1}^{N}\frac{G_k}{z-a_k}=\det\begin{bmatrix}Q_z(p,\ p) & Q_z(p,q)\\ Q_z(q,\ p) & Q_z(q,q)\end{bmatrix} \tag{3.4}$$

定理3 设$\{h_m\}_{m=0}^{\infty}$，$\{E_k\}_{k=1}^{N}$分别按(2.1)，(3.2)定义，则

$$h_m=\sum_{k=1}^{N}a_k^mE_k, \qquad m\geqslant 0 \tag{3.5}$$

因而$\{E_k\}_{k=1}^{N}$是$\{h_m\}_{m=0}^{\infty}$的生成元，由(3.5)还可推知生成元系 $\{E_k\}_{k=1}^{N}$ 也是一个开区域Ω上独立的对合系．

证明 利用(3.4)容易得到$\{E_k\}_{k=1}^{N}$的生成函数

$$\mathscr{E}=\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k}{z-a_k}=\frac{1}{4}\det\begin{bmatrix}Q_z(p,p) & Q_z(p,q)\\ Q_z(q,p) & Q_z(q,q)\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}Q_z(p,p)+\sum_{i=0}^{4}f_i(q)Q_z(A^{4-i}q,q)$$

把(3.3)代入上式$\{E_k\}_{k=1}^{N}$的生成函数并注意$\{h_m\}_{m=0}^{\infty}$的形式我们有

$$\mathscr{E}=\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k}{z-a_k}=\sum_{m=0}^{\infty}z^{-m-1}h_m \tag{3.6}$$

另外，展开$(z-a_k)^{-1}$为z^{-1}的幂级数，我们可得

$$\mathscr{E}=\sum_{k=1}^{N}\frac{E_k}{z-a_k}=\sum_{m=0}^{\infty}z^{-m-1}\sum_{k=1}^{N}a_k^mE_k \tag{3.7}$$

考虑到z在开区域$\{z\,|\,|z|>\max(|a_1|,\ |a_2|,\ \cdots,\ |a_N|)\}$内的任意性，比较(3.6)、(3.7)两式就能得到(3.5)．再由(3.5)可推得

$$\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ \vdots\\ E_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_N\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{N-1} & a_2^{N-1} & \cdots & a_N^{N-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}h_0\\ h_1\\ \vdots\\ h_{N-1}\end{bmatrix}$$

基于此式从$\{h_m\}_{m=0}^{N-1}$在Ω上的对合性和独立性即可得出$\{E_k\}_{k=1}^{N}$在Ω上的对合性和独立性。于是定理结论为真。 #

如果$\varphi=\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s)$和$\psi=\psi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s)$连续可微，那么

$$\{\varphi(F_1,\cdots,F_s),\ \psi(F_1,\cdots,F_s)\}=\sum_{k,j=1}^{s}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}\{F_k,\ F_j\}$$

因而对合系的任意一组函数仍是对合系，由此从定理3我们立即得到下列定理。

定理4 设$\varphi:\boldsymbol{R}^N\to\boldsymbol{R}$连续可微，则由$H=\varphi(E_1,E_2,\cdots,E_N)$作为Hamilton函数生成的在开区域$\Omega$上定义的有限维Hamilton 系统(1.1)是一个 Liouville 可积系统，且具有独立的对合多项式运动积分$\{E_k\}_{k=1}^{N}$。 #

由此定理我们再一次可得Hamilton系统族(2.3)都是 Liouville 可积的，且具有独立和对合的公共运动积分$\{E_k\}_{k=1}^{N}$。然而我们还不确知系统族(2.3)的 Lax 对以及作用角变量等，这有待于进一步研究。 ##

致谢 对屠规彰教授的悉心指导，孟大志老师和胡星标同学的热情帮助作者表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] Lax, P.D., A Hamiltonian approach to the KdV and other equations, *Nonlinear Evolution Equations*, Ed. M.G. Crandall, Academic Press, New York (1978), 207—224.

[2] Tu, G.Z., Infinitesimal canonical transformations of generalised Hamiltonian equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 15 (1982), 277—285.

[3] Abraham, R., J. E. Marsden and T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts (1983).

[4] Arnold, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Second(Corrected) Printing, Springer-Verlag, New York (1980).

[5] Olver, P. J., *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York (1986).

[6] Moser, J., Various aspects of integrable Hamiltonian systems, *Dynamical Systems* (*Progress in Mathematics*, 8), J. Guckenheimer, et al., Birkhauser, Boston (1980), 233—289.

[7] Moser, J., Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, *Advances in Math.*, 16 (1975), 197—220.

[8] Adler, M., Some finite dimensional integrable systems and their scattering behavior, *Commun. Math. Phys.*, 55 (1977), 195—230.

[9] 曹策问, AKNS族的Lax方程组的非线性化, 中国科学, A辑, (7) (1989), 701—707.

[10] Zeng, Y.B. and Y.S. Li, Three kinds of constraints of potentials for KdV hierarchy, *Acta Math. Sinica*, New Series, 6(3) (1990), 257—272.

[11] Cao, C.W. and X.G. Geng, Classical integrable systems generated through nonlinearization of eigenvalue problems, *Nonlinear Physics*, (*Research Reports in Physics*), Springer-Verlag, Berlin (1986), 68—78.

[12] Tu, G.Z., On complete integrability of a large class of finite-dimensional Hamiltonian systems, *Advances in Math. (China)*, 20(1) (1991), 60—74.

[13] 马文秀，一个新的多项式对合系及其经典可积系统，科学通报，34(23) (1989)，1770—1774.
[14] Ma, W. X., The confocal involutive system and the integrability of the nonlinearized Lax systems of AKNS hierarchy, *Nonlinear Physics (Research Reports in Physics)*, Springer-Verlag, Berlin (1990), 79—84.
[15] 曹策问，共焦对合系与一类AKNS特征值问题，河南科学，5(1) (1987)，1—10.

A Hierarchy of Liouville Integrable Finite-Dimensional Hamiltonian Systems

Ma Wen-xiu

(Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai)

Abstract

A hierarchy of Liouville integrable finite-dimensional Hamiltonian systems whose Hamiltonian phase flows commute with each other is generated and an infinite number of involutive explicit common integrals of motion and a set of its involutive explicit generators are given.

Key words involutive system, integral of motion, generator, Hamiltonian system, integrability