应用数学和力学，第13卷第3期（1992年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

无界区域中的非线性双曲型方程*

耿 堤 屈长征

（兰州大学数学系，1990年11月10日收到）

摘 要

本文研究无界区域中的非线性双曲方程

$$u_{tt}+A^2u+M(x,\|A^{\frac{1}{2}}u\|_2^2)Au=0$$

这类问题的模型来自梁的横向挠曲方程．本文利用不动点方法结合能量估计证明了当M与x有关时，上述方程局部解的存在唯一性．

关键词 非线性双曲型方程 无界区域 能量估计 不动点方法

一、引 言

考虑如下形式的非线性双曲型方程：

$$\begin{cases} u_{tt}+A^2u+M(x,\ \|A^{\frac{1}{2}}u\|_2^2)Au=0 \qquad (x\in\mathbf{R}^n) & (1.1) \\ u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x) \qquad (x\in\mathbf{R}^n) & (1.2) \end{cases}$$

其中 $A=-\Delta+I$（$-\Delta$为Laplace算子），$M:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$\|A^{\frac{1}{2}}u\|_2^2=\|u\|_{1,2}^2=\int_{\mathbf{R}^n}|\nabla u|^2dx+\int_{\mathbf{R}^n}u^2dx \tag{1.3}$$

我们证明了问题(1.1)(1.2)局部解的存在性与唯一性．上述问题对应的模型来自具有伸缩性梁的横向挠曲方程[1]．非线性项M表示梁的可伸缩性所引起的张力变化．对于这个问题的研究已有了一系列的结果[2~7]．文献[2]研究了无界区域$\mathbf{R}^n$中$M(x,\lambda)$有形如$f(\lambda)\geqslant m>0$的情况，Biler[4]和Brito[5][6]讨论了带有散度项的情形．上述结果均假定$M(x,\lambda)$仅与λ有关，而与x无关．本文将去掉这个假定．为此，设M满足如下条件：

存在$\varphi,\psi\in H^\infty$，$m>0$（不失一般性可设$m\leqslant1$）

使得$\varphi(x)\geqslant m$，$\psi(x)\geqslant0$ $\quad(x\in\mathbf{R}^n,\text{a.e.})$；

(M)

$M(x,\lambda)=\varphi(x)+f(\lambda)\psi(x) \qquad (x,\lambda)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$

$f\in C^1(\mathbf{R})$，并且$f(\lambda)\geqslant0$（$\lambda\geqslant0$时）．

---

* 张石生推荐．

其中 $H^{\infty}=W^{1,\infty}(\mathbf{R}^n)=\{\varphi\in L^{\infty}(\mathbf{R}^n)\mid\nabla\varphi\in(L^{\infty}(\mathbf{R}^n))^n\}$.以下记$H^0=L^2(\mathbf{R}^n)$, $H^i=W^{i,2}(\mathbf{R})^n$ $(i=1,2,\cdots)$.H^0中的范数和内积分别记为$\|u\|_2$和$(u,v)_2$，H^1中的范数由(1.3)式定义，内积为

$$[u,v]=\int_{\mathbf{R}^n}(\nabla u\cdot\nabla v)\,dx+\int_{\mathbf{R}^n}uv\,dx \tag{1.4}$$

我们的主要结果是

定理1 对于$u_0\in H^5(\mathbf{R}^n)$，$u_1\in H^4(\mathbf{R}^n)$ 存在$T_1>0$，存在唯一的$u:[0,T_1]\to H^0$，使得

$$u\in C_2^2([0,T_1];H^0)\cap C^1([0,T_1];H^0)\cap C([0,T_1];H^2) \tag{1.5}$$

$$u'(t)\in H^1\quad(t\in[0,T_1]),\quad u(t)\in H^3\quad(t\in[0,T_1]) \tag{1.6}$$

其中

$$C_2^2([0,T_1];H^0)=\{u:[0,T_2]\to H^0\mid t\mapsto(u(t),v)_2\in C^2[0,T_2],\ \forall v\in H^2\},$$

u还满足

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}(u'(t),v)_2+(A^2u(t),v)_2+(M(x,\|u(t)\|_{1,2}^2)Au(t),v)_2=0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(\forall v\in H^0)\\ u(x,0)=u_0(x),\qquad u'(x,0)=u_1(x)\end{array}\right\} \tag{1.7}$$

由于M与x有关，我们将采用能量估计结合求不动点的方法[8]来证明定理1.

