

# 微血管自律运动的流体力学及血液 粘弹性质的影响\*

郭 仲 三

(中国科学院成都分院数理科学研究所, 1990年6月1日收到)

## 摘 要

本文研究了微血管自律运动引起的血液流动, 着重分析了血液的粘弹性质对压力升高及壁面摩擦阻的影响。结果表明, 微血管自律运动具有人体“第二心脏”的作用, 血液粘弹性质的影响与 Weissenberg 数及平均流量的大小有关。

**关键词** 自律运动 微循环 血液流变学 粘弹性 Weissenberg数

## 一、引 言

微血管自律运动, 是指微动脉、微静脉的不从属于心脏跳动的自主节律性舒缩运动。在微循环的众多研究课题中, 对它的研究还不多; 考虑到微循环中血液的非牛顿特性的, 为数就更少了。本文从血液流变学的角度, 研究了微血管自律运动引起的血流速度、压力梯度及压力升高、应力分布及管壁摩擦阻, 着重分析了血液粘弹性质的影响, 进而探讨了其生理意义。

早在30年代, 人们就已经观察到微动脉的自动节律性收缩。但是, 认识到这一运动对于组织和器官的血液灌注的极端重要性, 却是最近的事<sup>[1]</sup>。单靠心脏的压力, 很难将血液输送到机体各器官和组织的曲折细微的毛细血管网并给以充分的灌注; 是微血管的自律运动给了血液克服微血管与毛细血管阻力的巨大能量, 起到了人体“第二心脏”的重要作用。可以看出, 研究微血管自律运动对于血液流动的影响, 对理解和认识这一现象, 是十分必要的。

最近, 吴望一等<sup>[2,3]</sup>研究了微血管自律运动的血流动力学。他们以牛顿流体模拟血液, 血管为等直圆管, 其运动规律各处相同。对于不可渗透管, 得到了精确解; 对于可渗透管, 则给出了摄动解。

本文中, 我们将血液视为粘弹性流体, 并考虑到微血管管径的变化, 建立起微血管自律运动的力学模型, 给出了问题的解析解, 并通过数值实例进行了讨论。

\* 康振黄推荐。

## 二、力学模型

根据修瑞娟等<sup>[4]</sup>的研究,微血管自律运动是一种具有独特的频率与振幅的拟周期运动波,其频率与脉搏或整体血压无关,相对振幅随管径减小而增大,波动从微动脉的近心端而远心端传播。虽然微血管自律运动主要发生在微动脉,在微静脉(及淋巴管)内有时也能观察到。考虑到微血管管径随轴向位置的变化,我们取管壁运动方程为

$$H'(z', t') = a_0 + \gamma z' + h'(z', t') \quad (2.1)$$

其中,  $a_0$ ,  $\gamma$  为常量,  $\gamma < 0$  表示微动脉,  $\gamma > 0$  表示微静脉,  $h'$  代表自律运动的一般规律,可由实验观测给出其具体形式。管壁形状及坐标设置如图1所示。

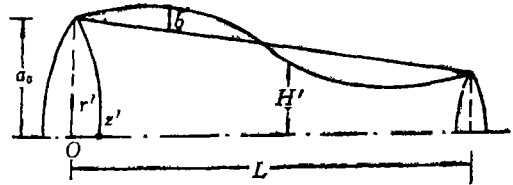


图1 几何模型

血液在微循环中显示出强烈的非牛顿性质。定常流情况下,主要表现为依赖于剪切率 $\dot{\gamma}$ 的纯粘性性质;振荡流情况下,则表现出明显的粘弹性<sup>[5]</sup>,各种 Maxwell 型的本构方程常用作这种情况下血液的流变模型<sup>[5,6]</sup>。本文选取上随体 Maxwell 流体模拟血液,其本构关系为

$$\mathbf{T}' + \lambda \frac{\delta \mathbf{T}'}{\delta t'} = 2\eta \mathbf{D}'_1 \quad (2.2)$$

其中,  $\lambda$  是松弛时间,  $\eta$  是粘度系数,均为常量,  $\delta/\delta t'$  是 Oldroyd 随动导数:

$$\frac{\delta \mathbf{T}'}{\delta t'} = \frac{\partial \mathbf{T}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{T}' - \mathbf{L} \cdot \mathbf{T}' - \mathbf{T}' \cdot \mathbf{L}^+ \quad (2.3)$$

