应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

求解奇异摄动转向点问题的一个二阶一致收敛格式*

孙晓弟

(南京大学数学系，1990年7月2日收到)

摘　要

本文对奇异摄动转向点问题构造了一个关于ε一致收敛的二阶正型格式，并给出了数值例子.

关键词　奇异摄动　转向点　差分法　正型格式

一、引　言

本文考虑以下奇异摄动转向点问题：

$$\left.\begin{array}{ll}\varepsilon^2u''+xa(x)u'-b(x)u=f(x), & x\in I=[-1,1]\\ u(-1)=A,\ u(1)=B & \end{array}\right\}\tag{1.1}$$

这里，参数ε是$(0,1]$中的常数，函数$a(x)\in C^2[I]$，$b(x)$，$f(x)\in C^3[I]$，且满足$a(x)\geqslant a_*>0$，$b(x)\geqslant b_*>0$. 在以上假设下，由[1]可知，方程(1.1)存在唯一解$u_\varepsilon\in C^4[I]$，且满足以下估计式

$$|u_\varepsilon^{(i)}(x)|\leqslant M(1+(|x|+\varepsilon)^{\beta-i}),\qquad x\in I, i=0,1,\cdots,4\tag{1.2}$$

其中β是满足$0<\beta<\lambda\equiv b(0)/a(0)$的任意常数，$M$是某个与$\varepsilon$无关的正常数.

对于奇异摄动转向点问题(1.1)，目前已有大量的工作(例[1]～[4]，[6])．从这些文章可以看到在均匀网格上，不管是迎风格式还是指数型格式的一致收敛阶都不超过$O(h^{\min(\lambda,1)})$，即当$0<\lambda<1$时，一致收敛阶将小于1．为了能不受λ的限制，达到一阶一致收敛，V. D. Liseikin[4]在非均匀网格上证明了迎风格式是一阶一致收敛的．而R. Vulanovic[6]讨论了$I=[0,1]$上的方程(1.1)，并在非均匀网格上证明了Gushchin-Shchennikov格式是二阶一致收敛的，该格式是一个四点格式，且很复杂不易上机实现．本文运用[5]中对非转向点奇异摄动问题构造二阶正型格式的思想，对转向点问题(1.1)构造了一个三点正型差分格式，该格式远比G-S格式简单，但在非均匀网格上也是二阶一致收敛的.

二、网格和格式

非均匀网格I_h：$-1=x_{-N}<x_{-N+1}<\cdots<x_0<\cdots<x_{N-1}<x_N=1$是通过映射$x(t)$得到：

* 苏煜城推荐.

$x_i=x(ih)$，$h=1/N$。我们取

$$
\left.\begin{aligned}
&x(t)=\begin{cases} x_1(t), & 0\leqslant t\leqslant 1 \\ -x_1(-t), & -1\leqslant t<0 \end{cases} \\
&x_1(t)=(\varepsilon^a+pt)^{1/a}-\varepsilon \\
&p=(1+\varepsilon)^a-\varepsilon^a,\quad a=\min(\beta,1)/2
\end{aligned}\right\} \tag{2.1}
$$

记 $$h_i=x_{i+1}-x_i,\quad x_{i+\frac{1}{2}}=x_i+h_i/2$$

令$\{u_i\}$是非均匀网格I_h上的网格函数，我们引进以下离散算子：

$$D_0^{\prime\prime}u_i=2[h_iu_{i-1}-(h_i+h_{i-1})u_i+h_{i-1}u_{i+1}]/[h_ih_{i-1}(h_i+h_{i-1})]$$

$$D_+^{\prime}u_i=(u_{i+1}-u_i)/h_i,\quad D_-^{\prime}u_i=(u_i-u_{i-1})/h_{i-1}$$

$$D_M^0u_{i\pm\frac{1}{2}}=(3u_i-u_{i\mp1})/2$$

现在对方程(1.1)构造如下差分格式

$$
L^hu_i:=\begin{cases}
\varepsilon^2D_0^{\prime\prime}u_i+x_ia_iD_+^{\prime}u_i-b_iu_i+\dfrac{x_ia_ih_i}{2\varepsilon^2}[x_{i+\frac{1}{2}}a_{i+\frac{1}{2}}D_+^{\prime}u_i-b_{i+\frac{1}{2}}D_M^0u_{i+\frac{1}{2}}] \\
\qquad=f_i+\dfrac{x_ia_ih_i}{2\varepsilon^2}f_{i+\frac{1}{2}},\qquad 0\leqslant i\leqslant N-1 \\
\varepsilon^2D_0^{\prime\prime}u_i+x_ia_iD_-^{\prime}u_i-b_iu_i-\dfrac{x_ia_ih_{i-1}}{2\varepsilon^2}[x_{i-\frac{1}{2}}a_{i-\frac{1}{2}}D_-^{\prime}u_i-b_{i-\frac{1}{2}}D_M^0u_{i-\frac{1}{2}}] \\
\qquad=f_i-\dfrac{x_ia_ih_{i-1}}{2\varepsilon^2}f_{i-\frac{1}{2}},\qquad 1-N\leqslant i<0
\end{cases} \tag{2.2}
$$

