应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

复合材料平面断裂中的J积分*

杨维阳　张少琴　贾元铎

（太原重型机械学院，1991年2月11日收到）

摘　要

本文采用复变函数方法，首先将裂纹尖端应力和位移代入J积分的一般公式得到了线弹性正交异性复合材料单向板复合型裂纹尖端的J积分的复形式，其次证明了该J 积分的路径无关性，最后推出了该J积分的计算公式．作为特例，给出了线弹性正交异性复合材料单向板Ⅰ，Ⅱ型裂纹尖端的J积分的复形式，路径无关性和计算公式．

关键词　J积分　裂纹尖端　复合材料　复变函数方法

一、应 力 和 位 移

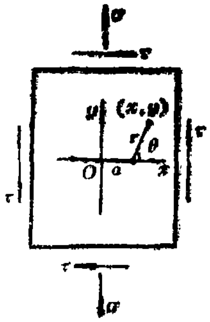

图 1

设线弹性正交异性复合材料单向板，含长度$2a$的中心贯穿裂 纹，同时受正应力σ和剪应力τ作用，坐标轴与弹性主方向重合，如图 1 所示．其裂纹近尖端附的应力和位移是[1],[2]

$$\sigma_x=\frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi}}{\rm Re}\left\{\frac{s_1s_2}{s_1-s_2}\left[\frac{s_2}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}-\frac{s_1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}$$
$$+\frac{K_{\rm II}}{\sqrt{2\pi}}{\rm Re}\left\{\frac{1}{s_1-s_2}\left[\frac{s_2^2}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}-\frac{s_1^2}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}\tag{1.1a}$$

$$\sigma_y=\frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi}}{\rm Re}\left\{\frac{1}{s_1-s_2}\left[\frac{s_1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}-\frac{s_2}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}$$
$$+\frac{K_{\rm II}}{\sqrt{2\pi}}{\rm Re}\left\{\frac{1}{s_1-s_2}\left[\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}\tag{1.1b}$$

$$\tau_{xy}=\frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi}}{\rm Re}\left\{\frac{s_1s_2}{s_1-s_2}\left[\frac{1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}$$
$$+\frac{K_{\rm II}}{\sqrt{2\pi}}{\rm Re}\left\{\frac{1}{s_1-s_2}\left[\frac{s_1}{(z_1-a)^{\frac{1}{2}}}-\frac{s_2}{(z_2-a)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}\tag{1.1c}$$

和　$$u=K_{\rm I}\sqrt{\frac{2}{\pi}}{\rm Re}\left\{\frac{1}{s_1-s_2}[s_1(b_{11}s_2^2+b_{12})(z_2-a)^{\frac{1}{2}}-s_2(b_{11}s_1^2+b_{12})(z_1-a)^{\frac{1}{2}}]\right\}$$

* 汤任基推荐．

$$+K_{\rm II}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,{\rm Re}\left\{\frac{1}{s_1-s_2}\left[(b_{11}s_2^2+b_{12})(z_2-a)^{1/2}-(b_{11}s_1^2+b_{12})(z_1-a)^{1/2}\right]\right\} \tag{1.2a}$$

$$v=K_{\rm I}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,{\rm Re}\left\{\frac{1}{s_1-s_2}\left[\frac{s_1}{s_2}(b_{12}s_2^2+b_{22})(z_2-a)^{1/2}-\frac{s_2}{s_1}(b_{12}s_1^2+b_{22})(z_1-a)^{1/2}\right]\right\}$$

$$+K_{\rm II}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,{\rm Re}\left\{\frac{1}{s_1-s_2}\left[\frac{1}{s_2}(b_{12}s_2^2+b_{22})(z_2-a)^{1/2}-\frac{1}{s_1}(b_{12}s_1^2+b_{22})(z_1-a)^{1/2}\right]\right\} \tag{1.2b}$$

