

# 非牛顿流体在偏心环空中 轴向层流的摄动解

岳湘安 孔祥言 陈家琅

(中国科技大学) (大庆石油学院)

(蔡树棠推荐, 1991年4月1日收到)

## 摘 要

本文应用摄动方法研究了非牛顿流体在偏心环形空间中轴向层流的流动规律。文中以相对偏心度 $e$ 作为摄动参数, 得到了其流场、极值速度、压力梯度等流动参数的一阶解。

**关键词** 非牛顿流体 偏心环空 摄动方法

非牛顿流体在偏心环形空间中的流动问题具有非常重要的应用背景。例如, 在石油工业的钻井和固井施工中, 钻杆或套管与井筒之间所形成的环形空间一般都是偏心的, 在定向井和水平井中这种偏心尤为严重。作为非牛顿流体的泥浆在这样的环形空间中流动, 对于钻井时的携屑能力及固井时的顶替效率都具有很大影响。偏心环空流动问题已成为工程实际中迫切需要解决的问题。近年来, 许多研究者以不同的方法对此进行了研究<sup>[1][2][3]</sup>, 得出了一些对于生产实际有价值的结论。然而, 由于该问题的复杂性, 使得在理论上求解十分困难, 而不得不作许多简化。例如在运动方程中忽略了 $T_{rz}/r$ 和 $r^{-1}\partial T_{\theta z}/\partial\theta$ 项; 假设速度分布对称于环空几何中心等。显然, 这些假设使其结果的准确性与应用范围受到了很大限制。本文试图用摄动方法来求解该问题, 给出非牛顿流体在偏心环形空间中轴向层流各流动参数的摄动解。

## 一、流动模型

### 1. 物理模型

作为非牛顿流体的泥浆在如图1所示的偏心环形空间中作轴向稳定层流流动, 即对于所有的物理量 $\partial/\partial t \equiv 0$ ; 且轴向速度均匀, 即 $\partial v/\partial z \equiv 0$ ; 并假设压力在环空截面上均布, 即 $\partial p/\partial\theta = \partial p/\partial r \equiv 0$ 。该偏心环形空间的几何特征由以下几何量而确定:

- (1) 内外圆筒半径  $R_i, R_o$ ;
- (2) 偏心距  $\delta$ ;
- (3) 外边界  $r_o$ 。

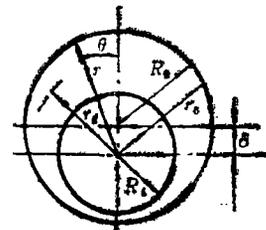


图 1

按图1所示的柱坐标系, 偏心环形空间的外筒边界方程为:

$$r_o = (R_o^2 - \delta^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + \delta \cos \theta \quad (1.1)$$

设沿径向、周向及纵向的速度分量依次为  $u, v, w$ , 其流速场为:

$$\mathbf{V} = [u(r, \theta), v(r, \theta), w(r, \theta)] \quad (1.2)$$

## 2. 数学模型

### (1) 本构方程

在此, 我们研究符合幂律模式的非牛顿流体. 其本构方程为

$$\mathbf{T} = K |\mathbf{I}|^{n-1} \mathbf{A}_1 \quad (1.3)$$

式中:  $\mathbf{T}$ ——幂律流体的偏应力张量;  $K$ ——稠度系数;  $\mathbf{A}_1$ ——一阶Rivlin-Ericksen张量;  $\mathbf{I}$ —— $\mathbf{A}_1$ 的第二不变量,  $\mathbf{I} = \left[ \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^2 \right]^{1/2}$ ;  $n$ ——幂指数.

式中的  $\mathbf{I}$  是  $\mathbf{A}_1$  的第二不变量,  $\mathbf{I} = \left[ \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}_1^2 \right]^{1/2}$ ;  $n$  是幂指数.

### (2) 控制方程

$$\text{连续性方程 } \text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (1.4)$$

$$\text{运动方程 } \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \text{div } \mathbf{T} \quad (1.5)$$

根据如前所述假设条件, 方程(1.4)、(1.5)可简化成为

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \quad (1.6a)$$

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} = u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (1.6b)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{z T_{r\theta}}{r} = u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (1.6c)$$

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{T_{rz}}{r} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (1.6d)$$

### (3) 定解条件

$$\mathbf{V} \Big|_{r=R_i} = \mathbf{V} \Big|_{r=r_o} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r} \Big|_{r=r_d} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\pi} = 0 \quad (1.7a \sim c)$$

式中  $r_d$  为使  $\partial \mathbf{V} / \partial r = 0$  的径向坐标. 实际上, 对应于速度分量  $u, v$  及  $w$ ,  $r_d$  应有三个不同的值. 但后面的研究表明, 本文中只需考虑轴向速度分量  $w$ . 所以可将其记为  $r_d$ , 而不至于引起混乱.