$$u_{-N}=A,\quad u_N=B$$

其中$a_i=a(x_i)$，$a_{i+\frac{1}{2}}=a(x_{i+\frac{1}{2}})$，等等。差分格式(2.2)实质上是迎风差分格式加上一个修正项，该修正项消除了迎风格式截断误差中$O(h)$的那一部分，故有可能达到二阶收敛，显然格式(2.2)的系数矩阵L^h是M矩阵，即$M^{-1}<0$，且格式(2.2)是正型格式。

作闸函数$Z_i\equiv C$，C是常数，则

$$
L^hZ_i=\begin{cases}
-b_iC-\dfrac{x_ia_ih_i}{2\varepsilon^2}b_{i+\frac{1}{2}}C, & i\geqslant 0 \\
-b_iC+\dfrac{x_ia_ih_{i-1}}{2\varepsilon^2}b_{i-\frac{1}{2}}C & i<0
\end{cases}
$$

所以若能证得格式(2.2)的截断误差满足：

$$|L^h(u_\varepsilon(x_i)-u_i)|\leqslant Mh^2[1+\varepsilon^{-2}((|x_i|+x_i)h_i+(|x_i|-x_i)h_{i-1})]$$
$$i=0,\pm1,\cdots,\pm(N-1) \tag{2.3}$$

其中M是与ε,h无关的正常数，则我们有以下定理。

定理 令u_ε是转向点问题(1.1)的解，$\{u_i\}$是差分格式(2.2)在非均匀网格I_h上的解，则

$$|u_\varepsilon(x_i)-u_i|\leqslant Mh^2,\qquad i=0,\pm1,\cdots,\pm(N-1)$$

其中非均匀网格I_h由(2.1)决定，M是某个与ε，h无关的正常数。

三、估计式(2.3)的证明

为简单起见，我们仅讨论$i\geqslant0$，对于$i<0$时的证明是完全类似的。以下假设$i\geqslant0$，显然

截断误差

$$R_i = L^h(u_\varepsilon(x_i) - u_i) \equiv R_i'' + R_i' + \frac{a_i x_i h_i}{2\varepsilon^2}(Q_i' + Q_i^0) \tag{3.1}$$

其中

$$R_i'' = \varepsilon^2[D_\varepsilon'' u_\varepsilon(x_i) - u_\varepsilon''(x_i)] \tag{3.2a}$$

$$R_i' = a_i x_i[D_+' u_\varepsilon(x_i) - u_\varepsilon'(x_i) - (h_i/2)u_\varepsilon''(x_{i+\frac{1}{2}})] \tag{3.2b}$$

$$Q_i' = a_{i+\frac{1}{2}} x_{i+\frac{1}{2}}[D_+' u_\varepsilon(x_i) - u_\varepsilon'(x_{i+\frac{1}{2}})] \tag{3.2c}$$

$$Q_i^0 = -b_{i+\frac{1}{2}}[D_M^0 u_\varepsilon(x_{i+\frac{1}{2}}) - u_\varepsilon(x_{i+\frac{1}{2}})] \tag{3.2d}$$

利用泰勒展开式和估计式(1.2)，有

$$|R_i''| \leqslant M\varepsilon^2\{(h_i - h_{i-1})[1 + (|x_i| + \varepsilon)^{\beta-3}] + h_i^2[1 + (|x_i| + \varepsilon)^{\beta-4}] + h_{i-1}^2[1 + (|x_{i-1}| + \varepsilon)^{\beta-4}]\} \tag{3.3a}$$

$$|R_i'| \leqslant M x_i h_i^2[1 + (|x_i| + \varepsilon)^{\beta-3}] \tag{3.3b}$$

$$|Q_i'| \leqslant M x_{i+\frac{1}{2}} h_i^2[1 + (|x_i| + \varepsilon)^{\beta-3}] \tag{3.3c}$$

$$|Q_i^0| \leqslant M(h_i - h_{i-1})[1 + (|x_{i+\frac{1}{2}}| + \varepsilon)^{\beta-1}] + M h_i^2[1 + (|x_{i-1}| + \varepsilon)^{\beta-2}] \tag{3.3d}$$

我们将用到的另外一些估计式是

$$|R_i''| \leqslant M\varepsilon^4 \max_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_{i+1}} |u_\varepsilon''(x)| \tag{3.4a}$$

$$|Q_i^0| \leqslant M \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u_\varepsilon'(x)| dx \tag{3.4b}$$