其中应力强度因子$K_{\rm I}$，$K_{\rm II}$为

$$K_{\rm I}=\sigma\sqrt{\pi a}\,,\quad K_{\rm II}=\tau\sqrt{\pi a} \tag{1.3}$$

Re{　}表示对{　}内的复数取实部．复变量z_1，z_2与(x,y)以及(r,θ)之间有关系

$$z_j-a=x-a+s_jy=r(\cos\theta+s_j\sin\theta)\qquad(j=1,2) \tag{1.4}$$

s_1,s_2是下列特征方程的根：

$$b_{11}s^4+(2b_{12}+b_{66})s^2+b_{22}=0 \tag{1.5}$$

$b_{11},b_{12},b_{22},b_{66}$是单向板的柔度系数，有

$$b_{11}=\frac{1}{E_x},\ b_{12}=-\frac{\nu_{xy}}{E_x}=-\frac{\nu_{yx}}{E_y},\quad b_{22}=\frac{1}{E_y},\quad b_{66}=\frac{1}{G_{xy}} \tag{1.6}$$

$E_x,E_y,\nu_{xy},\nu_{yx},G_{xy}$是单向板的弹性常数．

记　$$\varDelta=\beta_0^2-\alpha_0^2 \tag{1.7}$$

其中　$$\alpha_0=\left(\frac{b_{22}}{b_{11}}\right)^{1/2},\ \beta_0=\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}} \tag{1.8}$$

则当$\varDelta>0$即$\beta_0>\alpha_0$时，(1.5)有两对共轭纯虚根：

$$s_1=i[\beta_0-(\beta_0^2-\alpha_0^2)^{1/2}]^{1/2},\qquad s_3=\bar{s}_1 \tag{1.9a}$$

$$s_2=i[\beta_0+(\beta_0^2-\alpha_0^2)^{1/2}]^{1/2},\qquad s_4=\bar{s}_2 \tag{1.9b}$$

当$\varDelta<0$即$\beta_0<\alpha_0$时，(1.5)有两对共轭复根：

$$s_1=\left(\frac{\alpha_0-\beta_0}{2}\right)^{1/2}+i\left(\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}\right)^{1/2},\qquad s_3=\bar{s}_1 \tag{1.10a}$$

$$s_2=-\left(\frac{\alpha_0-\beta_0}{2}\right)^{1/2}+i\left(\frac{\alpha_0+\beta_0}{2}\right)^{1/2},\qquad s_4=\bar{s}_2 \tag{1.10b}$$

易知s_1,s_2之间有关系

$$s_1s_2=-\alpha_0=-\left(\frac{b_{22}}{b_{11}}\right)^{1/2} \tag{1.11a}$$

$$(s_1+s_2)i=-\sqrt{2}(\alpha_0+\beta_0)^{1/2}=-\sqrt{2}\left[\left(\frac{b_{22}}{b_{11}}\right)^{1/2}+\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}}\right]^{1/2} \tag{1.11b}$$

$$(s_1-s_2)^2=2(\alpha_0-\beta_0)=2\left[\left(\frac{b_{22}}{b_{11}}\right)^{1/2}-\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}}\right] \tag{1.11c}$$

$$s_1^2+s_2^2=-2\beta_0=-\frac{2b_{12}+b_{66}}{b_{11}} \tag{1.11d}$$

线弹性正交异性复合材料单向板的Ⅰ型裂纹尖端附近的应力和位移，在(1.1)，(1.2)中取$K_{\rm II}=0$即$\tau=0$．其Ⅱ型裂纹尖端的应力和位移，在(1.1)，(1.2)中取$K_{\rm I}=0$即$\sigma=0$．

二、J积分的复形式

在线弹性正交异性复合材料平面断裂中，J积分的一般公式是[3],[4]

$$J=\int_{\Gamma}\left[(b_{11}\sigma_x+b_{12}\sigma_y)\tau_{xy}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial x}\right]dx$$

$$+\left[-\frac{1}{2}(b_{11}\sigma_x^2-b_{12}\sigma_y^2+b_{66}\tau_{xy}^2)+\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right]dy \tag{2.1}$$

