

# 开孔浅球壳的非线性动力响应 及其动力稳定\*

付衣铭 刘小虎

(长沙 湖南大学工程力学系, 1991年3月4日收到)

## 摘 要

本文建立了具轴对称变形、考虑横向剪切影响的浅球壳的非线性运动方程, 对周边弹性支承开孔浅球壳的非线性静、动力响应及动力稳定问题进行了探讨。在解题方法上, 对位移函数在空间上采用正交配点法离散, 在时间上采用平均加速度法(Newmark- $\beta$ 法)离散, 变求解一组非线性微分方程为求解一组线性代数方程。文中给出了不同情况下的若干数值结果, 且与有关文献的结果作了比较。

**关键词** 浅球壳 非线性 动力响应 动力稳定 正交配点法

## 一、引 言

浅球壳作为复杂结构元件在宇航、火箭、潜艇、核反应堆、压力容器、土木建筑等工程中得到日益广泛的应用, 它的力学性能早已引起力学工作者的关注。在其各类线性问题已被深入研究的基础上, 它的几何非线性问题正被积极地探讨。文献[2]应用变分原理近似地研究了简支条件下一般球壳的非线性振动; 文献[3]应用Lagrange方程建立了周边夹持浅球壳的模态方程, 然后采用Newton-Raphson法求得了非线性幅频曲线; 文献[4]基于Marguerre方程分析了周边夹持浅球壳的非线性动力响应; 文献[5]根据Sander轴对称非线性弹性壳理论, 应用有限差分方程求解了周边夹持浅球壳的静、动力稳定问题; 文献[6]基于Donnell型非线性运动方程, 采用正交配点法求解了简单支承条件下浅球壳的非线性动力响应及动力失稳问题; 同样地采用正交配点法, 文献[7]研究了周边夹持置于弹性地基上的正交各向异性浅球壳的非线性动力响应及动力失稳问题。在此研究领域内, 最具代表性及有影响的是Y. Nath的工作。但是所有已做的工作中均没考虑横向剪切变形的影响, 且涉及的仅是简单支承条件。

本文采用R. D. Mindlin在处理厚板问题中的类似假设, 且为简化计算认为中曲面上的线素绕Z轴的转角可忽略不计, 应用Hamilton原理建立了考虑横向剪切、周边弹性支承浅球壳的非线性运动方程; 求解了开孔浅球壳的静、动力响应及动力失稳问题; 横向剪切变

\* 杨桂通推荐。

形的影响被深入讨论。

## 二、基本方程

首先考虑一般的球壳，壳上任一点的坐标由中曲面的地理坐标  $(\phi, \theta)$  及沿中曲面外法线方向的坐标  $Z$  确定。 $\phi$  为纬度的补角，从旋转轴计量起； $\theta$  为经度，从任一平行圆半径计量起；设球壳的半径为  $R$ ，厚度为  $h$ ，则  $Z=0$  指明半径为  $R$  的中曲面， $Z=\pm h/2$  分别指明球壳的外表面和内表面。

### 1. 位移、应变关系

在本文的分析中放弃经典薄壳理论的直法线假设，保留直线假设，且认为沿  $Z$  方向的应变  $\varepsilon_{33}=0$ ，而  $\sigma_{33}$  与其它应力分量相比属高阶小量，可忽略不计。则球壳上任一点沿  $\phi, \theta$ ，和  $Z$  方向的位移可表示为：

$$\left. \begin{aligned} u(\phi, \theta, Z, t) &= u^0(\phi, \theta, Z, t) + Z\psi_1(\phi, \theta, t) \\ v(\phi, \theta, Z, t) &= v^0(\phi, \theta, Z, t) + Z\psi_2(\phi, \theta, t) \\ w(\phi, \theta, t) &= w^0(\phi, \theta, t) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

上式中  $t$  为时间变量； $u^0, v^0, w^0$  分别是球壳中曲面上的点沿  $\phi, \theta, Z$  方向的位移分量； $\psi_1$  和  $\psi_2$  分别为球壳横截面在  $\phi-Z$  和  $\theta-Z$  面内的转角。为简化计算，设中曲面上的线素绕  $Z$  轴的转角  $\omega_3$  可忽略不计，因为它与中曲面上的线素绕  $\phi, \theta$  坐标轴的转角  $\omega_1$  及  $\omega_2$  相比，是十分微小的；进一步地在  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的表达式中取  $1 + Z/R \approx 1$ 。在本文所取正交曲线坐标系下，中曲面的拉梅 (Lamè) 系数  $A=R, B=R \cdot \sin\phi$ ，则球壳中曲面上各点的应变分量  $\varepsilon_{ij}^0 (i, j=1, 2, 3)$  及曲率、扭率  $k_{ij}^0 (i, j=1, 2)$  的改变量可表示为：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u^0}{\partial \phi} + \frac{w^0}{R} + \frac{1}{2} \omega_1^2 \\ \varepsilon_{22}^0 &= \frac{1}{R \sin\phi} \frac{\partial v^0}{\partial \theta} + \frac{\cot\phi}{R} u^0 + \frac{w^0}{R} + \frac{1}{2} \omega_2^2 \\ \varepsilon_{12}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial v^0}{\partial \phi} + \frac{1}{R \sin\phi} \frac{\partial u^0}{\partial \theta} - \frac{\cot\phi}{R} v^0 - \omega_1 \omega_2 \\ \varepsilon_{13}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial w^0}{\partial \phi} - \frac{u^0}{R} + \psi_1, \quad \varepsilon_{23}^0 = \frac{1}{R \sin\phi} \frac{\partial w^0}{\partial \theta} - \frac{v^0}{R} + \psi_2 \\ k_{11}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial \phi}, \quad k_{22}^0 = \frac{1}{R \sin\phi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} + \frac{\cot\phi}{R} \psi_1 \\ k_{12}^0 &= \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_2}{\partial \phi} + \frac{1}{R \sin\phi} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{\cot\phi}{R} \psi_2 \\ \omega_1 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{R \sin\phi} \frac{\partial w^0}{\partial \theta} - \frac{v^0}{R} - \psi_2 \right], \quad \omega_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{u^0}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w^0}{\partial \phi} + \psi_1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中下标 1, 2, 3 分别对应  $\phi, \theta$  和  $Z$  方向，球壳上任一点的应变分量  $\varepsilon_{ij}$  与  $\varepsilon_{ij}^0$  及  $k_{ij}^0$  的关系如壳的经典理论<sup>[1]</sup>所给出。