二、线性问题的一个结果

在这一节，我们要证明下面"线性化"问题局部解的存在唯一性：

$$\left.\begin{array}{l}u_{tt}+A^2u+M(x,\|v(t)\|_{1,2}^2)Au=0\\ u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x)\end{array}\quad(x,t)\in\mathbf{R}^n\times[0,T]\right\} \tag{2.1}$$

其中 $T>0$，$v\in C^1([0,T];H^1)$.

容易证明A是自伴算子，且当$u\in D(A)=H^2$时，我们有

$$\|u\|_{1,2}^2=(Au,u)_2\geqslant\|u\|_2^2 \tag{2.2}$$

$A^{\frac{1}{2}}$有意义，且 $D(A^{\frac{1}{2}})=H^1$. 由(2.2)还可以得到

$$\|Au\|_2^2\geqslant\|u\|_{1,2}^2 \tag{2.3}$$

对于$\lambda\in\mathbf{R}$，定义$D(\lambda):H^0\to H^0$为

$$(D(\lambda)u)(x)=M(x,\lambda)u(x)\qquad(u\in H^0) \tag{2.4}$$

显然，当$\lambda\geqslant0$时，$D(\lambda)$为有界线性正算子，且具有下述性质：

$$(D(\lambda)u,u)_2\geqslant m\|u\|_2^2\qquad u\in H^0,\lambda\geqslant0 \tag{2.5}$$

对于任意$T>0$，存在$\alpha_T>0$，当$|\lambda_1|$，$|\lambda_2|\leqslant T$时，

$$\|D(\lambda_1)-D(\lambda_2)\|_{L(H^0)}\leqslant\alpha_T|\lambda_1-\lambda_2| \tag{2.6}$$

其中$L(H^0)$表示H^0上的有界线性算子空间；又存在$\beta_T>0$，当$|\lambda|\leqslant T$以及$(u,v)\in H^2\times H^1$时

$$|(D(\lambda)Au,v)_2-(D(\lambda)A^{\frac{1}{2}}u,\ A^{\frac{1}{2}}v)_2|\leqslant\beta_T\|u\|_{1,2}\|v\|_2 \tag{2.7}$$

映射$D:[0,\infty)\to L(H^0)$是连续可微的 (2.8)

引理1 设$u_0\in H^5$，$u_1\in H^4$，对于$v\in C^1(\mathbf{R};H^1)$，存在唯一的$u:\mathbf{R}\to H^5$，使得

$$u\in C^2(\mathbf{R};H^3)\cap C^1(\mathbf{R};H^4),$$

且u满足方程：

$$\left.\begin{aligned}&u''(t)+A^2u(t)+B(v(t))Au(t)=0 \qquad (H^4\times \mathbf{R})\\&u(0)=u_0;\ u'(0)=u_1\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

其中 $B(v(t))=D(\|v(t)\|_{1,2}^2)$.

证 考虑下述问题

$$\left.\begin{aligned}&w''(t)+N(t)w(t)=0\\&w(0)=A^{\frac{1}{2}}u_0,\quad w'(0)=A^{\frac{1}{2}}u_1\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

其中 $N(t)=A^2+A^{\frac{1}{2}}B(v(t))A^{\frac{1}{2}}$. 显然$N(t)$为$H^0$上的自伴算子，定义域为$D(N(t))=H^4$ $(t\in\mathbf{R})$. 由(2.2)，(2.3)以及(2.5)式可得

$$(N(t)u,u)_2\geqslant m\|u\|_2^2 \qquad (t\in\mathbf{R},u\in H^4)\tag{2.11}$$

由闭图象定理可知$N(t)N^{-1}(0)\in L(H^0)$ $(t\in\mathbf{R})$. 因此，对于$T>0$，$u\in H^0$，$\|u\|_2=1$当$|t|$，$|s|\leqslant T$时，我们有

$$\begin{aligned}&\|(N(t)-N(s))N^{-1}(0)u\|_2\\&=|f(\|v(t)\|_{1,2}^2)-f(\|v(s)\|_{1,2}^2)|\,\|A^{\frac{1}{2}}\psi(x)(A+B(v(0)))^{-1}A^{-\frac{1}{2}}u\|_2\\&\geqslant m_T|t-s|,\end{aligned}$$