下面的推导需要利用下列复变函数公式：

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}[C(z_j-a)^{1/2}]=\mathrm{Re}\left[\frac{C}{2(z_j-a)^{1/2}}\right],\qquad C=\mathrm{const} \tag{2.2a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}[C(z_j-a)^{1/2}]=\mathrm{Re}\left[\frac{s_jC}{2(z_j-a)^{1/2}}\right],\qquad C=\mathrm{const} \tag{2.2b}$$

$$\frac{1}{z_j-a}=\mathrm{Re}^2\frac{1}{(z_j-a)^{1/2}}-\mathrm{Im}^2\frac{1}{(z_j-a)^{1/2}}$$

$$+i\cdot 2\mathrm{Re}\frac{1}{(z_j-a)^{1/2}}\mathrm{Im}\frac{1}{(z_j-a)^{1/2}} \tag{2.3}$$

$$dz_j=dx+s_jdy \tag{2.4}$$

将(1.1)，(1.2)代入(2.1)，利用(1.8)～(1.11)和(2.2)～(2.4)，经整理化简得到线弹性正交异性复合材料单向板复合型裂纹尖端的J积分的复形式为

$$J=\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{2\pi}\frac{b_{22}}{2}\frac{(s_1+s_2)i}{s_1s_2}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{s_1-s_2}\left(s_1\int_{\Gamma}\frac{1}{z_2-a}dz_2\right.\right.$$

$$\left.\left.-s_2\int_{\Gamma}\frac{1}{z_1-a}dz_1\right)\right]+\frac{K_{\mathrm{I}}K_{\mathrm{II}}}{2\pi}\frac{1}{(s_1-s_2)^2}\left[\frac{b_{22}}{s_1s_2}\right.$$

$$\cdot\mathrm{Re}\left(s_1^2\int_{\Gamma}\frac{1}{z_2-a}dz_2+s_2^2\int_{\Gamma}\frac{1}{z_1-a}dz_1\right)-b_{11}s_1s_2\mathrm{Re}\left(s_2^2\int_{\Gamma}\frac{1}{z_2-a}dz_2\right.$$

$$\left.\left.+s_1^2\int_{\Gamma}\frac{1}{z_1-a}dz_1\right)\right]+\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{2\pi}\frac{b_{11}}{2}(s_1+s_2)i$$

$$\cdot\mathrm{Im}\left[\frac{1}{s_1-s_2}\left(s_2\int_{\Gamma}\frac{1}{z_2-a}dz_2-s_1\int_{\Gamma}\frac{1}{z_1-a}dz_1\right)\right] \tag{2.5}$$

显然地，Ⅰ型裂纹尖端的J积分的复形式为

$$J=\frac{K_{\mathrm{I}}^2}{2\pi}\frac{b_{22}}{2}\frac{(s_1+s_2)i}{s_1s_2}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{s_1-s_2}\left(s_1\int_{\Gamma}\frac{1}{z_2-a}dz_2-s_2\int_{\Gamma}\frac{1}{z_1-a}dz_1\right)\right] \tag{2.6}$$

Ⅱ型裂纹尖端的J积分的复形式为

$$J=\frac{K_{\mathrm{II}}^2}{2\pi}\frac{b_{11}}{2}(s_1+s_2)i\ \mathrm{Im}\left[\frac{1}{s_1-s_2}\left(s_2\int_{\Gamma}\frac{1}{z_2-a}dz_2-s_1\int_{\Gamma}\frac{1}{z_1-a}dz_1\right)\right] \tag{2.7}$$

三、J积分的路径无关性

下面我们将(1.4)中的z_j看作

$$z_j = x_j + iy_j \tag{3.1}$$

因为复变函数$1/(z_j - a)$ $(j=1,2)$，在z_j平面上除点$z_j = a$外是解析的，所以根据柯西—古萨基本定理，沿z_j平面上不包括点$z_j = a$的正向封闭路径l，有

$$\oint_l \frac{1}{z_j - a} dz_j = 0 \qquad (j=1,2) \tag{3.2}$$

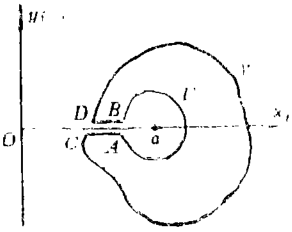

图 2

其中 $l = \gamma + DB - \Gamma - CA$，如图 2 所示．注意到$DB$是贴着裂纹上表面的线段，可认为$y=0$．由(1.4)，(2.4)可以得到

