

弹性圆柱壳扭转屈曲研究

王德禹 马宏伟 杨桂通

(太原工业大学应用力学研究所, 1991年3月29日收到)

摘 要

本文给出两端固支的弹性圆柱壳扭转屈曲实验与理论计算结果. 实验发现, 对于较长的壳, 其屈曲后的变形并不占据整个壳体的长度. 另外在计算中仅考虑壳体的法向边界条件, 而不考虑其周向和轴向边界条件, 结果和 Yamaki 精确解以及本文实验结果相符较好, 说明周向和轴向边界条件对圆柱壳的扭转屈曲影响较小.

关键词 圆柱壳 弹性扭转屈曲 实验

一、引 言

圆柱壳的扭转屈曲问题具有了较长的研究历史. 从实验上来讲, 较完整的结果是 Yamaki^[1]所进行过的实验, 对于几何参数 Z 分别是 20, 50, 100, 200, 500 和 1000 的柱壳, 文献[1]给出了较丰富屈曲后数据, 这里 $Z = \sqrt{1-\nu^2} L^2/Rh$, ν 为泊松比, L, R, h 分别为壳体的长度、半径和厚度. 但是, 由于 Yamaki 所选用壳件的半径较大(100mm), 因此虽然其 Z 参数很大, 但 $L/2R$ 仍小于 1. 本文对 $L/2R$ 分别为 0.4、0.6、0.8、1.0、1.2 和 1.4 的柱壳进行扭转屈曲试验, 以期为今后的理论分析提供必要的的数据.

从圆柱壳扭转屈曲的理论分析来看, 一般地对于较长的壳可以不考虑两端边界条件的影响, 而对于较短的壳, 由于难以找到一个同时满足边界条件和平衡方程的变形函数, 因此得不到象压杆问题的尤拉公式那样简洁的临界载荷表达式, 而只能通过级数展开的方法得到一个数值解, 在这方面 Yamaki^[2]进行了大量的工作. 采用线性化的 Donnell 方法, 并取图1所示的坐标系, 有:

$$\nabla^4 F = -\frac{Eh}{R} W_{,zz} \quad (1.1)$$

$$D\nabla^4 W = \frac{1}{R} F_{,zz} + 2N_{zy0} W_{,zy} \quad (1.2)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E 为材料的弹性模量, F 和 W 分别为应力函数和法向位移函数, N_{zy0} 为所加扭矩产生的周向剪力, 于是问题归结为在适当的边界条件下使 (1.1)、(1.2) 式有非零解的 N_{zy0} 取值, Yamaki^[2]在求解中

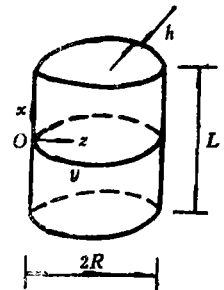


图1 圆柱壳

同时考虑 W 和 F 的边界条件.本文试图仅考虑 W 的边界条件,并采用文献[2]所给出的 $W(x,y)$ 形式,通过伽辽金法给出临界扭矩的计算.

二、实验研究

实验所用的圆柱壳为铝合金, $E=2230 \times 9.8 \text{ N/mm}^2$, $\nu=0.33$, $R=32.75 \text{ mm}$, $h=0.2 \text{ mm}$, 我们共对6种不同 $L/2R$ 比值的壳体进行了实验, 表1给出了其有关的几何参数. 壳的两端为固结, 同时不限制其轴向位移, 通过将预先制作的接头从壳的两端伸进壳内5mm,

表 1 壳体的几何参数

编 号	1	2	3	4	5	6
$L(\text{mm})$	91	80	65	52	39	26
$L/2R$	1.4	1.23	1	0.8	0.6	0.4
Z	1212	937	618	396	223	99