其中m_T只与T，v有关. 由此可得

$$\|N(t)N^{-1}(0)-N(s)N^{-1}(0)\|_{L(H^0)}\leqslant m_T|s-t|\tag{2.12}$$

利用$N(t)$的上述性质，我们知问题(2.10)存在唯一解[9] $w:\mathbf{R}\to H^4$且$w\in C^2(\mathbf{R};H^2)\cap C^1(\mathbf{R};H^3)$. 令

$$u(t)=A^{-\frac{1}{2}}w(t)$$

则$u\in C^2(\mathbf{R};H^3)\cap C^1(\mathbf{R};H^4)$且满足(2.9). 证毕

引理2 设$u_0\in H^6$，$u_1\in H^4$，对于$T>0$以及$v\in C^1([0,T];H^1)$，存在唯一的函数$u=u(v):[0,T]\to H^5$，

$$u\in C^2([0,T];H^3)\cap C^1([0,T];H^4)\tag{2.13}$$

并且u还满足方程：

$$\left.\begin{aligned}&u''(t)+A^2u(t)+B(v(t))Au(t)=0 \qquad H^4\times[0,T]\\&u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1\end{aligned}\right\}\tag{2.14}$$

证 定义

$$v_1(t)=\begin{cases}v(t) & t\in[0,T]\\ v'(t)(t-T)+v(T) & t\in(T,+\infty)\\ v'(0)t+v(0) & t\in(-\infty,0).\end{cases}$$

则$v_1\in C^2(\mathbf{R};H^1)$，由引理1，存在$u=u(v_1):\mathbf{R}\to H^5$，$u\in C^2(\mathbf{R};H^3)\cap C^1(\mathbf{R};H^4)$，使得(2.14)成立. 因此引理2的存在性得证. 下证唯一性. 设有另一个$w(t)$满足(2.13)和(2.14). 记$z(t)=u(t)-w(t)$. 则$z(t)$满足下述方程：

$$\left.\begin{aligned}&z''(t)+A^2z(t)+B(v(t))Az(t)=0\\&z(0)=0,\ z'(0)=0\end{aligned}\right\}\tag{2.15}$$

现在，我们定义

$$p(t)=\frac{1}{2}[\|z'(t)\|_2^2+\|Az(t)\|_2^2+(B(v(t))A^{\frac{1}{2}}z(t),A^{\frac{1}{2}}z(t))_2].$$

利用方程(2.15)可以得到

$$p(t)=(z''(t),z'(t))_2+(Az(t),Az'(t))_2+(B(v(t))A^{\frac{1}{2}}z(t),\ A^{\frac{1}{2}}z'(t))_2$$
$$+[v(t),v'(t)](B'(v(t))A^{\frac{1}{2}}z(t),\ A^{\frac{1}{2}}z(t))_2.$$

由(2.7)，(2.8)式，并记$C_T=\sup\limits_{t\in[0,T]}[\|B'(v(t))\|_{L(H^0)}\|v(t)\|_{1,2}\|v'(t)\|_{1,2}]$，再利用(2.5)式，我们有

$$p'(t)\leqslant\left(\frac{1'}{2}\beta_T+C_T\right)\|A^{\frac{1}{2}}z(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\beta_T\|z'(t)\|_2^2$$
$$\leqslant M_1p(t)\qquad t\in[0,T].$$

又因$p(0)=0$，故$p(t)=0(t\in[0,T])$，唯一性得证。

三、主要定理的证明

对于$T>0$，考虑如下二个空间：

$$X_T=\{u:[0,T]\to H^0\,|\,u\in C^1(0,T;H^1)\cap C(0,T;H^3)\},$$
$$\|u\|_{X_T}=\sup_{t\in[0,T]}[\|u'(t)\|_{1,2}+\|A^{\frac{3}{2}}u(t)\|_2+\|Au(t)\|_2];$$
$$Y_T=\{u:[0,T]\to H^0\,|\,u\in C^1(0,T;H^0)\cap C(0,T;H^2)\}.$$
$$\|u\|_{Y_T}=\sup_{t\in[0,T]}[\|u'(t)\|_2+\|u(t)\|_{1,2}+\|Au(t)\|_2].$$