## 二、方程的摄动

选取  $\varepsilon = \delta / R_o$  为摄动参数, 则有:

$$r_o = R_o [1 + \varepsilon \cos \theta + O(\varepsilon^2)]$$

显然, 该问题的零阶解即为同心环形空间的解. 其速度可写成

$$u = \varepsilon u^{(1)}(r, \theta) + O(\varepsilon^2), \quad v = \varepsilon v^{(1)}(r, \theta) + O(\varepsilon^2), \quad w = w^{(0)}(r) + \varepsilon w^{(1)}(r, \theta) + O(\varepsilon^2) \quad (2.1a \sim c)$$

令  $\eta = K |\mathbf{I}|^{n-1}$ , 则有

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 + O(\varepsilon^2) \quad (2.2)$$

$$\text{其中 } \eta_0 = \frac{K}{R_0^{n-1}} \left| \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right|^{n-1}, \quad \eta_1 = (n-1)\eta_0 \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} / \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \quad (2.3a, b)$$

其中  $\xi = r/R_0$ .

将式(2.3)代入式(1.3), 可得:

$$T_{rr} = 2\varepsilon\eta_0 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} + O(\varepsilon^2), \quad T_{\theta\theta} = 2\varepsilon\eta_0 \left( \frac{\partial v^{(1)}}{r\partial\theta} + \frac{u^{(1)}}{r} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.4a, b)$$

$$T_{r\theta} = \varepsilon\eta_0 \left( \frac{\partial u^{(1)}}{r\partial\theta} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial r} - \frac{v^{(1)}}{r} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.4c)$$

$$T_{\theta z} = \varepsilon\eta_0 \frac{\partial w^{(1)}}{r\partial\theta} + O(\varepsilon^2) \quad (2.4d)$$

$$T_{rz} = \eta_0 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} + \varepsilon \left( \eta_0 \frac{\partial w^{(1)}}{\partial r} + \eta_1 \frac{\partial w^{(0)}}{\partial r} \right) + O(\varepsilon^2) \quad (2.4e)$$

将式(2.4)代入式(1.6)可得零阶与一阶定解问题.

### 1. 零阶控制方程及边界条件

$$0 = \frac{R_0^{n-1}\Phi}{K} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \xi \left| \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right|^{n-1} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right] \quad (2.5a)$$

$$w^{(0)} \Big|_{\xi=1} = 0, \quad w^{(0)} \Big|_{\xi=\xi_d} = 0, \quad \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_d} = 0 \quad (2.5b \sim d)$$

式中:  $\Phi = \rho g_s - \frac{\partial \rho}{\partial z}$ ;  $\xi_i = R_i/R_0$ ;  $\xi_d = r_d/R_0$ ;  $r_d$ 为使  $\partial w/\partial r = 0$ 的径向坐标.

### 2. 一阶控制方程及边界条件

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{u^{(1)}}{\xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.6a)$$

$$2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left| \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right|^{n-1} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} \right] + \left| \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right|^{n-1} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial u^{(1)}}{\xi \partial \theta} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{v^{(1)}}{\xi} \right] \\ + \frac{1}{\xi} \left| \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right|^{n-1} \left[ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{v^{(1)}}{\xi} \right] = 0 \quad (2.6b)$$

$$\frac{2}{\xi} \left| \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right|^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \theta} + u^{(1)} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left| \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right|^{n-1} \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\xi \partial \theta} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{v^{(1)}}{\xi} \right) \right] \\ + \frac{2}{\xi} \left| \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right|^{n-1} \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\xi \partial \theta} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{v^{(1)}}{\xi} \right) = 0 \quad (2.6c)$$

$$n \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \xi \left| \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right|^{n-1} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{\xi^2} \left| \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \theta^2} \\ = u^{(1)} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{v^{(1)}}{\xi} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial \theta} \quad (2.6d)$$

$$u^{(1)}(\xi_0, \theta) = v^{(1)}(\xi_0, \theta) = 0, \quad u^{(1)}(\xi_i, \theta) = v^{(1)}(\xi_i, \theta) = 0 \quad (2.7a, b)$$

$$w^{(1)}(\xi_0, \theta) = -w^{(0)}(\xi_0, \theta)/\varepsilon \quad (2.7c)$$

$$w^{(1)}(\xi, \theta) = 0, \quad \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_d} = 0, \quad \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0 \quad (2.7d \sim f)$$