并用914粘结剂粘结, 在实验中记录加于两接头上的扭矩 M 和圆柱壳转角 ϕ 之间的关系曲线, 则该曲线上 M 的最大值便是临界扭转屈曲载

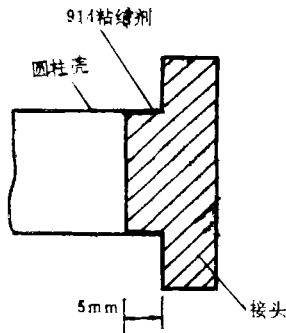


图 2 固结边界的实现

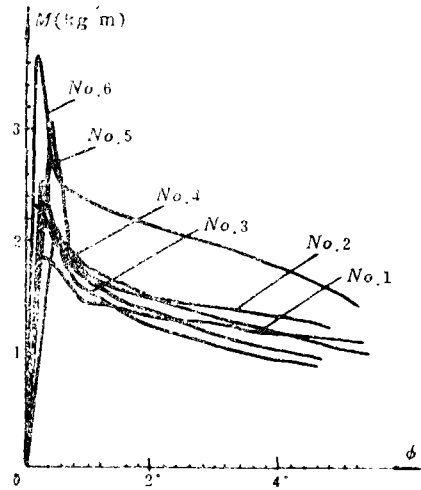


图 3 $M-\phi$ 曲线

荷.图3给出了这些 $M-\phi$ 曲线,从图中可以看出,一旦柱壳发生屈曲,扭矩立即减小,而且随着变形的逐渐增大,曲线变得较为平缓,这说明当变形较大时,所耗散的塑性功和转角 ϕ 成近似的线性关系.由于不限制圆柱壳的轴向位移,因此实验中还记录了扭矩 M 和柱壳轴向缩短量 δ 的关系曲线(见图4),图4表明,壳体屈曲前 δ 为零,而一旦发生屈曲,随着所加扭矩的急剧卸载,轴向缩短量 δ 也猛烈地增加.图5是壳屈曲后的形态(从左向右依次为No.1, No.2, ..., No.6号试件),从图5可以看出,当壳较短时,变形部分占据整个长度,而当壳较长时,仅在壳的中间一部分长度产生屈曲波纹.另外

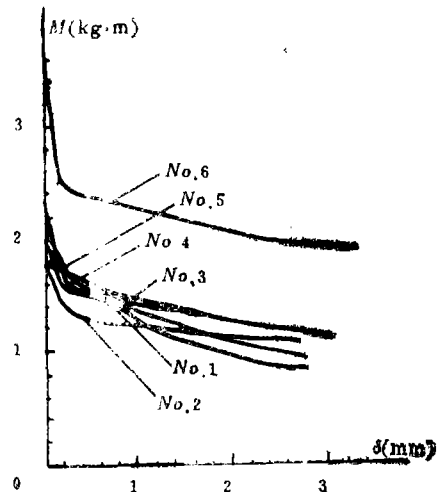


图 4 $M-\delta$ 曲线

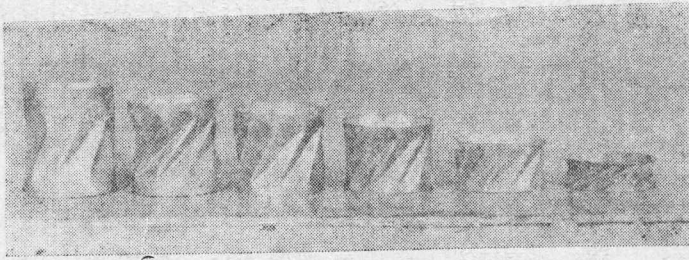


图5 屈曲后形态

实验过程中发现,在整个后屈曲变形过程中,其屈曲波数保持不变,只是随着变形的增加,其波纹逐渐加深.表2给出了实验临界扭矩和理论计算临界扭矩,二者基本一致,实验值偏小,这是因为试验中的柱壳总是存在有初始缺陷,从而引起临界扭矩的下降.