$$\mathrm{Im}\left[\frac{1}{s_1 - s_2}\left(s_1 \int_{DB} \frac{1}{z_2 - a} dz_2 - s_2 \int_{DB} \frac{1}{z_1 - a} dz_1\right)\right] = 0$$

$$\frac{b_{22}}{s_1 s_2} \mathrm{Re}\left(s_1^2 \int_{DB} \frac{1}{z_2 - a} dz_2 + s_2^2 \int_{DB} \frac{1}{z_1 - a} dz_1\right)$$

$$- b_{11} s_1 s_2 \mathrm{Re}\left(s_2^2 \int_{DB} \frac{1}{z_2 - a} dz_2 + s_1^2 \int_{DB} \frac{1}{z_1 - a} dz_1\right) = 0$$

和

$$\mathrm{Im}\left[\frac{1}{s_1 - s_2}\left(s_2 \int_{DB} \frac{1}{z_2 - a} dz_2 - s_1 \int_{DB} \frac{1}{z_1 - a} dz_1\right)\right] = 0$$

将DB换成CA，上述三式仍然成立．利用这些结果和(3.2)，再注意到(2.5)易知

$$J = \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{2\pi} \frac{b_{22}}{2} \frac{(s_1+s_2)i}{s_1 s_2} \mathrm{Im}\left[\frac{1}{s_1 - s_2}\left(s_1 \int_\Gamma \frac{1}{z_2 - a} dz_2 - s_2 \int_\Gamma \frac{1}{z_1 - a} dz_1\right)\right]$$

$$+ \frac{K_{\mathrm{I}} K_{\mathrm{II}}}{2\pi} \frac{1}{(s_1 - s_2)^2}\left[\frac{b_{22}}{s_1 s_2} \mathrm{Re}\left(s_1^2 \int_\Gamma \frac{1}{z_2 - a} dz_2 + s_2^2 \int_\Gamma \frac{1}{z_1 - a} dz_1\right)\right.$$

$$\left. - b_{11} s_1 s_2 \mathrm{Re}\left(s_2^2 \int_\Gamma \frac{1}{z_2 - a} dz_2 + s_1^2 \int_\Gamma \frac{1}{z_1 - a} dz_1\right)\right]$$

$$+ \frac{K_{\mathrm{II}}^2}{2\pi} \frac{b_{11}}{2} (s_1 + s_2) i \mathrm{Im}\left[\frac{1}{s_1 - s_2}\left(s_2 \int_\Gamma \frac{1}{z_2 - a} dz_2 - s_1 \int_\Gamma \frac{1}{z_1 - a} dz_1\right)\right]$$

$$= \frac{K_{\mathrm{I}}^2}{2\pi} \frac{b_{22}}{2} \frac{(s_1+s_2)i}{s_1 s_2} \mathrm{Im}\left[\frac{1}{s_1 - s_2}\left(s_1 \int_\gamma \frac{1}{z_2 - a} dz_2 - s_2 \int_\gamma \frac{1}{z_1 - a} dz_1\right)\right]$$

$$+ \frac{K_{\mathrm{I}} K_{\mathrm{II}}}{2\pi} \frac{1}{(s_1 - s_2)^2}\left[\frac{b_{22}}{s_1 s_2} \mathrm{Re}\left(s_1^2 \int_\gamma \frac{1}{z_2 - a} dz_2 + s_2^2 \int_\gamma \frac{1}{z_1 - a} dz_1\right)\right.$$

$$\left. - b_{11} s_1 s_2 \mathrm{Re}\left(s_2^2 \int_\gamma \frac{1}{z_2 - a} dz_2 + s_1^2 \int_\gamma \frac{1}{z_1 - a} dz_1\right)\right]$$

$$+ \frac{K_{\mathrm{II}}^2}{2\pi} \frac{b_{11}}{2} (s_1 + s_2) i \mathrm{Im}\left[\frac{1}{s_1 - s_2}\left(s_2 \int_\gamma \frac{1}{z_2 - a} dz_2 - s_1 \int_\gamma \frac{1}{z_1 - a} dz_1\right)\right]$$