其中,  $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v}'$  是速度梯度,“+”表示转置,  $\mathbf{D}'_1 = (\mathbf{L} + \mathbf{L}^+)/2$

根据微血管自律运动的特点,本文还作如下假设:

1. 流动是轴对称的;
2. 一切惯性项均可忽略;
3.  $\alpha = H'/L \ll 1$  ( $L$  为自律运动的波长),因此忽略速度的径向分量;
4.  $|\gamma| \ll 1$ ;
5. 管壁无轴向位移;
6. 管壁不可渗漏。

设自律运动的周期为  $T$ , 波速为  $c$ , 并令

$$\left. \begin{aligned} r &= r'/a_0, \quad z = z'/L, \quad t = t'/T, \quad H = H'/a_0 \\ u &= u'/c, \quad P = P'a_0^2/Lc\eta, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}'a_0/c\eta \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

将运动方程和本构关系无量纲化后,可以看出,当 Weissenberg 数

$$W = \lambda c/L$$

很小而可以忽略不计时,我们得到与牛顿流体完全相同的结果。当  $W$  不是很小(这是正常生理流动的实际情况),如果我们在每一式中只取  $\alpha$  的最低阶项而忽略其所有高阶项,则除了得到与牛顿流体相同的结果外,还得到与  $W$  成正比例的正应力  $T_{zz}$ 。为了进一步考察血液粘弹性质对微血管自律运动的生理作用的影响,根据连续方程  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  的提示,我们仅仅略去  $\alpha$  的高阶项中含有对  $z$  求导数的项。这样,得到用应力表示的无量纲运动方程:

$$\left. \begin{aligned} -P_{,r}/\alpha + T_{rr,r} + (T_{rr} - T_{\theta\theta})/r &= 0 \\ T_{r\theta,r} + 2T_{r\theta}/r &= 0 \\ -P_{,z} + (rT_{rz})_{,r}/r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

本构关系(2.2)则成为:

$$\left. \begin{aligned} T_{zz} + W(T_{zz,t} - 2T_{rz}u_{,r}/\alpha) &= 0, & T_{rr} + WT_{rr,t} &= 0 \\ T_{\theta\theta} + WT_{\theta\theta,t} &= 0, & T_{rz} + W(T_{rz,t} - T_{rr}u_{,r}/\alpha) &= u_{,r} \\ T_{z\theta} + W(T_{z\theta,t} - T_{r\theta}u_{,r}/\alpha) &= 0, & T_{r\theta} + WT_{r\theta,t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

(2.5)、(2.6)式中所有各量均为无量纲物理分量，“，”表示求偏导数。

问题的边界条件是：

$$\left. \begin{aligned} r=0: & u_{,r}=0 \\ r=H: & u=0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

此外，设  $t \rightarrow -\infty$  时，所有各量均为零。

(2.1)、(2.5)、(2.6)、(2.7)就构成前述假设之下微血管自律运动的定解问题。

### 三、数学计算

首先由(2.6)式可得

$$T_{rr} = T_{\theta\theta} = T_{r\theta} = T_{z\theta} = 0 \quad (3.1)$$

利用(2.7)、(3.1)积分(2.5)、(2.6)其余诸式，得：

$$u(r, z, t) = (H^2 - r^2)2Q/\pi H^4 \quad (3.2)$$

$$P(z, t)_{,z} = -\frac{8}{\pi W} e^{-t/W} \int_{-\infty}^t \frac{Q}{H^4} e^{t'/W} dt \quad (3.3)$$

$$T_{rz}(r, z, t) = -\frac{4r}{\pi W} e^{-t/W} \int_{-\infty}^t \frac{Q}{H^4} e^{t'/W} dt \quad (3.4)$$

$$T_{zz}(r, z, t) = \frac{32r^2}{\pi^2 \alpha W} e^{-t/W} \int_{-\infty}^t \frac{Q}{H^4} \left( \int_{-\infty}^{t'} \frac{Q}{H^4} e^{t''/W} dt'' \right) dt \quad (3.5)$$

由此又可得一个波长上的压力升高和壁面摩阻及其平均：

$$\Delta P_L(t) = \int_0^1 P_{,z} dz \quad (3.6)$$

$$\overline{\Delta P_L} = \int_{t_0}^{t_0+1} \Delta P_L(t) dt \quad (3.7)$$

$$F_L(t) = 2\pi \int_0^1 HT_{rz} \Big|_{r=H} dz \quad (3.8)$$

$$\overline{F_L} = \int_{t_0}^{t_0+1} F_L(t) dt \quad (3.9)$$

(3.2)~(3.5)式中的Q为体积流量，它与压力梯度关系为

$$Q(z, t) = -\pi H^4 (P_{,z} + WP_{,zt})/8 \quad (3.10)$$

设血液不可压缩，则质量守恒给出：

$$Q(0, t) - Q(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^z \pi H^2 dz \quad (3.11)$$