### 2. 内力和内力矩

球壳上应力的合力及合力矩可表示为：

$$\begin{Bmatrix} [N] \\ [M] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [e^0] \\ [K] \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Gh & 0 \\ 0 & Gh \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{13}^0 \\ e_{23}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

以上式中:

$$[N] = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{Bmatrix}, [M] = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}, [e^0] = \begin{Bmatrix} e_{11}^0 \\ e_{22}^0 \\ e_{12}^0 \end{Bmatrix}, [K] = \begin{Bmatrix} k_{11}^0 \\ k_{22}^0 \\ k_{12}^0 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$$[A] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, [D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

由式(2.4)的逆变换, 可将 $e_{13}^0$ 及 $e_{23}^0$ 表示为:

$$\begin{Bmatrix} e_{13}^0 \\ e_{23}^0 \end{Bmatrix} = T_s \begin{bmatrix} 1/Gh & 0 \\ 0 & 1/Gh \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

上式中引入横向剪切影响因子 $T_s$ ,  $T_s=0, 1$ 分别表示不考虑或考虑横向剪切的影响。

### 3. 运动微分方程

根据本文的假设, 由Hamilton原理, 忽略各面内惯性项和转动惯性项后, 一般球壳在法向荷载 $q$ 作用下的运动微分方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R\sin\phi} (\cos\phi N_1 + \sin\phi \frac{\partial N_1}{\partial\phi} + \frac{\partial N_{12}}{\partial\theta} - \cos\phi N_2) + \frac{Q_1 + \omega_1 N_{12} - \omega_2 N_1}{R} &= 0 \\ \frac{1}{R\sin\phi} (\cos\phi N_{12} + \sin\phi \frac{\partial N_{12}}{\partial\phi} + \frac{\partial N_2}{\partial\theta} + \cos\phi N_{12}) + \frac{Q_2 + \omega_1 N_2 - \omega_2 N_{12}}{R} &= 0 \\ \frac{1}{R\sin\phi} \left[ \cos\phi (Q_1 + \omega_1 N_{12} - \omega_2 N_1) + \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} (Q_1 + \omega_1 N_{12} - \omega_2 N_1) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial\theta} (Q_2 + \omega_1 N_2 - \omega_2 N_{12}) \right] - \frac{N_1 + N_2}{R} + q = \rho\omega_{,tt} \\ \frac{1}{R\sin\phi} (\cos\phi M_1 + \sin\phi \frac{\partial M_1}{\partial\phi} + \frac{\partial M_{12}}{\partial\theta} - \cos\phi M_2) + \frac{\omega_1 M_{12} - \omega_2 M_1}{R} - Q_1 &= 0 \\ \frac{1}{R\sin\phi} (\cos\phi M_{12} + \sin\phi \frac{\partial M_{12}}{\partial\phi} + \frac{\partial M_2}{\partial\theta} + \cos\phi M_{12}) + \frac{\omega_1 M_2 - \omega_2 M_{12}}{R} - Q_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

上式中  $\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_0 dZ$ , 而 $\rho_0$ 为壳体单位密度。

## 三、开孔浅球壳的轴对称变形控制方程

仅在法向均布荷载 $q$ 作用下的周边弹性支承开孔浅球壳如图1所示。图中 $H, a, b$ 分别为壳高, 基圆半径和开孔半径;  $r$ 为新引入的平行圆径向坐标, 对于浅球壳有如下的近似关

系:  $r \approx R\phi$ ,  $\sin\phi \approx \phi$ ,  $\cos\phi \approx 1$ . 又在轴对称变形的情况下, 位移  $v=0$ , 且所有变量与坐标  $\theta$  无关, 则有  $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{23}=\psi_2=\omega_1=0$ ,  $N_{12}=M_{12}=Q_2=0$ , 于是由式 (2.8) 可得出简化的浅球壳轴对称运动方程, 然后再将式 (2.2)、(2.3) 和 (2.7) 代入, 引入无量纲因子后, 则得到较

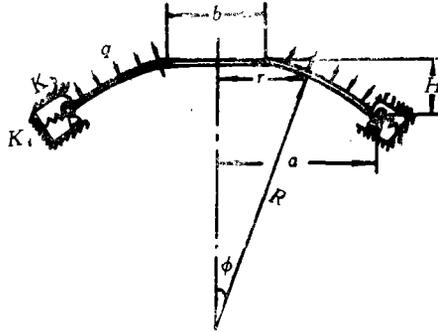


图 1

精确的开孔浅球壳具轴对称变形时的无量纲运动微分方程:

$$\left. \begin{aligned}
 & L_1(U) + L_2(W) + L_3(\psi_1) + \frac{1}{8(1+\nu)} \frac{G_1^2}{r+\xi} + \frac{1}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial r} G_1^2 \\
 & - \frac{\lambda s^2}{2(1-\nu^2)} G_1(G_3 + \nu G_4) - \frac{\lambda^2 s^2}{2} G_1 G_5 - \frac{\lambda s^2}{16(1-\nu^2)} G_1^2 = 0 \\
 & L_4(U) + L_5(W) + L_6(\psi_1) - \frac{\lambda}{8(1-\nu)} G_1^2 - \frac{s\lambda}{2} \frac{G_1 G_5}{r+\xi} \\
 & - \frac{s\lambda}{2} \left( \frac{\partial G_1}{\partial r} G_5 + G_1 \frac{\partial G_5}{\partial r} \right) - \frac{G_1}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial G_3}{\partial r} + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial r} G_1^2 + \nu \frac{\partial G_4}{\partial r} \right) \\
 & - \frac{1}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{G_1}{r+\xi} + \frac{\partial G_1}{\partial r} \right) \left( G_3 + \frac{G_1^2}{8} + \nu G_4 \right) - \frac{q}{(1+\xi)^4} = 0 \\
 & T_s [L_7(\psi_1) - (1+\nu)\lambda s^2 G_1 G_5] - G_2/s = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

上式中:

$$L_1(\ ) = \frac{1}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\ ) + \frac{1}{r+\xi} \frac{\partial}{\partial r}(\ ) - \frac{1}{(r+\xi)^2}(\ ) \right]$$

$$L_2(\ ) = \frac{\lambda}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r}(\ )$$

$$L_3(\ ) = \frac{s\lambda}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\ ) + \frac{1}{r+\xi} \frac{\partial}{\partial r}(\ ) - \frac{1}{(r+\xi)^2}(\ ) \right]$$

$$L_4(\ ) = -\frac{\lambda}{1-\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(\ ) + \frac{1}{r+\xi}(\ ) \right]$$

$$L_5(\ ) = -\frac{2\lambda^2}{1-\nu}(\ ) -(\ ),_{rr}$$

$$\begin{aligned}
 L_6(\ ) = & \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{s} \left[ \frac{\partial^3}{\partial r^3}(\ ) + \frac{2}{r+\xi} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\ ) - \frac{1}{(r+\xi)^2} \frac{\partial}{\partial r}(\ ) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(r+\xi)^3}(\ ) \right]
 \end{aligned}$$

$$L_7(\cdot) = \frac{1}{6(1-\nu)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2}(\cdot) + \frac{1}{\bar{r} + \xi} \frac{\partial}{\partial \bar{r}}(\cdot) - \frac{1}{(\bar{r} + \xi)^2}(\cdot) \right]$$

$$G_1 = \frac{\psi_1}{s} - \frac{\partial W}{\partial \bar{r}}, G_2 = \frac{\psi_1}{s} + \frac{\partial W}{\partial \bar{r}}, G_3 = \frac{\partial U}{\partial \bar{r}} + \lambda W$$

$$G_4 = \frac{U}{\bar{r} + \xi} + \lambda W, G_5 = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{r}} + \nu \frac{\psi_1}{\bar{r} + \xi} \right]$$

引入的无量纲因子为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r-b}{a-b}, \quad \xi = \frac{b}{a-b}, \quad U = \frac{a-b}{h^2} u^0, \quad W = \frac{w^0}{h} \\ \lambda &= \frac{(a-b)^2}{Rh}, \quad s = \frac{h}{a-b}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{Eh^3}{\rho(a-b)^4}}, \quad q = \frac{qa^4}{Eh^4} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

对于本文所讨论的问题, 设初始条件为:

$$W(\bar{r}, 0) = \dot{W}(\bar{r}, 0) = 0 \quad (3.3)$$

而边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}=0: N_{\bar{r}}(0) &= 0, M_{\bar{r}}(0) = 0, Q_{\bar{r}}(0) = 0 \\ \bar{r}=1: W(1) &= 0, N_{\bar{r}}(1) = -K_i U(1), M_{\bar{r}}(1) = -K_b \psi_1(1) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

上式中:

$$K_i = \frac{(a-b)K_i}{Eh}, \quad K_b = \frac{(a-b)K_b}{Eh^3}$$

这里  $K_b$  和  $K_i$  分别为弹性约束边界的转动弹性刚度和面内弹性刚度, 且当  $K_b = 0, \infty$  及  $K_i = 0, \infty$  时分别对应于简支、夹持、可动和不可动边界. 又由式 (2.3)、(2.4) 求出内力及内力矩的表达式后, 边界条件可写为如下的无量纲形式:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}=0: \frac{\partial U}{\partial \bar{r}} + \lambda W + \frac{1}{8} \left( \frac{\psi_1}{s} - \frac{\partial W}{\partial \bar{r}} \right)^2 + \nu \left( \frac{U}{\bar{r} + \xi} + \lambda W \right) &= 0 \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{r}} + \nu \frac{\psi_1}{\bar{r} + \xi} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \bar{r}^2} - (1+\nu) \frac{\psi_1}{(\bar{r} + \xi)^2} &= 0 \\ \bar{r}=1: W(1) &= 0 \\ \frac{1}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial U}{\partial \bar{r}} + \nu \frac{U}{\bar{r} + \xi} + \lambda(1+\nu)W + \frac{1}{8} \left( \frac{\psi_1}{s} - \frac{\partial W}{\partial \bar{r}} \right)^2 \right] &= -K_i U(1) \\ \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial \psi_1}{\partial \bar{r}} + \nu \frac{\psi_1}{\bar{r} + \xi} \right] &= -K_b \psi_1(1) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

#### 四、解题方法

为了求解满足初始条件 (3.3) 和边界条件 (3.5) 的非线性微分方程组 (3.1), 本文将位移函数  $W$ ,  $U$  和  $\psi_1$  在空间和时域内进行离散. 在空间上采用正交配点法离散, 选用 Chebychev 多项式的零点作为配置点:

$$\bar{r}_i = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{(2i-1)\pi}{2N} \right] \right\} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (4.1)$$