显然$X_T\subset Y_T$，并且$(X_T,\|\cdot\|_{X_T})$和$(Y_T,\|\cdot\|_{Y_T})$都是Banach空间。

取定$u_0\in H^5$，$u_1\in H^4$。记

$$C=\|u_1\|_{1,2}^2+\|A^{\frac{3}{2}}u_0\|_2^2+\|Au_0\|_2^2,$$
$$E=\{v\in X_T\,|\,\|v(0)\|_{1,2}^2\leqslant c\},$$
$$B_T(R)=\{v\in X_T\,|\,\|v\|_{X_T}\leqslant R\}.$$

根据引理2，对于每个$v\in X_T$，存在唯一的$u\in X_T$，满足(2.13)，(2.14)。记$u=S(v)$，则S: $X_T\to X_T$。进而，我们还有

引理3 存在$r=r(C)>0$，$T_0=T_0(C)>0$，使得

$$S(E\cap B_{T_0}(r))\subset B_{T_0}(r)\tag{3.1}$$

证 对于$v\in X_T$，$u=S(v)$，定义

$$z(t)=\frac{1}{2}[\|u'(t)\|_{1,2}^2+\|A^{\frac{3}{2}}u(t)\|_2^2+(B(v(t))Au(t),Au(t))_2]\tag{3.2}$$

因为u满足方程(2.14)，我们有

$$z'(t)=[u''(t),u'(t)]+(A^{\frac{3}{2}}u(t),A^{\frac{3}{2}}u'(t))_2$$
$$+[v'(t),v(t)](B'(v(t))Au(t),Au(t))_2+(B(v(t))Au(t),Au'(t))_2$$
$$=[v'(t),v(t)](B'(v(t))Au(t),Au(t))_2.$$

由(2.3)和(2.5)可得

$$z'(t)\leqslant\frac{1}{2}(\|v'(t)\|_{1,2}^2+\|v(t)\|_{1,2}^2)\|B'(v(t))\|_{L(H^0)}\|Au(t)\|_2^2$$

$$\leqslant\frac{1}{2m}(\|v'(t)\|_{1,2}^2+\|Av(t)\|_2^2)\|B'(v(t))\|_{L(H^0)}(B(v(t))Au(t),Au(t))_2$$

$$\leqslant\frac{1}{m}\|v\|_{X_T}^2\|B'(v(t))\|_{L(H^0)}z(t)\qquad(t\in[0,T])\tag{3.3}$$

设$v\in B_T(r)$，则$\|v(t)\|_{1,2}^2\leqslant\|v\|_{X_T}^2\leqslant r$ $(t\in[0,T])$．记$M_2=\sup\limits_{v\in B_T(r)}\|B'(v(t))\|_{L(H^0)}$，由(3.3)式可以得到

$$z(t)\leqslant z(0)\exp\left[\frac{r^2}{m}M_2t\right]\qquad(t\in[0,T])\tag{3.4}$$

取 $T_0=\min\left\{T,\ \frac{m}{M_2r^2}\ln 2\right\}$，则有

$$z(t)\leqslant 2z(0)\leqslant(1+\|B(v(0))\|_{L(H^0)})C\tag{3.5}$$

另一方面，由(3.2)和(2.5)可得

$$z(t)\geqslant\frac{m}{18}[\|u'(t)\|_{1,2}+\|A^{\frac{3}{2}}u(t)\|_2+\|Au(t)\|_2]^2\tag{3.6}$$

故

$$[\|u'(t)\|_{1,2}+\|A^{\frac{3}{2}}u(t)\|_2+\|Au(t)\|_2]^2\leqslant\frac{18C(1+\|B(v(0))\|_{L(H^0)})}{m}\qquad(t\in[0,T_0])\tag{3.7}$$