为了证得(2.3)式，只需证明

$$|R_i''|\ (|R_i'|, |Q_i'| \text{和} |Q_i^0|) \leqslant Mh^2, \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1 \tag{3.5}$$

为此首先对(3.3)式右端作出估计，由(2.1)得

$$|x_i| + \varepsilon \geqslant m(\varepsilon^a + ih)^{1/a}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant N$$

$$h_i \leqslant Mh[(\varepsilon^a + ih)^{1/a-1} + h^{1/a-1}], \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1$$

$$h_i \leqslant Mh[(\varepsilon^a + (i-1)h)^{1/a-1} + h^{1/a-1}], \qquad 1 \leqslant i \leqslant N-1$$

$$h_i - h_{i-1} \leqslant Mh^2[(\varepsilon^a + ih)^{1/a-2} + h^{1/a-2}], \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1$$

故

$$\varepsilon^2(h_i - h_{i-1})(|x_i| + \varepsilon)^{\beta-3} \leqslant Mh^2[(\varepsilon^a + ih)^{1/a-2} + h^{1/a-2}](\varepsilon^a + ih)^{\frac{\beta-1}{a}} \leqslant Mh^2, \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1$$

$$\varepsilon^2 h_i^2(|x_i| + \varepsilon)^{\beta-4} \leqslant Mh^2[(\varepsilon^a + ih)^{2/a-2} + h^{2/a-2}](\varepsilon^a + ih)^{\frac{\beta-2}{a}} \leqslant Mh^2, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N-1$$

$$x_i h_i^2(|x_i| + \varepsilon)^{\beta-3} \leqslant Mh^2, \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} h_i^2(|x_i| + \varepsilon)^{\beta-3} \leqslant Mh^2 \frac{x_{i+\frac{1}{2}}}{x_i + \varepsilon} \leqslant Mh^2, \qquad 1 \leqslant i \leqslant N-1$$

$$(h_i - h_{i-1})(|x_{i+\frac{1}{2}}| + \varepsilon)^{\beta-1} \leqslant (h_i - h_{i-1})(|x_i| + \varepsilon)^{\beta-1} \leqslant Mh^2, \qquad 0 \leqslant i \leqslant N-1$$

$$h_i^2(|x_{i-1}| + \varepsilon)^{\beta-2} \leqslant Mh^2[(\varepsilon^a + (i-1)h)^{1/a-1} + h^{1/a-1}]^2(\varepsilon^a + (i-1)h)^{\frac{\beta-2}{a}} \leqslant Mh^2, \qquad 2 \leqslant i \leqslant N-1$$

从以上这些估计式可知，$R_i''(2 \leqslant i \leqslant N-1)$，$R_i'(0 \leqslant i \leqslant N-1)$，$Q_i'(1 \leqslant i \leqslant N-1)$ 和 Q

$(2\leqslant i\leqslant N-1)$满足估计式(3.5)，所以对于$2\leqslant i\leqslant N-1$，估计式(2.3)已经得证．再注意到$R_0=R_0''$，故为了证得$i=0,1$时的(2.3)式，还需证明$R_0''$，$R_1''$和$Q_1^0$满足(3.5)．

首先假设$h\leqslant\varepsilon^a$，由(3.3)式得

$$|R_0''|\leqslant M\varepsilon^2h_0^2\varepsilon^{\beta-4}\leqslant Mh^2$$

$$|R_1''|\leqslant Mh^2+M\varepsilon^2h_0^2\varepsilon^{\beta-4}\leqslant Mh^2$$

$$|Q_1^0|\leqslant Mh^2+Mh_1^2\varepsilon^{\beta-2}\leqslant Mh^2$$

现设$\varepsilon^a\leqslant h$，此时由(3.4)式可得

$$|R_i''|\leqslant M\varepsilon^2[1+\varepsilon^{\beta-2}]\leqslant Mh^2,\qquad i=0,1$$

$$|Q_1^0|\leqslant Mx_2+M[(\varepsilon+x_2)^\beta-\varepsilon^\beta]\leqslant Mh^2$$

所以，R_0''，R_1''和Q_1^0也满足(3.5)式．

估计式(2.3)证毕．

四、数值结果

本节运用差分格式(2.2)对以下转向点问题

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^2u''+xu'-u/2=f(x),\qquad x\in I\\&u(-1)=A,\ u(1)=B\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

进行数值计算，其中右端$f(x)$和边界条件A，B由方程的精确解

$$u(x)=\exp[-x^2/2]+(x^2+\varepsilon^2)^{1/4}+x(x^2+\varepsilon^2)^{-1/4}$$

确定，取非均匀网格(2.1)中的参数$\alpha=0.2$．

表 1 ($h=1/128$, $\varepsilon=10^{-10}$, $\alpha=0.2$)

