

泊松比对静止平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场的影响*

林 拜 松

(中南工业大学, 1989年8月10日收到)

摘 要

在裂纹尖端的理想塑性应力分量都只是 θ 的函数的条件下, 利用平衡方程和含有泊松比的Mises屈服条件, 本文导出了静止平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式。将这些一般解析表达式用于具体裂纹, 我们就可以得到静止平面应变I型、II型及I-II复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式, 这些表达式含有泊松比。

关键词 泊松比 平面应变 静止裂纹尖端 理想塑性应力场 一般解析表达式

一、引 言

关于静止平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场, 我们研究过泊松比 $\nu=1/2$ 的情形^[1~2], 但是, 就我们所知, 没有文献研究过泊松比对静止平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场的影响。为此, 我们用文献[1~3]中的方法来解决上述问题。

在裂纹尖端的理想塑性应力分量都只是 θ 的函数的条件下, 利用平衡方程和含有泊松比的Mises屈服条件, 本文导出了静止平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式。将这些一般解析表达式用于具体裂纹, 我们就可以得到静止平面应变I型、II型和I-II复合型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式。这些解析表达式含有泊松比 ν , 从而可以知道 ν 对静止平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场的影响。文献[1]中平面应变和平面应力裂纹尖端的理想塑性应力场分别是本文 $\nu=1/2$ 和 $\nu=0$ 的特殊情形。

二、一般解析表达式

将直角卡氏坐标系 (x, y) 和极坐标系 (r, θ) 的原点都放在平面应变裂纹的尖点 O 上, 如图1所示。

对于平面应变情形, 设裂纹尖端的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 都只是 θ 的函数, 则平衡方程

* 钱伟长推荐。

为:

$$\left. \begin{aligned} -\sin\theta \frac{d\sigma_x}{dx} + \cos\theta \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} &= 0 \\ \cos\theta \frac{d\sigma_y}{d\theta} - \sin\theta \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

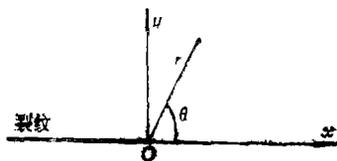


图 1

而含有 ν 的Mises屈服条件为^[4]:

$$(1 - \nu + \nu^2)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - (1 + 2\nu - 2\nu^2)\sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \quad (2.2)$$

或

$$3\sigma_-^2 + (1 - 2\nu)^2\sigma_+^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 \quad (2.3)$$

其中 $\sigma_- = (\sigma_x - \sigma_y)/2$, $\sigma_+ = (\sigma_x + \sigma_y)/2$; σ_s 是材料的屈服极限。

由(2.1)和(2.2), 我们得到下面两种塑性区:

1. 均匀应力区

在均匀应力区内有:

$$\sigma_x = a_1, \quad \sigma_y = a_2, \quad \tau_{xy} = a_3 \quad (2.4)$$

其中 $a_i (i=1 \sim 3)$ 是三个积分常数。

该区内的应力分量 σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ 为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \} &= \frac{a_1 + a_2}{2} \pm \frac{a_1 - a_2}{2} \cos 2\theta \pm \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta \} & \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{a_1 - a_2}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

2. 非均匀应力区

在非均匀应力区, 我们有^[2]:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = F(\theta) \cos^2\theta, \quad \frac{d\sigma_y}{d\theta} = F(\theta) \sin^2\theta, \quad \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} = F(\theta) \sin\theta \cos\theta \quad (2.6)$$

其中 $F(\theta)$ 是一个未知的 θ 的函数, 它由屈服条件来确定。

设屈服条件为:

$$A\sigma_x^2 - B\sigma_x\sigma_y + C\sigma_y^2 + D\tau_{xy}^2 = \text{const} \quad (2.7)$$