再设$v\in E$，则可取

$$r^2=\sup_{v\in E}\frac{18C(1+\|B(v(0))\|_{L(H_0)})}{m}\tag{3.8}$$

由(3.7)即得

$$\|u\|_{X_T}^2\leqslant r^2.$$

引理4 设r和T_0为由引理3所确定之常数．则存在$T_1\in(0,T_0]$，$\theta\in(0,1)$，使得

$$\|S(u)-S(v)\|_{Y_{T_1}}\leqslant\theta\|u-v\|_{Y_{T_1}}\tag{3.9}$$

其中 $u,v\in E\cap B_{T_1}(r)$．

证 设$u,v\in E\cap B_{T_0}(r)$．$z(t)=S(u)(t)-S(v)(t)$满足下述方程：

$$\left.\begin{array}{l}z''(t)+A^2z(t)+B(u(t))Az(t)+(B(u(t))-B(v(t)))AS(v)(t)=0\\ z(0)=0,\ z'(0)=0\end{array}\right\}\tag{3.10}$$

我们定义

$$p(t)=\frac{1}{2}(\|z'(t)\|_2^2+\|Az(t)\|_2^2+(B(u(t))A^{\frac{1}{2}}z(t),A^{\frac{1}{2}}z(t))_2).$$

由(2.5)显然有

$$p(t)\geqslant\frac{m}{18}[\|z'(t)\|_2+\|Az(t)\|_2+\|z(t)\|_{1,2})^2\tag{3.11}$$

另一方面，利用(2.10)，我们有

$$p'(t)=-(B(u(t))Az(t),z'(t))_2-((B(u(t))-B(v(t)))AS(v)(t),z'(t))_2$$

$$+[u'(t),u(t)](B'(u(t))A^{\frac{1}{2}}z(t),A^{\frac{1}{2}}z(t))_2+(B(u(t))A^{\frac{1}{2}}z(t),A^{\frac{1}{2}}z'(t))_2.$$

再由(2,7)和(2,6)，我们可以得到

$$p'(t)\leqslant\left(\beta_{T_0}+\frac{2r^2}{m}M_2\right)p(t)+2\alpha_{T_0}r^2\|u-v\|_{Y_{T_0}}\ \|z\|_{Y_{T_0}} \tag{3.12}$$

利用$p(0)=0$记，$M_3=\beta_{T_0}+2r^2M_2/m$，我们有

$$p(t)\leqslant\frac{\alpha_{T_0}r^2}{M_3}(\exp[2M_3t]-1)\|u-v\|_{Y_{T_0}}\ \|z\|_{Y_{T_0}}\qquad t\in[0,T_0] \tag{3.13}$$

取$T_1\in(0,T_0]$适当地小，可使得

$$\theta=\frac{\alpha_{T_0}}{M_3}r^2(\exp[2M_3T_1]-1)\frac{18}{m}\in(0,1) \tag{3.14}$$

用T_1代替T_0，重复上述证明，由(3.11)可得

$$(\|z'(t)\|_2+\|Az(t)\|_2+\|z(t)\|_{1,2})^2\leqslant\theta\|u-v\|_{Y_{T_1}}\ \|z\|_{Y_{T_1}}\qquad (t\in[0,T_1]) \tag{3.15}$$

此即(3.9)式。

现在我们来证明定理1．设T_1为引理4所确定．令$u_2(x,t)\equiv 0$，显然$u_2\in E\cap B_{T_1}(r)$，定义

$$u_{k+1}=S(u_k)\qquad(k=2,3,\cdots).$$

由引理2可知$u_{k+1}\in E\cap B_{T_1}(r)$．根据引理3，

$$\|u_{k+1}-u_k\|_{Y_{T_1}}\leqslant\theta^k\|u_3\|_{Y_{T_1}}\qquad(k\geqslant 3) \tag{3.16}$$

因此

$$\|u_{k+j}-u_k\|_{Y_{T_1}}\leqslant\frac{\theta^k}{1-\theta}\|u_3\|_{Y_{T_1}}\qquad(k\geqslant 3,\forall j) \tag{3.17}$$