对于  $N$  为配置点, 位移函数可表示为:

$$\psi_1(\bar{r}) = \sum_{m=1}^{N+3} \bar{r}^{m-1} a_m, U(\bar{r}) = \sum_{n=1}^{N+2} \bar{r}^{n-1} b_n, W(\bar{r}) = \sum_{l=1}^{N+1} \bar{r}^{l-1} c_l, (0 \leq \bar{r} \leq 1) \quad (4.2)$$

且定义平均挠度  $\bar{W}$  为:

$$\bar{W} = \frac{\int_0^1 2\pi r W dr}{\int_0^1 2\pi r dr} = 2 \int_0^1 W \bar{r} d\bar{r} = \sum_{l=1}^{N+1} \frac{2}{l+1} c_l \quad (4.3)$$

在时间上将外荷载的作用时间  $\tau$  等分为小时间段  $\Delta\tau$ , 整个问题采用迭代法求解. 在任一迭代步  $J$  中, 所求问题中的所有非线性项被线性化, 写为如下形式:

$$(X \cdot Y)_J = (X)_J (Y)_J, \quad (4.4)$$

上式中  $(Y)_J$  是前二次迭代值的均值, 对于初始步可应用二次外推法求取, 即:

$$(Y)_J = A(Y)_{J-1} + B(Y)_{J-2} + C(Y)_{J-3} \quad (4.5)$$

对于不同的迭代步, 系数  $A, B, C$  可分别取如下数值:  $J=1: A=1, B=0, C=0; J=2: A=2, B=-1, C=0; J \geq 3: A=3, B=-3, C=1$ . 然后应用平均加速度法, 方程(3.1)中的惯性项可表达为:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \right)_J &= \frac{4(W_J - W_{J-1})}{(\Delta\tau)^2} - \frac{4(\partial W / \partial \tau)_{J-1}}{\Delta\tau} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \right)_{J-1} \\ \left( \frac{\partial W}{\partial \tau} \right)_J &= \left( \frac{\partial W}{\partial \tau} \right)_{J-1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \right)_{J-1} + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \right)_J \right] (\Delta\tau) \\ W_J &= W_{J-1} + \left( \frac{\partial W}{\partial \tau} \right)_{J-1} (\Delta\tau) + \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \right)_{J-1} + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} \right)_J \right] (\Delta\tau)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

将关系式(4.4)与(4.6)代入方程(3.1)中, 且应用表达式(4.2), 则任一迭代步的配点方程为:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{N+3} a_m \left\{ \frac{\lambda s}{12(1-\nu^2)} [(m-1)(m-2) + (m-1)y_i - y_i^2] + \frac{P_i y_i \bar{r}_i}{8(1+\nu)s} + \frac{P \bar{r}_i (m-1)}{4(1-\nu^2)s} \right. \\ & \quad \left. - (m-1 + \nu y_i) \frac{\lambda^2 s^3 P_i \bar{r}_i}{24(1-\nu^2)} - \frac{\lambda s P_i^2 \bar{r}_i^2}{16(1-\nu^2)} \right\} \bar{r}_i^{m-3} \\ & + \sum_{n=1}^{N+2} b_n \left\{ \frac{1}{1-\nu^2} [(n-1)(n-2) + (n-1)y_i - y_i^2] - (n-1 + \nu y_i) \frac{\lambda s^2 P_i \bar{r}_i}{2(1-\nu^2)} \right\} \bar{r}_i^{n-3} \\ & + \sum_{l=1}^{N+1} c_l \left\{ \frac{\lambda(l-1)}{1-\nu} \bar{r}_i - \frac{(l-1)P_i y_i}{8(1+\nu)} - (l-1)(l-2) \frac{P_i}{4(1-\nu^2)} - \frac{\lambda^2 s^2 P_i \bar{r}_i^2}{2(1-\nu)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(l-1)\lambda s^2}{16(1-\nu^2)} P_i^2 \bar{r}_i \right\} \bar{r}_i^{l-3} = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{N+3} a_m \left\{ \frac{1}{12(1-\nu^2)s \bar{r}_i} [(m-1)(m-2)(m-3) + 2(m-1)(m-2)y_i - (m-1)y_i^2 + y_i^3] \right. \\ & \quad \left. - \frac{\lambda P_i \bar{r}_i^2}{8(1-\nu)s} - (m-1 + \nu y_i) \frac{\lambda s P_i y_i}{24(1-\nu^2)} - \frac{\lambda s}{24(1-\nu^2)} [(m-1 + \nu y_i) \bar{r}_i P_i \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + ((m-1)(m-2) + (m-1)\nu y_i - \nu y_i^2) P_i - \frac{(m-1)P_i^2 \bar{r}_i}{8(1-\nu^2)s} - \frac{P_i \bar{r}_i}{16(1-\nu^2)} (P_i y_i \\
 & + P_i' \bar{r}_i) \} \bar{r}_i^{m-3} \\
 & + \sum_{n=1}^{N+2} b_n \left\{ -(n-1+y_i) \frac{\lambda \bar{r}_i}{1-\nu} - \frac{1}{2(1-\nu^2)} [(n-1)(n-2) + (n-1)\nu y_i - \nu y_i^2] P_i \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2(1-\nu^2)} (n-1+\nu y_i) (P_i y_i + P_i' \bar{r}_i) \right\} \bar{r}_i^{n-1} \\
 & + \sum_{l=1}^{N+1} c_l \left\{ - \left[ \frac{2\lambda^2}{1-\nu} + \frac{4}{(\Delta\tau)^2} \right] \bar{r}_i^2 + \frac{(l-1)\lambda P_i \bar{r}_i}{8(1-\nu)} - \frac{P_i}{2(1-\nu^2)} \left[ (l-1)(1+\nu)\lambda \bar{r}_i \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{(l-1)(l-2)P_i}{4} \right] - \frac{1}{2(1-\nu^2)} (P_i y_i + P_i' \bar{r}_i) \left[ (1+\nu)\lambda \bar{r}_i - \frac{(l-1)P_i}{8} \right] \right\} \bar{r}_i^{l-1} \\
 & = \frac{\bar{q}}{(1+\xi)^4} - \left[ \frac{4W_{J-1}}{(\Delta\tau)^2} + \frac{4\dot{W}_{J-1}}{\Delta\tau} + \ddot{W}_{J-1} \right] \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{N+3} a_m \left\{ \frac{T_s}{6(1-\nu)} [(m-1)(m-2) + (m-1)y_i - \frac{\lambda s^2 P_i \bar{r}_i}{2} (m-1+\nu y_i)] - \frac{\bar{r}_i^2}{s^2} \right\} \bar{r}_i^{m-3} \\
 & - \sum_{l=1}^{N+1} c_l \frac{(l-1)}{s} \bar{r}_i^{l-2} = 0 \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