表2 实验和计算临界扭矩 M_{cr}

$L(\text{mm})$	实验 $M_{cr}(\text{N}\cdot\text{m})$	本文理论 $M_{cr}(\text{N}\cdot\text{m})$
26	$3.68 \times 9.8(13)$	$4.47 \times 9.8(11)$
39	$3.09 \times 9.8(12)$	$3.70 \times 9.8(10)$
52	$2.58 \times 9.8(11)$	$3.19 \times 9.8(10)$
65	$2.38 \times 9.8(10)$	$2.80 \times 9.8(10)$
80	$2.13 \times 9.8(9)$	$2.50 \times 9.8(10)$
91	$1.9 \times 9.8(9)$	$2.35 \times 9.8(10)$

括号里的数字为周向波数

三、理论计算

将方程(1.2)的两边作用微分算子 ∇^4 并将(1.1)式代入有:

$$D\nabla^8 W + \frac{Eh}{R^2} W_{,zzzz} - 2N_{xy} \nabla^4 W_{,xy} = 0 \quad (3.1)$$

从而得到一个仅含有 W 的八阶微分方程.方程(1.1)(1.2)中的应力函数 $F(x, y)$ 反映了柱壳内周向和轴向薄膜力,因此考虑 F 的边界条件也即考虑了壳的周向和轴向边界条件.以下将从(3.1)式出发,仅考虑 W 的边界条件,寻求方程(3.1)有非零解的条件,从而给出临界扭矩的计算.

引入无量纲参数: $w = W/h$, $\xi = \pi x/L$, $\eta = y/R$, $k_s = N_{xy} \cdot L^2/\pi^2 D$, $Z = \sqrt{1-\nu^2} L^2/Rh$, $\beta = Ln/\pi R$.则方程(3.1)可进一步写为:

$$\nabla^8 w + \frac{12Z^2}{\pi^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - 2k_s \beta \nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (3.2)$$

其中, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$, n 为屈曲时的周向波数.对于两端固结的柱壳 w 应满足:

$$w \Big|_{\xi=\pm\pi/2} = w_{,\xi} \Big|_{\xi=\pm\pi/2} = 0 \quad (3.3)$$

如令 w 为如下形式:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} a_m [\bar{w}_{m-1}(\xi, \eta) + \bar{w}_{m+1}(\xi, \eta)] \quad (3.4)$$

$$\bar{w}_m(\xi, \eta) = \cos(m\xi + \eta) + (-1)^m \cos(m\xi - \eta) \quad (3.5)$$

此时边界条件(3.3)自动满足,将(3.4)式代入方程(3.2)的左边并令其为 $L_1(\xi, \eta)$,应用伽辽金法有:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} L_1(\xi, \eta) [\bar{w}_{m-1}(\xi, \eta) + \bar{w}_{m+1}(\xi, \eta)] d\xi d\eta = 0 \quad (3.6)$$

方程(3.6)给出了一个关于 $a_m (m=1, 2, \dots)$ 的齐次线性方程组, 令其系数行列式值为 $\Delta_1(Z, \beta, L, k_s)$, 则使 $\Delta_1 = 0$ 的 k_s 在不同 n 下的最小值便是临界扭知 k_{sc} , 相应的 n 为屈曲波纹数。

对于两端简支的圆柱壳, w 应满足:

$$w \Big|_{\xi = \pm \pi/2} = w, \xi \xi \Big|_{\xi = \pm \pi/2} = 0 \quad (3.7)$$

如取 w 的形式为:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} a_m [\cos(m\xi + \eta) - (-1)^m \cos(m\xi - \eta)] \quad (3.8)$$

则边界条件(3.7)满足, 将(3.8)代入(3.2)的左边, 并令其为 $L_2(\xi, \eta)$, 应用伽辽金法有:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} L_2(\xi, \eta) [\cos(m\xi + \eta) - (-1)^m \cos(m\xi - \eta)] d\xi d\eta = 0 \quad (3.9)$$