因为(2.1)式中的  $h'$  是任意的，故(3.6)~(3.11)式适用于任何形式的管壁运动。微血管自律运动的规律比较复杂，初步的研究可将其视为正弦波<sup>[1]</sup>，而这也可以作为任意运动的基波。故我们设

$$h' = b \sin 2\pi(z' - ct')/L$$

无量纲管壁运动方程则成为

$$H=1+\gamma z/\alpha+m \sin 2\pi(z-t) \quad (3.12)$$

其中,  $m=b/a_0$ . 这样, 就可由(3.11)式得:

$$Q(z,t)=Q_0(t)+Q_{osc}$$

其中:

$$Q_{osc}=2\pi m \left[ (1+\gamma z/\alpha) \sin 2\pi(z-t) + \frac{\gamma}{2\pi\alpha} \cos 2\pi(z-t) - \frac{m}{4} \cos 4\pi(z-t) \right] \quad (3.13)$$

而 $Q_0(t)$ 是 $t$ 的任意函数, 它在一个周期内的平均值就是平均流量 $\bar{Q}$ . 因此, 最方便、最有意义的作法就是令 $Q_0(t)$ 等于常量 $\bar{Q}$ . 由此得到 $Q$ 的最终表达式:

$$Q(z,t)=\bar{Q}+Q_{osc}$$

其中 $Q_{osc}$ 由(3.13)定义.

#### 四、结果分析

由于(3.3)~(3.9)式不能得到闭合形式的积分结果, 故我们选取参数

$$a_0=0.01\text{cm}, \gamma=-0.005, L=1\text{cm}$$

$$c=0.1\text{cm/s}, \eta=0.0035\text{Pa}\cdot\text{s}, T=10\text{s}$$

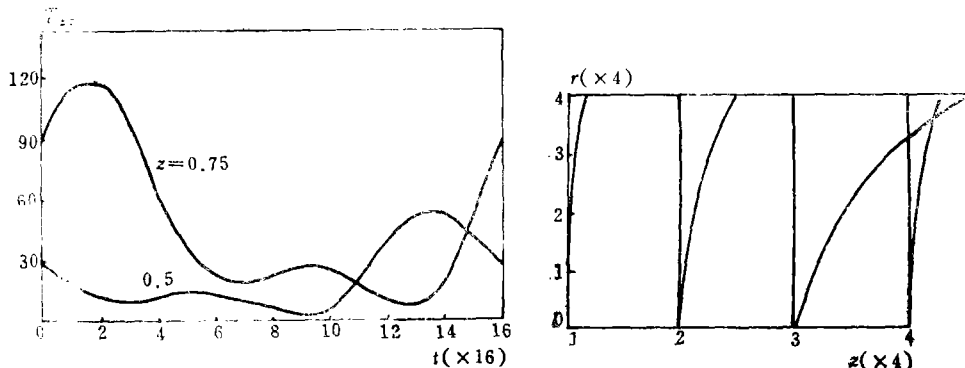
进行数值积分, 全面考察了 Weissenberg 数、平均流量、振幅、频率以及管径的非均匀性对血液流动的影响, 并讨论了其生理意义.

(3.2) 式表明轴向速度  $u$  沿管径按抛物线分布, 与流体弹性无关. (3.4) 式表明剪应力  $T_{rz}$  沿管径线性分布, 与牛顿流体相同.

由(3.10)式可见, 由于血液具有记忆特性, 流量  $Q$  就不仅与瞬时压力梯度有关, 而且与压力梯度的变化率有关, 并由此造成流量与压力梯度之间的相差. 这是与非弹性流体的重大区别. 当  $W \rightarrow 0$  时, (3.10) 式给出熟知的牛顿流体 Poiseuille 流的结果.

正应力  $T_{zz}$  的存在, 是考虑到血液的非线性粘弹性的结果(不难看出, 线性 Maxwell 流体模型将给出  $T_{zz}=0$ ). (3.5) 式表明,  $T_{zz}$  沿管径按抛物线分布, 并且是平均流量  $\bar{Q}$  的二次函数;  $W \rightarrow 0$  时,  $T_{zz} \rightarrow 0$ . 图 2 画出了  $T_{zz}$  随空间和时间的变化情况.