在各式中(·)和(·)分别代表对时间 $\tau$ 和对坐标 $r$ 的导数,且

$$y_i = \bar{r}_i / (\bar{r}_i + \xi), \quad P_i = (\psi_{1Jr})_i / s - (W'_{1r})_i$$

又应用位移函数的表达式(4.2),边界条件(3.5)可表示为:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{a_1}{8s} \left[ \frac{1}{s} \psi_{1Jr}(0) - W'_{1r}(0) \right] + \frac{\nu b_1}{\xi} + b_2 + (1-\nu)\lambda c_1 - \frac{c_2}{8} \left[ \frac{1}{s} \psi_{1Jr}(0) - W'_{1r}(0) \right] = 0 \\
 & \frac{\nu}{\xi} a_1 + a_2 = 0, \quad -\frac{(1+\nu)}{\xi^2} a_1 + 2a_3 = 0, \quad \sum_{l=1}^{N+1} c_l = 0 \\
 & \sum_{m=1}^{N+3} \frac{a_m}{8(1-\nu^2)s} \left[ \frac{1}{s} \psi_{1Jr}(1) - W'_{1r}(1) \right] + \sum_{n=1}^{N+2} \left[ \left( n-1 + \frac{\nu}{1+\xi} \right) / (1-\nu^2) + K_b \right] b_n \\
 & + \sum_{l=1}^{N+1} \frac{c_l}{1-\nu^2} \left\{ (1+\nu)\lambda - \frac{(l-1)}{8} \left[ \frac{1}{s} \psi_{1Jr}(1) - W'_{1r}(1) \right] \right\} = 0 \\
 & \sum_{m=1}^{N+3} \left[ \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left( m-1 + \frac{\nu}{1+\xi} \right) + K_b \right] a_m = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{4.10}$$

方程(4.7)至(4.10)共确定了 $3N+6$ 个线性方程,联立求解它们则系数 $a_m$ ,  $b_n$ 和 $c_l$ 被确定.迭代过程持续到每相邻两次计算所得结果的误差小于0.1%,在第 $J$ 步取得系数 $a_m$ ,  $b_n$ 和 $c_l$ 的收敛解后,该迭代步终止而进行第 $J+1$ 步的计算.

### 五、计算结果与讨论

本文对开孔浅球壳的静、动力响应及动力稳定问题列举了若干算例。在静态问题中只须将方程(4.8)中含 $\Delta\tau$ 及时间导数的项去掉；当 $\lambda=0$ 时，开孔浅球壳问题退化为圆板问题。计算结果表明采用 $N=10$ 个配点已能获得足够的精度。在所有给出的计算结果中，用 $\bar{W}$ 和 $W_0$ 分别表示无量纲平均挠度和孔边的挠度。

图2和图3为考虑横向剪切效应时，在跨径比 ( $a/R=0.0375$ ) 和开孔比 ( $b/a=0.2$ ) 为定值，而厚跨比 $s$ 变化时，周边简支及固支开孔浅球壳的静态响应曲线。由图可知，横向剪切变形对薄球壳几乎不产生影响，而随着壳厚的增加与边界弹性转动刚度的增加，横向剪切变