### 三、零阶解

笔者在文献[4]中曾研究了幂律流体在同心环形空间中的轴向层流, 得到了以级数形式表达的速度分布的解析解:

$$w_i^{(0)} = W_* \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \frac{\xi^{2k+1-m} - \xi_i^{2k+1-m}}{2k+1-m} \xi_d^{2m-2k} \quad (\xi_i \leq \xi \leq \xi_d) \quad (3.1)$$

$$w_o^{(0)} = W_* \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \frac{1 - \xi^{m+1-2k}}{m+1-2k} \xi_d^{2k} \quad (\xi_d < \xi \leq 1) \quad (3.2)$$

式中  $m = \frac{1}{n}$ ;  $W_* = R_0 \left( \frac{\Phi R_0}{2K} \right)^m$ ;  $f^k(0) = (-1)^k m(m-1) \cdots (m-k+1)$ .

此式即为偏心环空流的零阶解。

### 四、一阶解

在方程组(2.6)中, 方程(2.6d)是一个独立的、关于  $w^{(1)}$  的线性方程, 它与边界条件式(2.7c)、(2.7d)、(2.7e)构成了关于  $w^{(1)}$  的定解问题; 而方程(2.6b)、(2.6c)是  $u^{(1)}$ 、 $v^{(1)}$  的线性齐次方程组, 它在齐次边界条件(2.7a)、(2.7b)下只有零解

$$u^{(1)} = v^{(1)} \equiv 0 \quad (4.1)$$

即: 非牛顿流体在环空中流动, 由于偏心而产生的二次流只是  $\epsilon$  的二阶小量, 从而证明了本文作者在文献[3]中忽略  $u$ 、 $v$  假设的合理性。

方程(2.6d)与其相应的边界条件可分成以  $\xi_d$  为界的内外两个区域内的定解问题:

#### 1. 内区

$$n \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \xi \left( \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial \xi} \right)^{n-1} \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial \xi} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 w_i^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\xi_i \leq \xi \leq \xi_d) \quad (4.2)$$

$$w_i^{(1)}(\xi, \theta) = 0, \quad \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_d} = 0, \quad \frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0 \quad (4.3a \sim c)$$

#### 2. 外区

$$n \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \xi \left( -\frac{\partial w_o^{(0)}}{\partial \xi} \right)^{n-1} \frac{\partial w_o^{(1)}}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{\xi^2} \left( -\frac{\partial w_o^{(0)}}{\partial \xi} \right)^{n-1} \frac{\partial^2 w_o^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\xi_d < \xi \leq \xi_0) \quad (4.4)$$

$$w_o^{(1)}(\xi_0, \theta) = -\frac{1}{\epsilon} w_o^{(0)}(\xi_0), \quad \frac{\partial w_o^{(1)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_d} = 0, \quad \frac{\partial w_o^{(1)}}{\partial \xi} \Big|_{\theta=0} = 0 \quad (4.5a \sim c)$$

显然, 齐次方程(4.2)在齐次边界条件下只有零解, 因此只需求解流场外部区域内的一阶解  $w_o^{(1)}$  (为书写方便, 省去下标“o”, 将其记为  $w^{(1)}$ ), 设  $y = \xi_d/\xi$ , 并利用文献[4]中的有

关结果得外区域定解问题为

$$n(y^2 - y^4) \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2} + [(1 - 2n)y^3 + y] \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y} + (1 - y^2) \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4.6)$$

$$w^{(1)}(y_0, \theta) = -\frac{1}{\varepsilon} w^{(0)}(y_0), \quad \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0, \quad \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0 \quad (4.7a \sim c)$$

其中  $y_0 = \varepsilon_d / \varepsilon_0$ .