(3.7) 和 (3.9) 式表明,  $\Delta P_L$  与  $F_L$  都是  $\bar{Q}$  的线性函数, 且其斜率均小于零, 这说明平均流量  $\bar{Q}$  的增加起到减小压力升及加大壁面阻力的作用;  $\Delta P_L$  与  $F_L$  都由两部分组成: 一部分



(a)  $T_{zz}$  时间分布,  $r=H$

(b)  $T_{zz}$  空间分布,  $t=1$

图 2 正应力  $T_{zz}$  的分布.  $m=0.1, \bar{Q}=0, W=0.1$

是平均流量 $\bar{Q}$ 产生的，总为负值；另一部分是波动流量 $Q_{osc}$ 产生的，数值计算表明它总是正的。因此，微血管自律运动总是有利于血液的输送。

Weissenberg 数  $W$  对  $\Delta P_L$  与  $F_L$  的影响与  $\bar{Q}$  有关。对于正常血液，松弛时间  $\lambda$  可从 0.001 秒到 25 秒变化<sup>[6]</sup>， $W$  的变化范围则为 0.0001 到 2.5。图 3 给出  $W$  对压力—流量关系的影响。可以看出，在较大的平均流量下，血液的弹性减小压力的降落，保持其能量，因而促进自律运动“第二心脏”的作用。而当平均流量  $\bar{Q}$  较小时，血液弹性所起的作用正相反。图 4 给出了  $W$  对阻力—流量关系的影响，它表明当血液弹性较大时， $F_L$ 、 $\bar{Q}$  与  $W$  三者之间的关系和  $\Delta P_L$ 、 $\bar{Q}$  与  $W$  三者的关系相同，而当血液弹性较小时，则不论流量大小如何， $W$  的增加总使  $F_L$  增加，从而减小了微血管对血流的阻力。