其中 A, B, C 和 D 是四个常数。于是, 由式(2.6)和(2.7), 我们得到确定 $F(\theta)$ 的二阶常微分方程为^[2]:

$$a(\theta) \frac{d^2F(\theta)}{d\theta^2} + b(\theta) \frac{dF(\theta)}{d\theta} + c(\theta) F(\theta) = 0 \quad (2.8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a(\theta) &= \frac{A+B+C-D}{4} \cos 4\theta + (A-C) \cos 2\theta + \frac{3A-B+3C+D}{4} \\ b(\theta) &= -\frac{5(A+B+C-D)}{2} \sin 4\theta - 5(A-C) \sin 2\theta \\ c(\theta) &= -6(A+B+C-D) \cos 4\theta - 4(A-C) \cos 2\theta + 2(A-B+C) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

对于屈服条件(2.2), 我们有:

$$A=C=1-\nu+\nu^2, \quad B=1+2\nu-2\nu^2, \quad D=3 \quad (2.10)$$

将式(2.10)代入式(2.8)和(2.9), 我们就得到:

$$\frac{d^2 F(\theta)}{d\theta^2} + R^2 F(\theta) = 0 \quad (2.11)$$

$$\text{其中} \quad R^2 = \frac{(1-2\nu)^2}{1-\nu+\nu^2} \quad (2.12)$$

微分方程(2.11)的解为:

$$F(\theta) = c_1 \cos R\theta + c_2 \sin R\theta \quad (2.13)$$

其中 c_1 和 c_2 为两个积分常数。

将式(2.13)代入(2.6), 积分得:

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} &= \frac{1}{2R} (c_1 \sin R\theta - c_2 \cos R\theta) \pm \frac{1}{4(2+R)} [c_1 \sin(2+R)\theta - c_2 \cos(2+R)\theta] \\ &\quad \pm \frac{1}{4(2-R)} [c_1 \sin(2-R)\theta + c_2 \cos(2-R)\theta] + c_3 \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{4(2+R)} [c_1 \cos(2+R)\theta + c_2 \sin(2+R)\theta] - \frac{1}{4(2-R)} [c_1 \cos(2-R)\theta \\ &\quad - c_2 \sin(2-R)\theta] + c_4 \end{aligned} \right\} \quad (2.14) \end{aligned}$$

其中 c_3 和 c_4 是两个积分常数。

式(2.14)就是 ν 为任意值时平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式。

将式(2.14)代入屈服条件(2.3), 可以证明^[3]:

(1) 当 $\nu=1/2$ 时, $c_4=0$, $c_3 \neq 0$;

(2) 当 $\nu \neq 1/2$ 时, $c_3=c_4=0$ 。

我们来研究式(2.14)的两种特殊情形:

(1) $\nu=1/2$ 情形

将 $\nu=1/2$ 代入式(2.14), 我们得到:

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sigma_x \\ \sigma_y \end{aligned} \right\} &= c_3 + \frac{c_1}{4} (2\theta \pm \sin 2\theta), \quad \tau_{xy} = -\frac{c_1}{4} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

该式就是文献[2]中平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式。

(2) $\nu=0$ 情形

将 $\nu=0$ 代入式(2.14), 我们得到:

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{1}{3} [c_2 \cos^3 \theta - c_1 (2 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta \cos^2 \theta)] \\ \sigma_y &= -\frac{1}{3} [c_2 (2 \cos^3 \theta + 3 \sin^2 \theta \cos \theta) - c_1 \sin^3 \theta] \\ \tau_{xy} &= -\frac{1}{3} (c_1 \cos^3 \theta - c_2 \sin^3 \theta) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

该式就是文献[2]中平面应力裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式。

非均匀应力区内应力分量 σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ 的表达式为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= c_3 + \frac{2-R^2}{R(4-R^2)}(c_1 \sin R\theta - c_2 \cos R\theta) \\ \sigma_\theta &= c_3 + \frac{2}{R(4-R^2)}(c_1 \sin R\theta - c_2 \cos R\theta) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{R^2-4}(c_1 \cos R\theta + c_2 \sin R\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

将式(2.17)代入屈服条件, 可以证明, 对于任何 ν 值都有^[3]:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 (c_1^2 + c_2^2) = \left(\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\right)^2 = k^2 \quad (2.18)$$

其中 $a=1-\nu+\nu^2$.