这说明线弹性正交异性复合材料单向板复合型裂纹尖端的J积分(2.5)与路径无关．

作为特例，Ⅰ型和Ⅱ型裂纹尖端的J积分(2.6)和(2.7)也与路径无关．

四、J积分的计算公式

因为线弹性正交异性复合材料单向板复合型裂纹尖端的J积分(2.5)与路径无关，所以可取Γ为复z_j平面上的正向小圆周，即图 2 中的内曲线．其中起点A，终点B分别贴于下，

上裂纹表面，可认为$A(r,-\pi)$，$B(r,\pi)$，于是

$$\Gamma: z_j-a=re^{i\theta} \qquad (r=\text{const}\ll a,\ -\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$$

从而

$$\int_\Gamma \frac{1}{z_j-a}dz_j=i\int_{-\pi}^{\pi}d\theta=2\pi i$$

将其代入(2.5)，注意到(1.11d)，得到用特征根表示的复合型裂纹尖端的J积分的计算公式为

$$J=K_{\rm I}^2\frac{b_{22}}{2}\frac{(s_1+s_2)i}{s_1s_2}-K_{\rm II}^2\frac{b_{11}}{2}(s_1+s_2)i \tag{4.1}$$

由(1.11)，(1.6)，上式用柔度系数和弹性常数表示依次为

$$J=\left[K_{\rm I}^2\left(\frac{b_{11}b_{22}}{2}\right)^{1/2}+K_{\rm II}^2\frac{b_{11}}{\sqrt{2}}\right]\left[\left(\frac{b_{22}}{b_{11}}\right)^{1/2}+\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}}\right]^{1/2} \tag{4.2}$$

和

$$J=\left[K_{\rm I}^2\left(\frac{1}{2E_xE_y}\right)^{1/2}+K_{\rm II}^2\frac{1}{\sqrt{2}E_x}\right]\left[\left(\frac{E_x}{E_y}\right)^{1/2}+\frac{E_x}{2G_{xy}}-\nu_{xy}\right]^{1/2} \tag{4.3}$$

作为特例，Ⅰ型裂纹尖端的J积分，用特征根，柔度系数和弹性常数表示的计算公式依次为

$$J=K_{\rm I}^2\frac{b_{22}}{2}\frac{(s_1+s_2)i}{s_1s_2} \tag{4.4}$$

$$J=K_{\rm I}^2\frac{b_{22}}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{b_{11}}{b_{22}}\right)^{1/2}+\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{22}}\right]^{1/2} \tag{4.5}$$

和

$$J=\frac{K_{\rm I}^2}{E_y}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{E_y}{E_x}\right)^{1/2}+\frac{E_y}{2G_{xy}}-\nu_{xy}\right]^{1/2} \tag{4.6}$$

Ⅱ型裂纹的J积分，用特征根，柔度系数和弹性常数表示的计算公式依次为

$$J=-K_{\rm II}^2\frac{b_{11}}{2}(s_1+s_2)i \tag{4.7}$$

$$J=K_{\rm II}^2\frac{b_{11}}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{b_{22}}{b_{11}}\right)^{1/2}+\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}}\right]^{1/2} \tag{4.8}$$

和

$$J=\frac{K_{\rm II}^2}{E_x}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{E_x}{E_y}\right)^{1/2}+\frac{E_x}{2G_{xy}}-\nu_{xy}\right]^{1/2} \tag{4.9}$$

在此我们需要做下列说明：

（1） 线弹性正交异性复合材料单向板复合型，Ⅰ型和Ⅱ型裂纹尖端的J积分的计算公式(4.1)～(4.9)同时适合于$\varDelta>0$即$\beta_0>\alpha_0$和$\varDelta<0$即$\beta_0<\alpha_0$两种情况，只需将所给复合材料确定的特征根，柔度系数和弹性常数代入相应公式即可．

（2） 有时需要区分$\varDelta>0$即$\beta_0>\alpha_0$和$\varDelta<0$即$\beta_0<\alpha_0$两种情况．对于复合型裂纹，当$\varDelta>0$即$\beta_0>\alpha_0$时，将(1.9)改写为

$$s_1=i\beta_1,\ s_2=i\beta_2,\ s_3=\bar{s}_1,\ s_4=\bar{s}_2 \tag{4.10}$$

其中

$$\beta_1^2=\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}}-\left[\left(\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}}\right)^2-\frac{b_{22}}{b_{11}}\right]^{1/2} \qquad (\beta_1>0) \tag{4.11a}$$

$$\beta_2^2=\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}}+\left[\left(\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}}\right)^2-\frac{b_{22}}{b_{11}}\right]^{1/2} \qquad (\beta_2>0) \tag{4.11b}$$