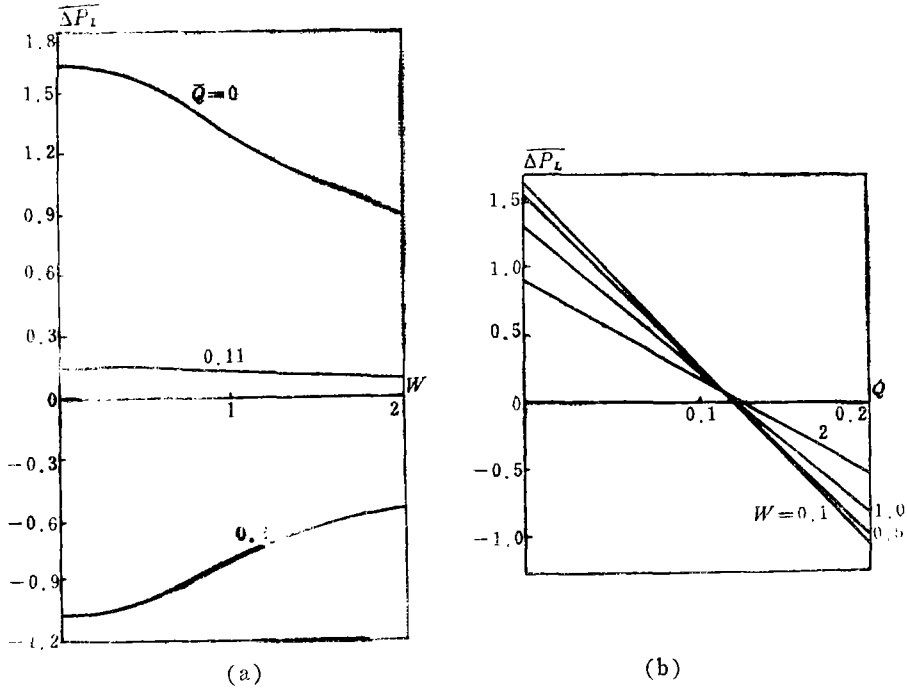


图3 血液弹性对压力—流量关系的影响。  $m=0.1$

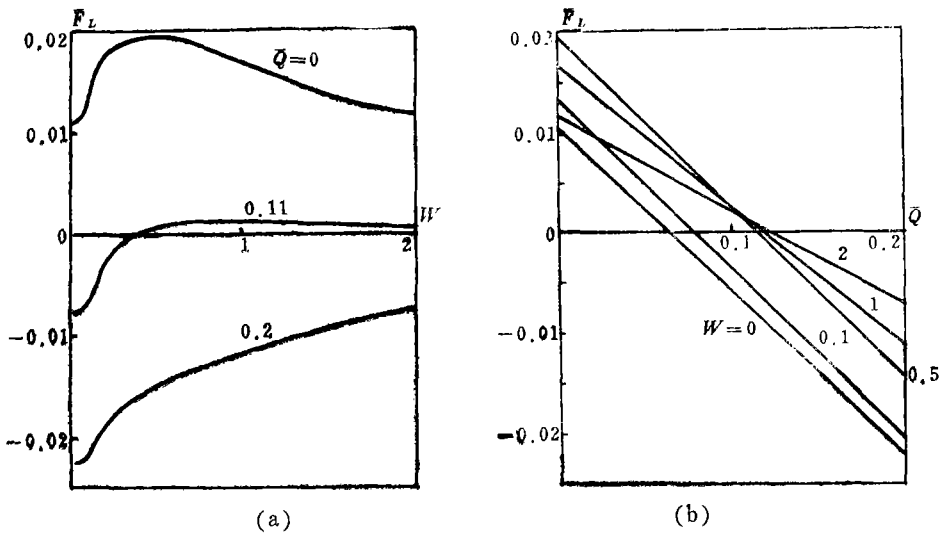


图4 血液弹性对壁面摩擦的影响。  $m=0.1$

正常情况下，微动脉自律运动的相对振幅约为20%，频率约为6周/分。而在药物作用下，相对振幅可达80%或更高，频率也可持续处于高水平（参看文献[4]）。本文结果表明，自律运动的振幅对 $\overline{\Delta P_L}$ 和 $\overline{F_L}$ 的影响很大，如图5所示。图6则表明频率的提高也使 $\overline{\Delta P_L}$ 与 $\overline{F_L}$ 提高，但程度不及振幅。因此，药物作用下激发的微动脉振幅与频率的高水平，对于缓

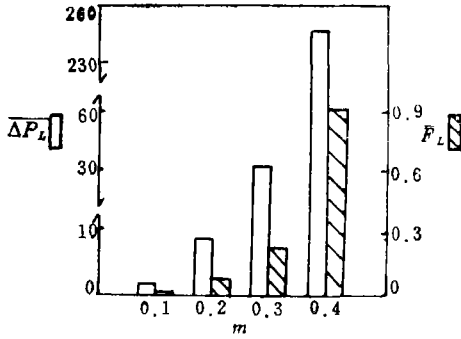


图5 振幅对压力和摩擦的影响。  
 $\bar{Q}=0, W=0.1$

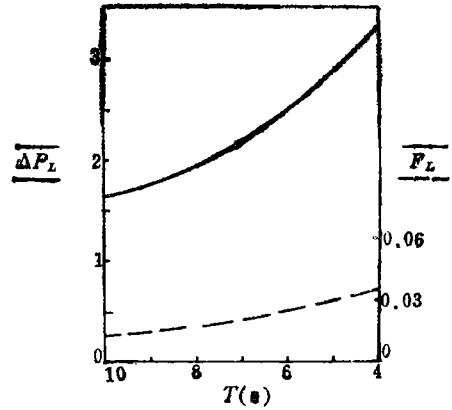
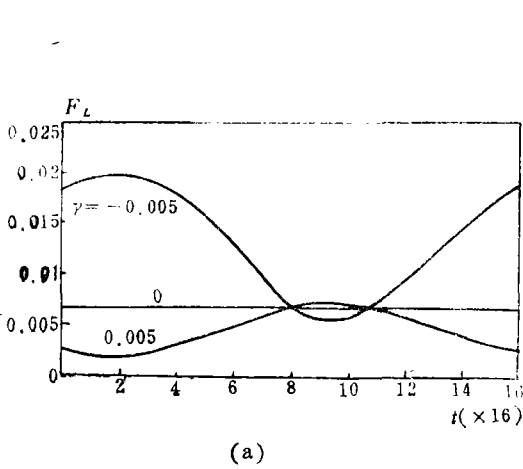
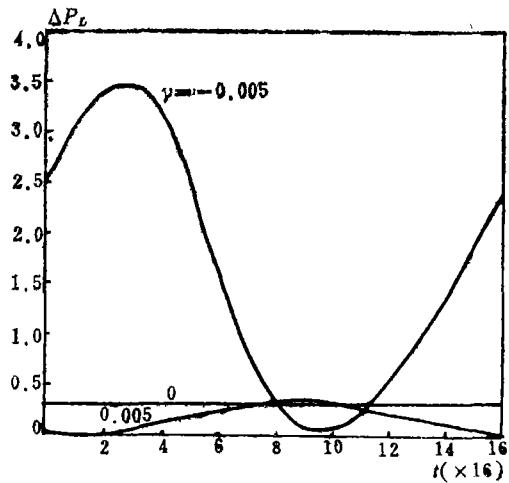