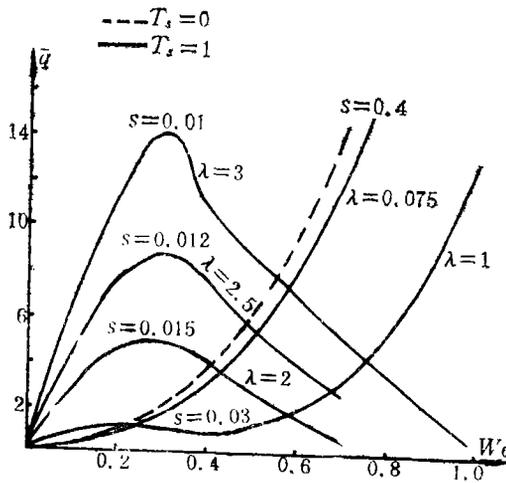


图2 简支开孔浅球壳的静态响应曲线

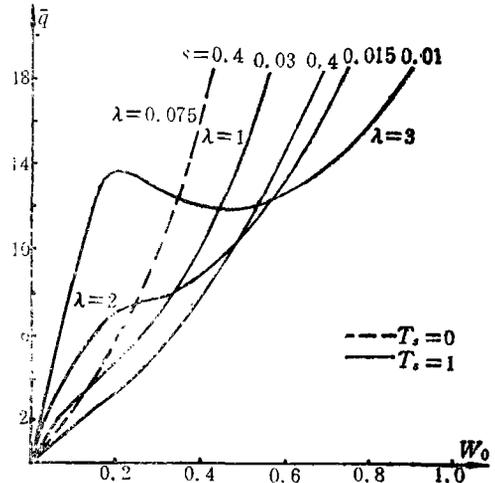


图3 固支开孔浅球壳的静态响应曲线

形对响应曲线的影响愈显著；当 $\lambda$ 值较小时浅球壳近似为圆板，当 $\lambda=1$ (简支)和 $\lambda=2$ (固支)时，开孔浅球壳已发生跳跃失稳现象。图4显示了当跨径比 ( $a/R=0.0316$ ) 和厚跨比 ( $h/a=0.01425$ ) 一定，考虑横向剪切效应时不同开孔比对简支开孔浅球壳的静态响应曲线的影响。显然地开孔愈大的球壳愈易发生失稳现象，但其失稳后的刚度较大。图5为阶跃型冲击荷载作用下，固支开孔浅球壳的动态响应曲线。当跨径比 ( $a/R=0.022$ ) 和开孔比 ( $b/a=0.1$ ) 为定值时，随着浅球壳厚度的增加和横向剪切效应的影响，孔边各点的振动幅值显著减小而振动频率增加。图6为阶跃型冲击荷载作用下，当跨径比 ( $a/R=0.0316$ ) 和厚跨比 ( $h/a=0.01425$ ) 一定、考虑横向剪切效应时，不同开孔比对简支开孔浅球壳的动态响应曲线的影响。由图6可知，开孔比的变化使球壳孔边各点的振动幅值变化不大但振动频率发生显著变化，一般地

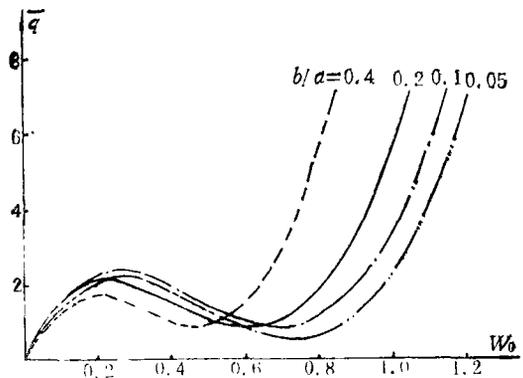


图4 不同开孔比时简支开孔浅球壳的静态响应曲线

可知，开孔比的变化使球壳孔边各点的振动幅值变化不大但振动频率发生显著变化，一般地

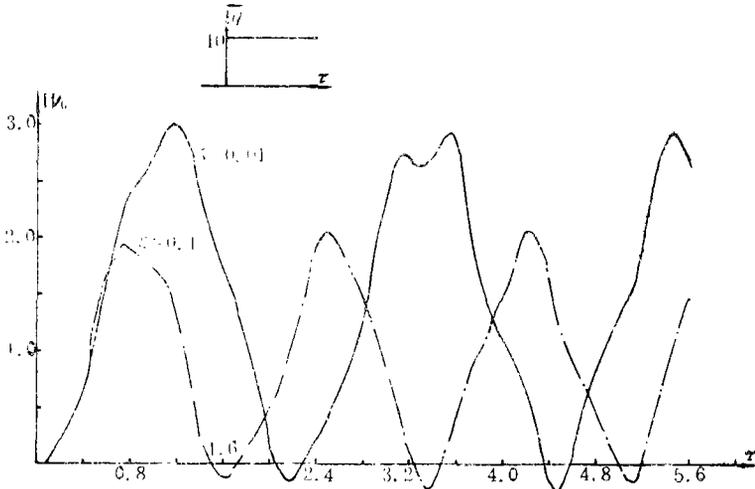


图5 不同壳厚时固支开孔浅球壳的动态响应曲线

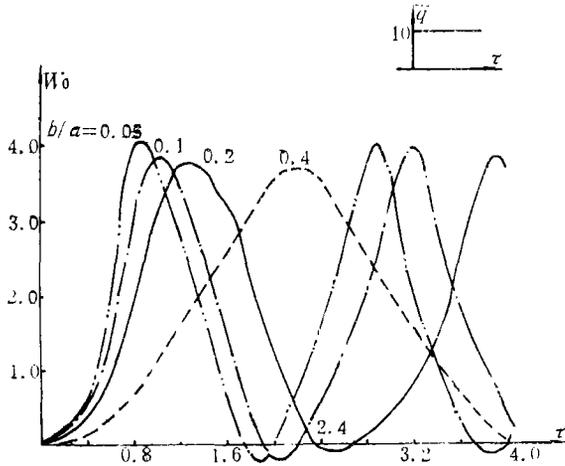


图6 不同开孔比时简支开孔浅球壳的动态响应曲线

开孔使球壳的刚度变小，振动频率降低。图7显示了不同类型冲击荷载作用下的开孔浅球壳 ( $a/R=0.022, s=0.01, b/a=0.1$ ) 的动态响应曲线。图7表明即使冲击作用时间相同，不同类型的冲击荷载将较大地影响孔边各点的振动幅值与频率；而在相同类型的冲击荷载作用下（如图中a,b），冲量的大小也显著影响振动幅值。