将(4.10)代入(4.1)有

$$J=K_{\mathrm{I}}^{2}\frac{b_{22}}{2}\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1\beta_2}+K_{\mathrm{II}}^{2}\frac{b_{11}}{2}(\beta_1+\beta_2) \tag{4.12}$$

当$\Delta<0$即$\beta_0<\alpha_0$时，将(1.10)改写为

$$s_1=\alpha+i\beta,\ s_2=-\alpha+i\beta,\ s_3=\bar{s}_1,\ s_4=\bar{s}_2 \tag{4.13}$$

其中

$$2\alpha^2=\left(\frac{b_{22}}{b_{11}}\right)^{1/2}-\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}},\ \alpha>0 \tag{4.14a}$$

$$2\beta^2=\left(\frac{b_{22}}{b_{11}}\right)^{1/2}+\frac{2b_{12}+b_{66}}{2b_{11}},\ \beta>0 \tag{4.14b}$$

将(4.13)代入(4.1)有

$$J=K_{\mathrm{I}}^{2}b_{22}\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}+K_{\mathrm{II}}^{2}b_{11}\beta \tag{4.15}$$

对于Ⅰ，Ⅱ型裂纹，将(4.10)，(4.13)代入(4.4)，(4.7)便可得到文[4]，[5]中所给出的结果。

（3） 本文所得到的计算公式有一定的参考价值，不但是J积分用于复合型断裂分析[6]的依据，而且还可以用到有关的理论研究和实验校核中去。

（4） 复变函数方法在平面断裂力学中有着广泛的应用[7],[8]，但尚未见到用于探讨复合型裂纹尖端的J积分，本文在这方面做了尝试性的工作。

参 考 文 献

[1] Sih, G. C., P. C. Paris and G. R. Inwin, On cracks in rectilinearly anisotropic bodies, *International Journal of Fracture Mechanics*, 1 (1965), 189—203.

[2] Sih, G. C. (Ed.), *Mechanics of Fracture*, Vol. 6, *Crack in Composite Materials*, Martinus Nijhoff Publishers, Hague (1981).

[3] Rice, J.R., A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks, *Journal of Applied Mechanics*, 35 (1986), 379—386.

[4] 杨维阳、张少琴，线弹性正交异性复合材料Ⅰ，Ⅱ型裂纹尖端的J积分，应用数学和力学，11 (7)(1990), 643—651.

[5] 杨维阳、张少琴、陈华才，关于平面断裂中的J积分，应用数学和力学，11(6)(1990), 555—564.

[6] Jiang Bo-zeng, Yang Wei-yang and Zhang Shao-qin, Application of the J-integral to mixed mode fracture analysis of orthotropic composites, *Engineering Fracture Mechanics*, 36(3) (1990), 507—514.

[7] Sih, G. C. (Ed.), *Mechanics of Fracture*, Vol. 1, *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Noordhoff International Publishing, Leyden (1973).

[8] Liebowitz, H. (Ed.), *Fracture*, Vol. 2, *Mathematical Fundamentals*, Academic Press, New York (1968).

On J-Integrals in the Plane Fracture of Composite Materials

Yang Wei-yang Zhang Shao-qin Jia Yuan-duo
(*Taiyuan Heavy Machinery Institute, Taiyuan*)

Abstract

By using a complex variable method in this paper, the complex form of J-integral of mixed mode cracktip for unidirectional plate of linear-elastic orthotropic composites is obtained first by substituting crack-tip stresses and displacements into the general formula of J-integral. Then the path-independence of this J-integral is proved. Finally the computing formula of this J-integial is derived. As special examples, the complex forms, path-independence and computing formulae of J-integrals of mode I and mode II crack tips for unidirectional plate of linear-elastic orthotropic composites are given.

Key words J-integral, crack-tip, composite material, complex variable method