现在研究式(2.17)的两种特殊情形:

(1) $\nu=1/2$ 情形

将 $\nu=1/2$ 代入式(2.17), 并利用(2.18), 我们就得到:

$$\tau_{r\theta} = \pm k, \quad \sigma_r = \sigma_\theta = c_3 \mp 2k\theta \quad (2.19)$$

这就是文献[1]中平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式([1], 式(3.3)).

(2) $\nu=0$ 的情形

将 $\nu=0$ 代入式(2.17), 我们得到:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -(c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta) / 3 \\ \sigma_\theta &= 2\sigma_r = -(2c_2 \cos \theta - 2c_1 \sin \theta) / 3 \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

这就是文献[1]中平面应力裂纹尖端的理想塑性应力场的一般解析表达式([1], 式(4.2)).

若平面应变裂纹尖端的理想塑性应力场存在着径向的应力间断线, 则有:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta^+ &= \sigma_\theta^-, \quad \tau_{r\theta}^+ = \tau_{r\theta}^- \\ \sigma_\theta^+ - \sigma_r^+ &= [4a\sigma_s^2 - 3(1-2\nu)^2\sigma_\theta^2 - 12a\tau_{r\theta}^2]^{\frac{1}{2}} / a \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

显然, 文献[1]中的径向应力间断值(3.5c)和(4.4c)分别是式(2.21c)在 $\nu=1/2$ 和 $\nu=0$ 的特殊情形.

三、理想塑性应力场

将一般解析表达式(2.5)和(2.17)用于I型和II型裂纹, 我们就可以导出这些裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式. 结果表示如下:

1. I型裂纹

1) 第一种应力场

(1) $0 \leq \theta \leq \theta_1$

$$\tau_{r\theta} = d_2 \sin 2\theta, \quad \left. \begin{aligned} \sigma_\theta \\ \sigma_r \end{aligned} \right\} = d_1 \pm d_2 \cos 2\theta \quad (3.1a)$$

常数 d_1 和 d_2 满足如下条件:

$$(1-2\nu)^2 d_1^2 + 3d_2^2 = \sigma_s^2 \quad (3.1b)$$

(2) $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= c_3 + \frac{2-R^2}{R(4-R^2)} (c_1 \sin R\theta - c_2 \cos R\theta) \\ \sigma_\theta &= c_3 + \frac{2}{R(4-R^2)} (c_1 \sin R\theta - c_2 \cos R\theta) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{R^2-4} (c_1 \cos R\theta + c_2 \sin R\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.1c)$$

常数 c_1 和 c_2 满足如下条件:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 (c_1^2 + c_2^2) = \left(\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\right)^2 = k^2 \quad (3.1d)$$

$$(3) \quad \theta_2 \leq \theta \leq \pi$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_s}{2\sqrt{a}} \cdot \sin 2\theta, \\ \left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} &= 2 \cdot \frac{\sigma_s}{\sqrt{a}} (1 \pm \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.1e)$$

未知量 c_1 , c_2 , c_3 , d_1 , d_2 , θ_1 和 θ_2 由式(3.1b), (3.1d)及 $\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \theta_2$ 处的应力连续条件来确定。

当 $\nu = 1/2$ 时, 式(3.1)就变成文献[1]中的静止平面应变 I 型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式([1], 式(3.6))。