在计算开孔浅球壳的动力失稳问题中，为便于与其它文献比较，引入  $\bar{q}^* = \bar{q} [3(1-\nu^2)]^{\frac{1}{2}} \cdot (1-b/a)^4 / (2\lambda^2)$ 。计算中时间步长取为  $\Delta\tau=0.002$ ，逐步增加  $\bar{q}^*$  值，直至某一时刻对平均挠度  $\bar{w} = w/h$  的计算收敛失效，即认为发生了动力失稳。此时刻振动幅值急速增至相当大的数值（相对于失稳前），其对应的  $\bar{q}^*$  值即为开孔浅球壳的临界动力屈曲荷载  $\bar{q}_{cr}^*$ 。图8,9,10,11显示了在阶跃型冲击荷载作用下，当跨径比 ( $a/R=1.67$ ) 和开孔比 ( $b/a=0.4$ ) 为定值时固支开孔浅球壳的动力失稳情况。由图可知，参数  $\lambda$  愈小则愈易发生动力失稳；而横向剪切变形将降低开孔浅球壳的临界动力屈曲荷载。表1为  $\lambda=10, b/a=0.4$  时本文所得临界动力屈曲荷载与有关文献[8]、[9]的比较。

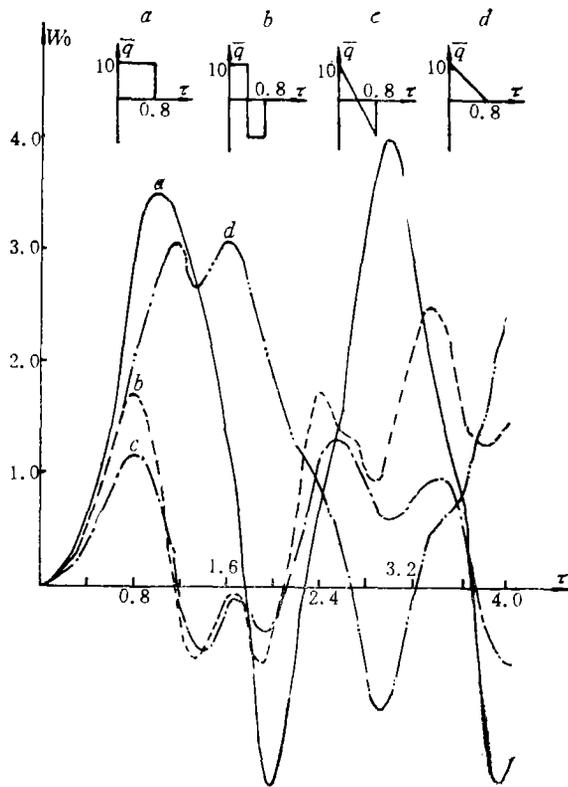


图7 不同冲击荷载作用下固支开孔浅球壳的动态响应曲线

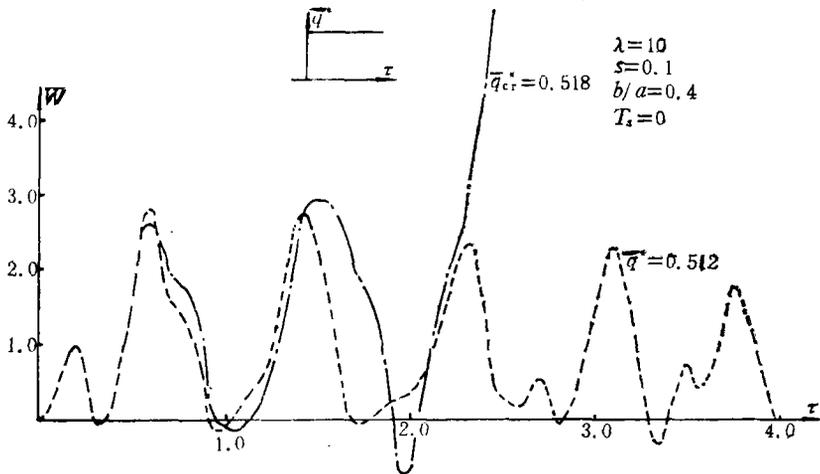


图8 不计横向剪切效应固支开孔浅球壳的动力失稳

表1 固支开孔浅球壳在均布阶跃冲击荷载作用下临界动力屈曲荷载的比较

	本	文	P. C. Dumir[8]	R.S.Alwar & B.S.Reddy[9]
	$T_1=0$	$T_1=1$		
$\bar{q}_{cr}^*$	0.518	0.483	0.478	0.675