将  $w^{(1)}$  展成 Fourier 级数

$$w^{(1)}(y, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} [F_j(y) \cos j\theta + G_j(y) \sin j\theta] \quad (4.8)$$

由于  $w^{(1)}$  为  $\theta$  的偶函数, 所以

$$G_j = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.9)$$

$$\text{即: } w^{(1)}(y, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(y) \cos j\theta \quad (4.10)$$

$$\text{其中 } F_j(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} w^{(1)}(y, \theta) \cos j\theta d\theta \quad (4.11)$$

由边界条件(4.7a),

$$w^{(1)}(y_0, \theta) = -w_0^{(0)}(y_0) / \varepsilon$$

依  $\xi_0 = 1 + \varepsilon \cos \theta$  可设

$$\xi_d = a_0 + a_1 \cos \theta \quad (4.12a)$$

$$\text{其中 } a_0 = \xi_d \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}, \quad a_1 = \xi_d \Big|_{\theta=\pi} - \xi_d \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = O(\varepsilon) \quad (4.12b, c)$$

将  $\xi_d, \xi_0$  代入式(3.2)并略去  $O(\varepsilon^2)$  项, 可得

$$w^{(0)}(\xi_0) = -W_* \varepsilon \cos \theta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} a_0^{2k} \quad (4.13)$$

$$\text{所以 } w^{(1)}(y_0, \theta) = W_* \cos \theta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} a_0^{2k} \quad (4.14)$$

现将式(4.10)代入式(4.6)

$$\begin{aligned} n(y^2 - y^4) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial^2 F_j(y)}{\partial y^2} \cos j\theta + [(1 - 2n)y^3 + y] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial F_j(y)}{\partial y} \cos j\theta \\ - (1 - y^2) \sum_{j=0}^{\infty} F_j(y) j^2 \cos j\theta = 0 \end{aligned}$$

$$\text{即 } n(y^2 - y^4) \frac{\partial^2 F_j(y)}{\partial y^2} + [(1 - 2n)y^3 + y] \frac{\partial F_j(y)}{\partial y} - (1 - y^2) j^2 F_j(y) = 0 \quad (4.15)$$

令:

$$D_j = n(y^2 - y^4) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + [(1 - 2n)y^3 + y] \frac{\partial}{\partial y} - j^2(1 - y^2) \quad (4.16)$$

由边界条件式(4.13)可得关于  $F_j$  的定解问题如下:

$$D_0 F_0 = 0 \quad (4.17)$$

$$\left. \frac{\partial F_0}{\partial y} \right|_{y=y_0} = 0, \quad F_0 \Big|_{y=y_0} = 0 \quad (4.18a, b)$$

$$D_1 F_1 = 0 \quad (4.19)$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_{y=y_0} = 0, \quad F_1 \Big|_{y=y_0} = -e \sum_{k=0}^l \frac{f^k(0)}{k!} a_0^{2k} \quad (4.20a, b)$$

$$D_j F_j = 0 \quad (4.21)$$

$$\left. \frac{\partial F_j}{\partial y} \right|_{y=y_0} = 0, \quad F_j \Big|_{y=y_0} = 0 \quad (4.22a, b)$$

显然, 只有  $F_1$  有非零解 (为便于书写, 现将  $F_1(y)$  写成  $F$ ), 即

$$w^{(1)}(y, \theta) = W_* F \cos \theta \quad (4.23)$$

由式 (4.15) 可得关于  $F$  的方程

$$n(y^2 - y^4) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [(1 - 2n)y^3 + y] \frac{\partial F}{\partial y} - (1 - y^2) F = 0 \quad (4.24)$$

设  $z = 1 - y$ , 上式成为

$$\begin{aligned} & (2nz - 5nz^2 + 4nz^3 - nz^4) \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - [2(n-1) - 2(2-3n)z \\ & + 3(1-2n)z^2 - (1-2n)z^3] \frac{\partial F}{\partial z} - (2z - z^2) F = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

注意到在  $[\xi_a, \xi_0]$  内  $z < 1$ , 将  $F$  设为  $z$  的级数形式, 即:

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^{\mu+k} \quad (4.26)$$

下面我们来确定式 (4.26) 中的各系数  $\beta_k$ . 将式 (4.26) 代入式 (4.25) 得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \{ 2(\mu+k)[n(\mu+k) - 1]z^{\mu+k-1} + (\mu+k)[(4-n) - 5n(\mu+k)]z^{\mu+k} \\ & + [4n(\mu+k)^2 + (2n-3)(\mu+k) - 2]z^{\mu+k+1} \\ & + [(1-n)(\mu+k) - n(\mu+k)^2 + 1]z^{\mu+k+2} \} = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