图6 频率对压力和摩擦的影响。  
 $\bar{Q}=0, W=0.1, m=0.1$



(a)



(b)

图7 微血管的非均匀性对摩擦(a)和压力(b)的影响。  
 $m=0.1, \bar{Q}=0, W=0.1$

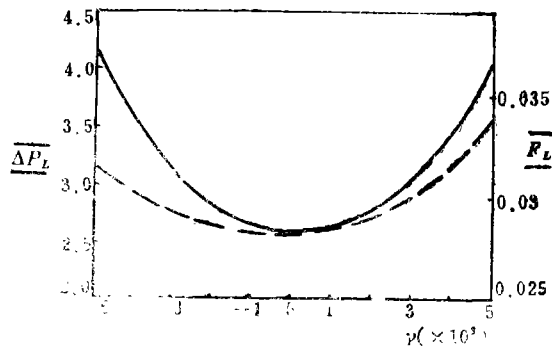


图8 相对振幅相同时， $\gamma$ 对压力与摩擦的影响。 $\bar{Q}=0, W=0.1, \beta=0.2$

解微循环中巨大的升周阻力, 供给血液充分的能量, 对组织产生“海涛式”的灌注, 具有重大的作用。

管径的非均匀性对压力升及摩阻亦有影响,  $\gamma < 0$  比  $\gamma > 0$  所产生的  $\overline{\Delta P_L}$  与  $\overline{F_L}$  大得多, 如图7所示。这种影响主要是由于相对振幅

$$\beta = \frac{m}{H}, \quad H = \int_0^1 H dz$$

的变化带来的。  $\beta$  相同时, 压力升及壁面摩阻均随  $\gamma$  的绝对值增大而增大, 如图8所示。因此, 考虑到微血管的非均匀性, 其自律运动的效率, 就不仅取决于频率与相对振幅, 还取决于锥度系数  $\gamma$ , 因为它决定了微血管的最小瞬时截面积。由此亦可知道, 由于微静脉管径较大, 自律运动的作用不如微动脉显著; 但若其相对振幅达到微动脉中的水平, 则微静脉自律运动对于血液回流心脏的意义同样是十分巨大的。

### 参 考 文 献

- [1] 修瑞娟, 《微血管的自律运动, 微循环障碍与相关疾病》, 田牛等主编, 河南科学技术出版社 (1985), 16—41.
- [2] 吴望一、吴宁众, 微血管自律性舒缩运动的动力学研究, 应用数学和力学, 9(7) (1988), 593—598.
- [3] 吴望一、程和平, 微血管自律运动对微循环物质交换的影响, 应用数学和力学, 9(9) (1988), 763—769.
- [4] 修瑞娟等, 微血管自律运动的研究(I), 《当代中国的微循环研究(1)》, 修瑞娟等主编, 国际文化出版公司 (1987), 1—16.
- [5] Thurston, G. B., Rheological parameters for the viscosity, viscoelasticity and thixotropy of blood, *Biorheology*, 16 (1979), 149—162.
- [6] Quemada, D., Towards a unified model of elasto-thixotropy of biofluids, *Biorheology*, 21 (1984), 423—436.

## Fluid Mechanics of Microvascular Vasomotion and the Effects of Blood Viscoelasticity

Guo Zhong-san

(Institute of Mathematical Sciences, Chengdu Branch, Academia Sinica, Chengdu)

### Abstract

This paper deals with blood flow caused by microvascular vasomotion with the focus on the effects of blood viscoelasticity on the pressure rise and wall resistance. It is shown that microvascular vasomotion plays a role of the “second heart” of the body which is of importance in conveying blood, and that the effects of blood viscoelasticity greatly depend on the Weissenberg number and mean flow rate.

**Key words** vasomotion, microcirculation, hemorheology, viscoelasticity, Weissenberg number