网格点x_i	−0.8546	−0.1249	−0.01190	−0.00042	0.00000	0.00042	0.01190	0.1249	0.8546
方程精确解	0.694082	0.992225	0.999929	0.999999	1.000010	1.040946	1.218085	1.699154	2.542966
迎风格式解	0.693833	0.989761	0.999086	0.999849	1.000010	1.037261	1.209852	1.687931	2.541290
格式(2.2)解	0.694062	0.992126	0.999893	0.999993	1.000010	1.041164	1.218322	1.699290	2.542976

表 2 **正型格式(2.2)的数值结果** ($\alpha=0.2$)

h	$\varepsilon=1$ E_∞	p	$\varepsilon=10^{-2}$ E_∞	p	$\varepsilon=10^{-4}$ E_∞	p	$\varepsilon=10^{-6}$ E_∞	p	$\varepsilon=10^{-8}$ E_∞	p	$\varepsilon=10^{-10}$ E_∞	p
1/16	2.3E-4		4.1E-3		1.1E-2		1.4E-2		1.5E-2		1.5E-2	
		1.98		2.14		1.99		1.99		1.98		1.98
1/32	5.9E-5		9.4E-4		2.8E-3		3.5E-3		3.8E-3		3.9E-3	
		1.99		2.21		2.00		2.00		2.00		2.00
1/64	1.5E-5		2.0E-4		7.0E-4		8.7E-4		9.4E-4		9.7E-4	
		2.00		2.27		2.00		2.00		2.00		2.00
1/128	3.7E-6		4.2E-5		1.7E-4		2.2E-4		2.3E-4		2.4E-4	
		2.00		2.03		2.00		2.00		2.00		2.00
1/256	9.3E-7		1.0E-5		4.4E-5		5.4E-5		5.9E-5		6.1E-5	
		2.00		2.06		2.01		2.00		2.00		2.00
1/512	2.3E-7		2.5E-6		1.1E-5		1.4E-5		1.5E-5		1.5E-5	

在表1中，我们对步长$h=1/128$和参数$\varepsilon=10^{-10}$，$\alpha=0.2$进行了计算，列出了迎风格式、正型格式(2.2)及方程精确解在某些网格点上的值．可以看出，迎风格式解的误差不超过

$O(10^{-2})$，而正型格式(2.2)的误差不超过$O(10^{-4})$，因此二阶一致收敛的正型格式(2.2)的解要比迎风格式精确。

在表2中，我们对一系列的参数ε和h进行了计算，列出了最大值误差$E_{\infty}=\max\limits_{-N<i<N}|u_i-u_\varepsilon(x_i)|$和数值收敛阶$p=(\ln E_{\infty}^{2}-\ln E_{\infty}^{1})/\ln 2$，其中$E_{\infty}^{1}$和$E_{\infty}^{2}$分别表示在非均匀网格$I_h$和$I_{2h}$上近似解的最大值误差。计算结果表明，数值收敛阶是二阶一致收敛的，与本文定理相符合。

作者得到吴启光教授的悉心指导，在此表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] Berger, A. E., H. Han and R. B. Kellogg, A priori estimates and analysis of a numerical method for a turning point problem, *Math. Comp.*, **42** (1984), 465—492.

[2] Емельянов К. В., Разностная схема для уравнения $\varepsilon u''+xa(x)u'-b(x)u=f(x)$, *Разностные Методы Решения Краевых Задач с Малым Параметром и Разрывными Краевыми Условиями*, Свердловск, Ин-т Матем. и Механ. (1976), 5—18.

[3] Farrell, P. A., Sufficient conditions for the uniform convergence of a difference scheme for singularly perturbed turning problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, 25 (1988), 618—643.

[4] Liseikin, V. D., On the numerical solution of equations with interior and exterior boundary layers on a non-uniform mesh, *Proc. BAIL* Ⅰ *Conference*, J. J. H. Miller, Ed., Boole Press, Dublin (1981), 68—80.

[5] Veldhuizen, M. V., High order schemes of positive type for singular perturbation problems, *Numerical Analysis of Singular Perturbation Problems*, P. W. Hemker and J. J. H. Miller (Ed.), London Academic Pr. (1979), 361—381.

[6] Vulanovic, R., A second order uniform numerical method for a turning point problem, *Zb. Rad. Prir. -Mat. Fak. Univ. Novom. Sadu, Ser. Mat.*, 18(1) (1988), 17—30.

A Second Order Uniform Difference Scheme for a Singularly Perturbed Turning Point Problem

Sun Xiao-di

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

We construct a positive type difference scheme for a singularly perturbed boundary value problem with a turning point. It's proved that this scheme is the second order convergence, uniformly in ε, to the solution of the singularly perturbed B. V. P. Numerical examples are provided.

Key words singularly perturbed problem, turning point, difference method, positive type difference scheme