由上式可知, 若  $\beta_0 \neq 0$ , 应有  $\mu = 0$  或  $\mu = 1/n$ . 现取  $\mu = 0$ , 则式 (4.27) 为

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \{ 2k(nk-1)z^{k-1} + k[4-n(1+5k)]z^k + [n(4k^2+2k) - 3k-2]z^{k+1} \\ & + (k+1)(1-nk)z^{k+2} \} = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

由边界条件  $\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{z=0} = 0$

可知,  $\beta_1 = 0$

若使式 (4.28) 恒成立, 必有:

$$\begin{aligned} & \beta_{k-2}(k-1)[1-n(k-2)] + \beta_{k-1}[n(4k^2-6k+2) - 3k+1] \\ & + \beta_k k[4-n(1+5k)] + \beta_{k+1}(2k+2)[(k+1)n-1] = 0 \end{aligned}$$

由此可得式 (4.26) 中各系数的递推公式为

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{1}{2(2n+1)}\beta_0 \quad (4.29a, b)$$

$$\beta_{k+1} = \frac{1}{2(k+1)[(k+1)n-1]} \{ (k-1)[n(k-2)-1]\beta_{k-2} \\ + [3k-1-n(4k^2-6k+2)]\beta_{k-1} + k[n(1+5k)-4]\beta_k \} \\ (k=2, 3, 4, \dots) \quad (4.29c)$$

其中  $n \neq \frac{1}{k+1}$

由边界条件:

$$F(y_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} a_0^{2k} \quad (4.30)$$

又由式(4.26)得:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k y_0^k = \frac{f^k(0)}{k!} a_0^{2k} \quad (4.31)$$

解出 $\beta_0$ 以及 $\beta_k$ , 可唯一地确定 $F$ . 所以, 由式(4.23)及式(4.26)可得

$$w^{(1)}(\xi, \theta) = W_* \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k (\xi_d/\xi)^k \cos\theta \quad (4.32)$$

速度场精确到一阶的近似解为

$$w_i = W_* \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \frac{\xi_d^{2k+1-m} - \xi_i^{2k+1-m}}{2k+1-m} \xi_d^{2m-2k} \quad (\xi_i \leq \xi \leq \xi_d) \quad (4.33a)$$

$$w_o = W_* \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \frac{\xi_d^{2k}}{m+1-2k} (1 - \xi^{m+1-2k}) + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left( \frac{\xi_d}{\xi} \right)^k \cos\theta \right\} \\ (\xi_d < \xi \leq \xi_o) \quad (4.33b)$$

## 五、流场特性

### 1. $\xi_d$

式(4.33)虽然给出了速度场的表达式, 但其中还有一个特定参数 $\xi_d$ .  $\xi_d$ 可由速度场的连续性条件 $w_i(\xi_d) = w_o(\xi_d)$ 求出. 即:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \left[ \frac{\xi_d^{2k+1-m} - \xi_i^{2k+1-m}}{2k+1-m} \xi_d^{2m-2k} - \frac{1 - \xi_d^{m+1-2k}}{m+1-2k} \xi_d^{2k} \right] - \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cos\theta = 0 \quad (5.1)$$

式(5.1)的部分结果如图2所示.

得到 $\xi_d$ 后, 由式(4.33)可以很容易的求出其速度分布. 图3示出了部分 $\theta=0$ ,  $\theta=\pi$ 的速度分布. 与文献[3]中所计算的 $\xi_d$ 相比, 式(5.1)的结果稍大些. 即由于考虑了 $\partial T_{\theta z} / \partial \theta$ 的影响, 所计算出的 $\partial w / \partial r = 0$ 的点向环空几何中心靠近.

### 2. 极值速度

我们定义 $\xi_d = \xi_d(\theta)$ 处流体质点的速度为极值速度. 所以, 幂律流体在偏心环空中流动的极值速度可由下式求得:

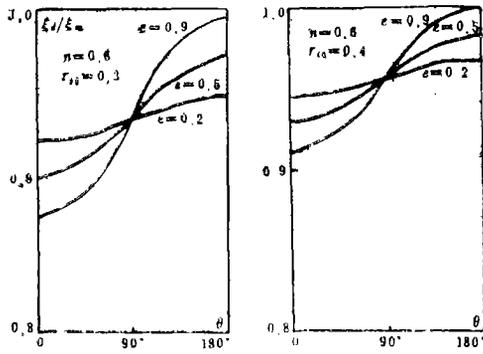


图 2

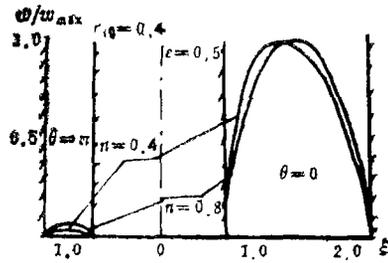


图 3

$$w_d = W_* \xi_d^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \frac{1}{2k+1-m} \left[ 1 - \left( \frac{\xi_d}{\xi_d} \right)^{2k+1-m} \right] \quad (5.2a)$$

$$\text{或} \quad w_d = W_* \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \frac{\xi_d^{2k}}{m+1-2k} (1 - \xi_d^{m+1-2k}) + e \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cos \theta \right] \quad (5.2b)$$

3.  $(w_d)_{\min}/(w_d)_{\max}$

在工程实际中，人们最为关心的往往是流场中的最大极值速度与最小极值速度。从式(5.2)中求出 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 时的 $w_d$ ，并令二者比值为：

$$\Theta = \frac{(w_d)_{\max}}{(w_d)_{\min}} = \frac{w_d(0)}{w_d(\pi)} \quad (5.3)$$

将其部分结果绘于图4中，可见偏心度对于流场特性的影响是非常大的。

4. 等速线

由式(4.33)求出流场中的最大流速：

$$w_{\max} = w_d(0) = W_* \Gamma_{\max} \quad (5.4)$$

式中：

$$\Gamma_{\max} = \xi_d^{m+1}(0) \sum_{k=0}^l \frac{f^k(0)}{k!} \frac{1}{2k+1-m} \left[ 1 - \left( \frac{\xi_d}{\xi_d(0)} \right)^{2k+1-m} \right]$$

将式(4.34a)与(4.34b)分别与式(5.4)相比，得：

$$\psi_i = w_i/w_{\max} = \xi_d^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \frac{\xi_d^{2k+1-m} - \xi_d^{2k+1-m}}{(2k+1-m)\xi_d^{2k+1-m}} / \Gamma_{\max} \quad (5.5a)$$

$$\psi_o = w_o/w_{\max} = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \frac{\xi_d^{2k}}{m+1-2k} (1 - \xi_d^{m+1-2k}) + e \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left( \frac{\xi_d}{\xi} \right)^k \cos \theta \right] / \Gamma_{\max} \quad (5.5b)$$

给 $\psi_i$ 与 $\psi_o$ 赋以一系列相同的值， $\psi_i, \psi_o \in [0, 1]$ ，可解出与之对应的等速线。作为例子，我们计算了 $n=0.8, r_{10}=R_1/R_0=0.3, e=0.5$ 的等速线（如图5所示），与文献[3]中的结果进

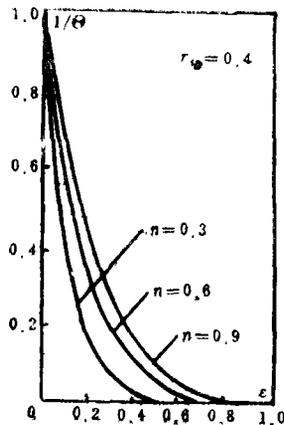


图 4

行比较，二者形状相似，但其数值略有差异。

### 六、截面平均流速与压力梯度

将式(4.33)在整个流通截面上积分，便可得到其截面平均流速。

$$\bar{W} = \frac{2W_*}{\pi(1-\xi_1^2)} \int_0^\pi (\Sigma_1 + \Sigma_2) d\theta$$

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \left\{ \frac{\xi_d^{2m-2k}}{2k+1-m} \left[ \frac{1}{2k+3-m} \cdot (e_d^{2k+3-m} - \xi_1^{2k+3-m}) - \frac{1}{2} \xi_1^{2k+1-m} (\xi_d^2 - \xi_1^2) \right] + \frac{\xi_d^{2k}}{m+1-2k} \left[ \frac{1}{2} (\xi_0^2 - \xi_d^2) - \frac{1}{m+3-2k} (\xi_0^{m+3-2k} - \xi_d^{m+3-2k}) \right] \right\}$$

$$\Sigma_2 = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{2-k} \xi_d^k (\xi_0^{2-k} - \xi_d^{2-k}) \cos\theta$$