则齐次线性方程组(3.9)的系数行列式为零时的 k_s 在不同 n 下的最小值便是临界扭矩, 相应的 n 为屈曲周向波纹数。

计算表明, 当方程(3.4)和(3.8)中 m 取至10时, 可使所得临界扭矩足够精确。表3和表4分别给出了固定边界和简支边界时的临界扭矩 k_{sc} 。

表 3 固结边界时的 $k_{sc} (m=10, R=100, h=0.247, \nu=0.3)$

L	本文解	Yamaki解 ^[2]			
		C ₀	C ₂	C ₃	C ₄
22.9	10.202	12.47	12.20	12.14	11.91
35.9	17.173	19.52	19.14	18.74	18.36
51.0	27.617	30.23	29.75	28.92	28.34
71.2	44.657	49.0	48.36	46.73	45.87
113.8	89.336	95.96	95.01	91.01	89.55
160.8	150.250	161.4	160.1	152.2	150.1

表3和表4中的 $C_i, S_i (i=1, 2, 3, 4)$ 所表示的边界条件分别为当 $\xi = \pm \pi/2$ 时

$$\left. \begin{aligned} C_{1s}: w = w, \xi = u = v = 0 & \quad S_{1s}: w = w, \xi \xi = u = v = 0 \\ C_{2s}: w = w, \xi = u = p_y = 0 & \quad S_{2s}: w = w, \xi \xi = u = p_y = 0 \\ C_{3s}: w = w, \xi = p_x = v = 0 & \quad S_{3s}: w = w, \xi \xi = p_x = v = 0 \\ C_{4s}: w = w, \xi = p_x = p_y = 0 & \quad S_{4s}: w = w, \xi \xi = p_x = p_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

表 4 简支边界时的 $k_{sc} (m=10, R=100, h=0.247, \nu=0.3)$

L	本文解	Yamaki解 ^[2]			
		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄
22.9	9.70	10.55	9.692	10.13	9.294
35.9	16.59	18.17	17.01	17.22	16.04
51.0	27.72	29.11	27.64	27.51	25.86
71.2	47.04	48.00	46.08	45.27	42.89
113.8	94.17	95.09	92.22	89.27	85.45
160.8	157.2	160.6	156.7	150.2	144.8

其中 u, v 表示轴向和周向位移, p_x, p_y 为轴向及周向薄膜力。从表3及表4所示的结果来看, 有理由认为: 当仅考虑圆柱壳发生屈曲时的临界扭矩时, 可以不考虑其轴向周向边界条件的影响。按照上述解法对本文所作试验的圆柱壳进行计算的结果见表2。

四、结 束 语

本文给出了圆柱壳扭转屈曲时的实验现象, 特别值得注意的是随着壳体长度的增加, 屈曲波段不再占据整个壳体长度, 这还有待于进一步的研究。

另外文中从一个八阶微分方程(3.2)出发给出了临界载荷的计算, 这一方法虽然早已被过去的研究者采用, 但他们所采用的 w 形式不能精确地满足边界条件。本文采用的 w 形式精确地满足了边界条件, 因此可以认为它是一个近似性介于前人研究结果与文献[2]之间的解。

参 考 文 献

- [1] Yamaki, N., Experiments on the postbuckling behavior of circular shells under torsion, *Buckling of Structures*, Ed by Budiansky 13(1976), 312-330.
- [2] Yamaki, N., *Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells*, North-Holland Press (1984).

Studies on the Torsional Buckling of Elastic Cylindrical Shells

Wang De-yu Ma Hong-wei Yang Gui-tong

(Taiyuan University of Technology, Taiyuan)

Abstract

The experimental phenomenon and theoretical analysis are given for the torsional buckling of elastic cylindrical shells. From the experiment, it is found that the postbuckling deformation doesn't occupy the whole length when the shell is longer. In the theoretical calculation, only the normal displacement boundary condition is taken into account. By comparing the present calculation results with the accurate result of Yamaki's theory and the present experiment results, it is shown that the influence of the axial and circumference boundary condition is less important.

Key words cylindrical shell, elastic torsional buckling, experiment