故存在$u\in Y_{T_1}$，使得在Y_{T_1}中$\lim\limits_{k\to\infty}u_k=u$．根据$Y_{T_1}$中范数的定义，我们有

$$\lim_{k\to\infty}B(u_k(t))=B(u(t))\qquad(\text{关于}t\in[0,T_1]\text{一致}).$$

对于任意$v\in H^0$，

$$\lim_{k\to\infty}(Au_k(t),v)_2=(Au(t),v)_2\ (\text{关于}t\in[0,T_1]\text{一致}).$$

对于任意$v\in H^2$，因$Av\in H^0$，故

$$\lim_{k\to\infty}(Au_k(t),Av)_2=(Au(t),Av)_2\ (\text{关于}t\in[0,T_1]\text{一致}).$$

注意到H^2在H^0中稠密，故对于任意$v\in H^0$

$$\lim_{k\to\infty}(A^2u_k(t),v)_2=(A^2u(t),v)_2\ (\text{关于}t\in[0,T_1]\text{一致}).$$

对任意$v\in H^0$，当$k\geqslant 3$时

$$(u''_{k+1}(t),v)_2=-(A^2u_{k+1}(t),v)_2-(B(u_k(t))Au_{k+1}(t),v)_2$$

故对于$t\in[0,T_1]$一致地有

$$\lim_{k\to\infty}(u''_{k+1}(t),v)_2=-(A^2u(t),v)_2-(Bu(t))Au(t),v)_2,$$

这表明$u\in C^2_2(0,T_1;H^0)$，由Y_{T_1}定义以及$u\in Y_{T_1}$，自然还有$u\in C^1(0,T;H^0)\cap C^1(0,T;H^2)$，

因此(1.7)和(1.6)式分别得证．此外，根据$u_k \to u$（在Y_{T_1}中）和$u_k \in H^3$以及X_{T_1}中范数的定义容易证明$u(t) \in H^2$，$u'(t) \in H^1$，$t \in [0, T_1]$．

设 $v(t)$是满足定理1的另一函数，记 $z(t) = u(t) - v(t)$，类似于引理4的证明，我们可得

$$\|z\|_{Y_{T_1}} \leqslant \theta \|z\|_{Y_{T_1}}.$$

因此$z(t) = 0\ (t \in [0, T_1])$．

参考文献

[1] Woinosky-Krieger, S., The effect of axial force on the vibraton of hinged bars, *J. Appl. Mech.*, 17,(1950),35—36.

[2] Medeiros, L. A., On a new class of nonlinear wave equations, *J. Math. Appl.*, 69 (1979), 252—262.

[3] Menzala, G. P., On global classical solutions of a nonlnear wave equation, *J. Appl. Anal.*, 10(1980),179—195.

[4] Biler, J.M., Remark on the decay for damped string and beam equations, *Nonl. Anal.*, 10 (1986),839—842.

[5] Brito, E. H., Decay estimates for generalizld damped and extensible string and beam equation, *Nonl. Anal.*, 8 (1984),1489—1496.

[6] Brito, E. H.,Nonlinlar initial-boundary value problems, *Nonl. Anal.*, 11 (1987), 125-137.

[7] Pereira, D. C., Exitence. uniqueness and asymptotic behavior for solutions of the nonlinear beam equation, *Nonl. Anal.*, 14 (1990), 613—623.

[8] Vasconcellos, C. F., On a nonlinear wave equation in unbounded domains, *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, 2 (11)(1988),335—342.

[9] Goldstein, J., Time dependent hyperbolic equation, *J. Func. Anal.*, 4 (1969), 31—49.

On Nonlinear Hyperbolic Equation in Unbounded Domain

Geng Di   Qu Chang-zheng

(Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

The following nonlinear hyperbolic equation is discussed in this paper:

$$u_{tt} + A^2 u + M(x, \|A^{\frac{1}{2}} u\|_2^2) Au = 0$$

where $A = -\Delta + I$ and $x \in \mathbf{R}^n$. The model comes from the transverse deflection equation of an extensible beam. We prove that there exists a unique local solution of the above equation as M depends on x.

Key words nonlinear hyperbolic equaions, unbounded domain energy estimation, fixed point method