利用式(1.7)及式(4.12)整理上式，作为一阶近似，在积分时只保留 $O(\varepsilon)$ 项，

$$\bar{W} = \frac{2W_*}{(1-\xi_1^2)} (G_0 + G_\varepsilon) \tag{6.1}$$

$$G_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} \left[ \frac{a_0^{3+m} - \xi_1^{2k+3+m} \cdot a_0^{2m-2k}}{(2k+1-m)(2k+3-m)} - \frac{\xi_1^{2k+1-m} a_0^{2m-2k} (a_0^2 - \xi_1^2)}{2(2k+1-m)} + \frac{a_0^{2k} (1-a_0^2)}{2(m+1-2k)} - \frac{a_0^{2k} - a_0^{m+3}}{(m+1-2k)(m+3-2k)} \right]$$

$$G_\varepsilon = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{2-k} \left\{ \frac{a_0^k}{2} \left[ (2-k)\varepsilon + k \left( \frac{a_1}{a_0} \right) \right] + a_1 a_0 \right\}$$

对于一个确定的流动，式(6.1)即为偏心环空中截面平均流速与压力梯度的关系式。长期以来，由于没有适用的公式，工程应用上不得不以同心环空中的关系式来计算偏心环空中非牛顿液的流量与压力梯度。下面我们来讨论这种工程近似是否合理。

用文献[4]中关于同心环空中截面平均流速 $\bar{W}_0$ 与式(6.1)相比(设 $\bar{W} = \bar{W}_\varepsilon$ )：

$$\lambda = \bar{W}_0 / \bar{W}_\varepsilon \tag{6.2}$$

在图6中给出了式(6.2)的部分结果。可见，在计算平均流速或压力梯度时，由于偏心的影响是不可忽略的。尤其在偏心度较大时，上述工程近似是不合理的。

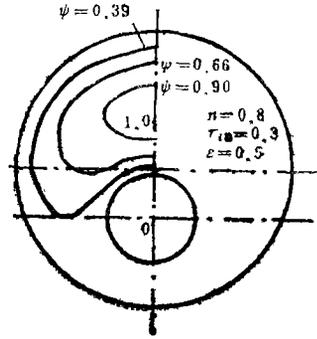


图 5

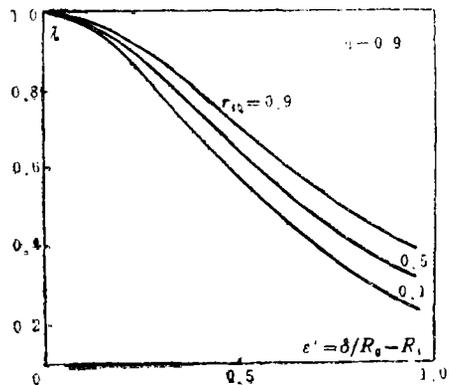


图 6

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Redberger, P. J. and M. E. Charles, Axial laminar flow in a circular pipe containing a fixed eccentric core, *Canada J. Chem. Eng.*, (1962), 148.
- [ 2 ] Lyoho, A. W., An accurate slot-flow model for non-Newtonian fluid flow through eccentric annuli, *SPEJ.*, (1981), 565.
- [ 3 ] Yue Xiang-an, Chen Jia-lang and Huang Kuang-dao, Velocity profiles for axial laminar flow of power-law fluids through eccentric annuli, *J. Hydrodynamics*, 4 (1989), 79.
- [ 4 ] 岳湘安、郝江平, 非牛顿流体在环形空间中轴向层流的精确解, *水动力学研究与进展*, 1(2) (1986), 51.
- [ 5 ] Van Dyke, M., *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, The Parabolic Press (1975).

## Perturbation Solution of Non-Newtonian Fluid Axial Laminar Flow through Eccentric Annuli

Yue Xiang-an Kong Xiang-yan  
(*University of Science and Technology of China, Hefei*)

Chen Jia-lang  
(*Daqing Petroleum Institute, Heilongjiang*)

### Abstract

Using the perturbation method the axial laminar flow of non-Newtonian fluid through an eccentric annulus is studied in the present paper. The relative eccentricity  $e$  is taken as a perturbation parameter, and the first order perturbation solutions of the problem, such as velocity field, limit velocity and pressure gradient, are all obtained.

**Key words** non-Newtonian fluid, eccentric annulus, perturbation method