2) 第二种应力场

$$(1) \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{\sqrt{3}\sigma_s}{a(4-R^2)} \cdot \sin R\theta, & \sigma_r &= \frac{\sqrt{3}(2-R^2)\sigma_s}{aR(4-R^2)} \cdot \cos R\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{2\sqrt{3}\sigma_s}{aR(4-R^2)} \cdot \cos R\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.2a)$$

$$(2) \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_s}{4\sqrt{a}} [(1-2\nu)^2 + \cos 2\theta_2] \cdot \sin 2(\theta - \theta_2) \\ &\quad + \frac{\sigma_s}{2\sqrt{a}} \sin 2\theta_2 \cdot \cos 2(\theta - \theta_2) \\ \left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} &= \frac{\sigma_s}{4\sqrt{a}} [(1-2\nu)^2 - 2 + 3\cos 2\theta_2] \pm \frac{\sigma_s}{4\sqrt{a}} [(1-2\nu)^2 \\ &\quad + \cos 2\theta_2] \cos^2(\theta - \theta_2) \pm \frac{\sigma_s}{2\sqrt{a}} \cdot \sin 2\theta_2 \cdot \sin 2(\theta - \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.2b)$$

$$(3) \quad \theta_2 \leq \theta \leq \pi$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma_s}{2\sqrt{a}} \sin 2\theta, \\ \left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} &= -\frac{\sigma_s}{2\sqrt{a}} (1 \pm \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.2c)$$

这里 $\theta = \theta_2$ 是应力间断线。

$\theta = \theta_1$ 上的应力连续条件给出确定 θ_1 和 θ_2 的两个方程为:

$$\left. \begin{aligned} & [(1-2\nu)^2 - 2 + 3\cos 2\theta_2] + 3[(1-2\nu)^2 + \cos 2\theta_2] \cos 2(\theta_1 - \theta_2) \\ & + 6\sin 2\theta_2 \cdot \sin 2(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ & \frac{1}{4} [(1-2\nu)^2 - 2 + 3\cos 2\theta_2] - \frac{1}{4} [(1-2\nu)^2 + \cos 2\theta_2] \cos 2(\theta_1 - \theta_2) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \sin 2\theta_2 \sin 2(\theta_1 - \theta_2) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{a}R(4-R^2)} \cdot \cos R\theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.2d)$$

当 $\nu=0$ 时, 式 (3.2) 就变成文献 [1] 中的静止平面应力 I 型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式 ([1], 式 (4.5)).

2. I 型裂纹

1) 第一种应力场

(1) $0 \leq \theta \leq \theta_1$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{\sqrt{3}\sigma_s}{a(4-R^2)} \cos R\theta, \quad \sigma_r = -\frac{\sqrt{3}(2-R^2)\sigma_s}{aR(4-R^2)} \sin R\theta \\ \sigma_\theta &= -\frac{2\sqrt{3}\sigma_s}{aR(4-R^2)} \cdot \sin R\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.3a)$$

(2) $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\frac{\sqrt{3}\sigma_s}{a(4-R^2)} \cos R\theta_1 \cdot \cos 2(\theta - \theta_2) + \frac{\sqrt{3}R\sigma_s}{2a(4-R^2)} \sin R\theta_1 \sin 2(\theta - \theta_2) \\ \left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} &= -\frac{\sqrt{3}\sigma_s}{2aR} \cdot \sin R\theta_1 \mp \frac{\sqrt{3}\sigma_s}{a(4-R^2)} \cos R\theta_1 \cdot \sin 2(\theta - \theta_2) \\ &\quad \mp \frac{\sqrt{3}R\sigma_s}{2a(R^2-4)} \sin R\theta_1 \cos 2(\theta - \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.3b)$$

(3) $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{1}{R^2-4} (c_1 \cos R\theta + c_2 \sin R\theta) \\ \sigma_r &= c_3 + \frac{2-R^2}{R(4-R^2)} (c_1 \sin R\theta - c_2 \cos R\theta) \\ \sigma_\theta &= c_3 + \frac{2}{R(4-R^2)} (c_1 \sin R\theta - c_2 \cos R\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.3c)$$

常数 c_1 和 c_2 满足如下条件:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^2 (c_1^2 + c_2^2) = \left(\frac{\sigma_s}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad (3.3d)$$

(4) $\theta_3 \leq \theta \leq \pi$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_s}{2\sqrt{a}} \cdot \sin 2\theta, \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} = -\frac{\sigma_s}{2\sqrt{a}} (1 \pm \cos 2\theta) \quad (3.3e)$$

未知量 c_i ($i=1 \sim 3$) 和 θ_i ($i=1 \sim 3$) 由式 (3.3d) 及 $\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \theta_3$ 处的应力连续条件来确定.