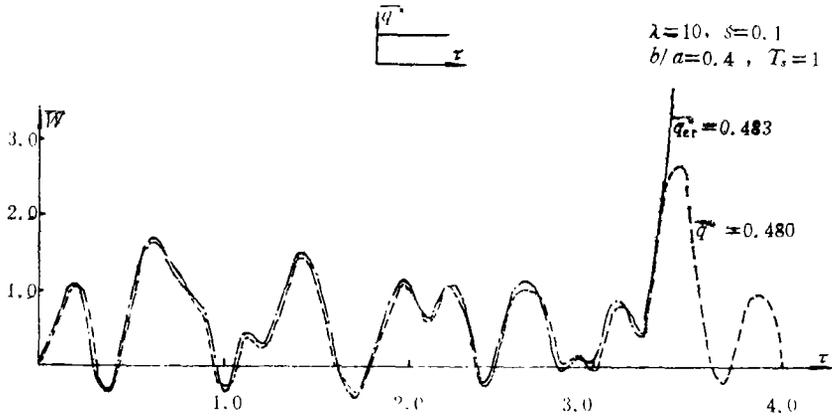


图9 考虑横向剪切效应固定支开孔浅球壳的动力失稳

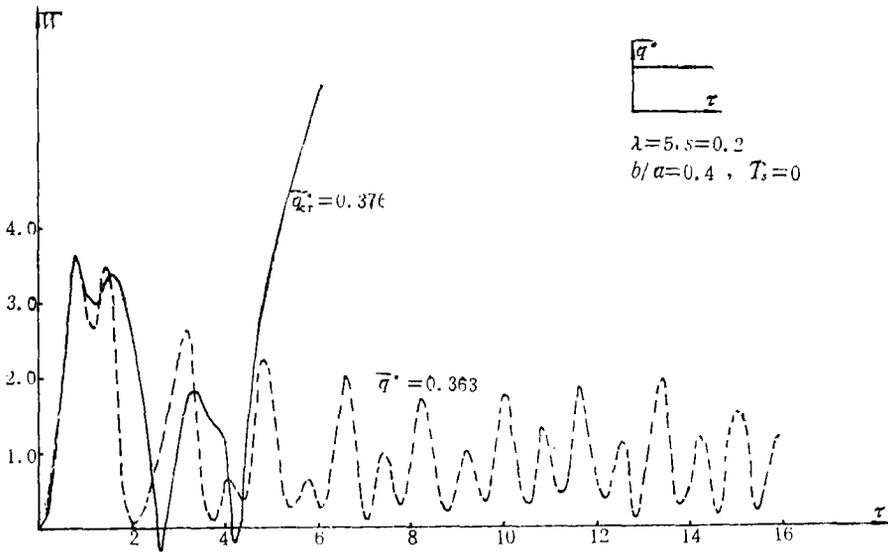


图10 不计横向剪切效应固定支开孔浅球壳的动力失稳

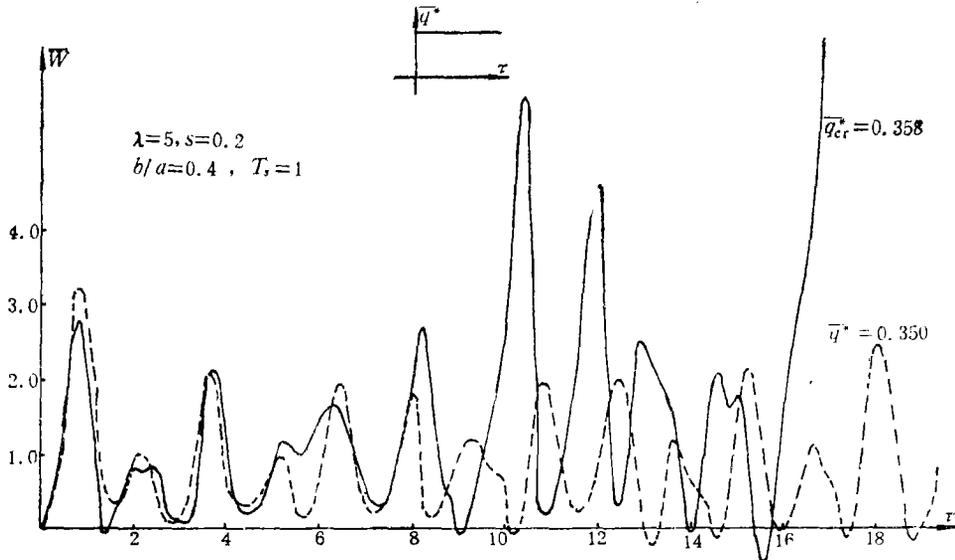


图11 考虑横向剪切效应固定支开孔浅球壳的动力失稳

## 参 考 文 献

- [ 1 ] 符拉索夫著, 薛振东、朱世靖译, 《壳体的一般理论》, 人民教育出版社 (1964).
- [ 2 ] Grossman, P. L., B. Koplik and Yu Yi-yuan, Nonlinear vibrations of shallow spherical shells, *J. Appl. Mech.*, (3) (1969), 541—458.
- [ 3 ] Varadan, T. K. and K. A. V. Pandalai, Nonlinear flexural oscillations of orthotropic shallow spherical shells, *Compu. & Structures*, 9 (1978), 417—125.
- [ 4 ] Archer, R. R. and C. G. Lange, Nonlinear dynamic behavior of shallow spherical shells, *AIAA J.*, 12 (1965), 2313—2317.
- [ 5 ] Stephens, W. B. and R. E. Fulton, Axisymmetric static and dynamic buckling of spherical caps due to centrally distributed pressures, *AIAA J.*, 6 (1969), 2120—2126.
- [ 6 ] Nath, Y., P. C. Dumir and R. S. Bhatia, Nonlinear static and dynamic analysis of circular plates and shallow spherical shells using the collocation method, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 21 (1985), 565—578.
- [ 7 ] Nath, Y. and R. K. Jain, Nonlinear studies of orthotropic shallow spherical shells on elastic foundation, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 6 (1986), 447—458.
- [ 8 ] Dumir, P. C., M. L. Gandhi and Y. Nath, Axisymmetric static and dynamic buckling of orthotropic shallow spherical cap with circular hole, *Compu. & Structures*, 19 (1984), 725—736.
- [ 9 ] Alwar, R. S. and B. S. Reddy, Dynamic buckling of isotropic and orthotropic shallow spherical cap with circular hole, *Internat. J. Mech. Sci.*, 21 (1979), 681—688.

## Nonlinear Dynamic Response and Dynamic Buckling of Shallow Spherical Shells with Circular Hole

Fu Yi-ming      Liu Xiao-hu

(Dept. of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha)

### Abstract

In this paper, the nonlinear equations of motion for shallow spherical shells with axisymmetric deformation including transverse shear are derived. The nonlinear static and dynamic response and dynamic buckling of shallow spherical shells with circular hole on elastically restrained edge are investigated. By using the orthogonal point collocation method for space and Newmark- $\beta$  scheme for time, the displacement functions are separated and the nonlinear differential equations are replaced by linear algebraic equations to seek solutions. The numerical results are presented for different cases and compared with available data.

**Key words** shallow spherical shell, nonlinearity, dynamic response, dynamic buckling, orthogonal point collocation method