当 $\nu=1/2$ 时, 式 (3.3) 就变成文献 [1] 中的静止平面应变 II 型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式 ([1], 式 (3.7)).

2) 第二种应力场

(1) $0 \leq \theta \leq \theta_1$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{\sqrt{3}\sigma_s}{a(4-R^2)} \cdot \cos R\theta, \quad \sigma_r = -\frac{\sqrt{3}(2-R^2)\sigma_s}{aR(4-R^2)} \cdot \sin R\theta \\ \sigma_\theta &= -\frac{2\sqrt{3}\sigma_s}{aR(4-R^2)} \cdot \sin R\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.4a)$$

(2) $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_s}{4\sqrt{a}} [(1-2\nu)^2 + \cos 2\theta_2] \sin 2(\theta - \theta_2) \\ &\quad + \frac{\sigma_s}{2\sqrt{a}} \sin 2\theta_2 \cdot \cos 2(\theta - \theta_2) \\ \left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} &= \frac{\sigma_s}{4\sqrt{a}} [(1-2\nu)^2 - 2 + 3\cos 2\theta_2] \pm \frac{\sigma_s}{4\sqrt{a}} [(1-2\nu)^2 \\ &\quad + \cos 2\theta_2] \cos 2(\theta - \theta_2) \pm \frac{\sigma_s}{2\sqrt{a}} \cdot \sin 2\theta_2 \cdot \sin 2(\theta - \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (3.4b)$$

(3) $\theta_2 \leq \theta \leq \pi$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma_s}{2\sqrt{a}} \sin 2\theta, \\ \left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{aligned} \right\} &= -\frac{\sigma_s}{2\sqrt{a}} (1 \pm \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (3.4c)$$

其中 $\theta = \theta_2$ 是一条应力间断线。

用以确定 θ_1 和 θ_2 的方程与 (3.2d) 相同, 但是, (3.2d) 中第二个方程的右边要用 $-2\sqrt{3} \cdot \sin R\theta_1 / \sqrt{a} R(4-R^2)$ 来代替。

当 $\nu = 0$ 时, 式 (3.4) 就变成文献 [1] 中平面应力 II 型裂纹尖端的理想塑性应力场的解析表达式 ([1], 式 (4.7))。

参 考 文 献

- [1] 林拜松, 静止裂纹尖端的理想塑性应力场, 应用数学和力学, 6(5) (1985), 415—421.
- [2] 林拜松, 平面问题奇点附近的理想塑性应力场的一般解析表达式, 应用数学和力学(待发表).
- [3] 林拜松, 平面应变和反平面应变复合型裂纹尖端的理想塑性应力场, 应用数学和力学, 6(9) (1985), 845—852.
- [4] 曾国平、黄文彬, 需要考虑材料泊松比的某些塑性力学问题, 力学与实践, 11(3) (1989), 35—39.

Effect of the Poisson Ratio on the Perfectly Plastic Stress Field at a Stationary Plane-Strain Crack Tip

Lin Bai-song

(*Central-South University of Technology, Changsha*)

Abstract

Under the condition that all the perfectly plastic stress components at a crack tip are the functions of θ only, making use of equilibrium equations and Von-Mises yield condition containing Poisson ratio, in this paper, we derive the generally analytical expressions of perfectly plastic stress field at a stationary plane-strain crack tip. Applying these generally analytical expressions to the concrete cracks, the analytical expressions of perfectly plastic stress fields at the stationary tips of Mode I, Mode-II and Mixed-Mode I-II plane-strain cracks are obtained. These analytical expressions contain Poisson ratio.

Key words Poisson ratio, plane-strain, stationary crack-tip, perfectly-plastic stress fields, generally analytical expression