

有阻尼Mathieu方程的渐近解*

陶明德

(上海 复旦大学应用力学系, 1989年12月16日收到)

摘 要

本文从可瘪管的运动方程导出有阻尼 Mathieu 方程, 然后用渐近展开法精确到各阶精度求得了稳定界限. 指出了用平均变分法所得结果的精度, 同时也解释了在实验中观察到的某些现象.

关键词 可瘪管 Mathieu方程 参数激振

一、引 言

文献[1]对可瘪管的位移振荡现象作了实验和理论分析, 特别对管内存在振荡流的情况进行了研究. 在实验中, 把可瘪管放置在一腔室中, 当腔室内的压力增加时管子就被压瘪, 弯曲刚度大大减弱, 容易造成位移振荡. 根据实验结果可知, 当在一段直管中存在振荡流时, 如果对该系统中的参数选择适当而使该系统处于稳定状态, 则管子就始终保持直线状态; 反之, 管子就发生整体位移, 形成周期的或非周期的振荡. 这种振荡可归纳为参数激振. 由实验结果还可知, 在可瘪管几乎完全被压瘪时, 这时虽然弯曲刚度很小, 但不能产生位移振荡.

本文把[1]中的方程稍加修正而化为有阻尼 Mathieu 方程. 该方程在[2]中用平均变分法讨论过, 求得两条稳定界限, 但很难估计精度. 本文用渐近展开法详细求解了有阻尼 Mathieu 方程, 指出了[2]中稳定界限具有的精度, 此外解释了在实验中观察到的某些现象.

二、方 程

如图1所示, 设可瘪管的长度为 L , 其位移为 $y(x, t)$. 如果计及阻尼的话, 则根据[1]有

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (\rho A v^2 - \rho A v x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\rho A v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \rho A v \frac{\partial y}{\partial x} + c \frac{\partial y}{\partial t} + M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

和
$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\partial^2 y(0, t) / \partial x^2 = \partial^2 y(L, t) / \partial x^2 = 0 \quad (2.3)$$

* 戴世强推荐.

其中 EI 为管子的弯曲刚度, ρ 为流体密度, A 为管子截面积, $v(t)$ 为振荡流速度, $M=m+\rho A$,而 m 为单位长度管子的质量.

$y(x, t)$ 可用简支梁的振型函数来展开,把展开式代入(2.1)后,再利用正交性来确定展开式的系数.如果只考虑第一项,则^[1]

$$y(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L} \cdot f(t)$$

其中 $f(t)$ 满足

$$\ddot{f} + \frac{c}{M}\dot{f} + \frac{\omega_N^2}{v_0^2} \left[v_0^2 - v^2(t) + \frac{L}{2} v(t) \right] f = 0 \quad (2.4)$$

$$\text{其中} \quad \omega_N = \frac{\pi^2}{L^2} \left(\frac{EI}{M} \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

$$v_0 = \frac{\pi}{L} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

根据[1]设

$$v(t) = v_0 \sin^2 \omega t \quad (2.7)$$

[1]讨论在动脉中的血液流动,因此不存在反向流动.我们把(2.7)代入(2.4),当 $v_0/L\omega \ll 1$ 时,在丢掉一些项后就有

$$\ddot{f} + \nu \dot{f} + (\lambda + \epsilon \cos 2\tau) f = 0 \quad (2.8)$$

其中

$$2\omega t = 2\tau + \frac{\pi}{2}, \quad \frac{c}{\omega M} = \nu, \quad \frac{\omega_N^2}{\omega^2} = \lambda, \quad \frac{L\omega_N^2 v_0}{2\omega v_0^2} = \epsilon$$

这里“ \cdot ”表示对 τ 的导数.对于可瘪管,因截面积 A 变小,故 $\epsilon \ll 1$.(2.8)就是有阻尼Mathieu方程.

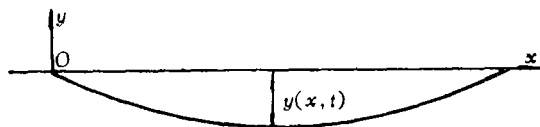


图 1

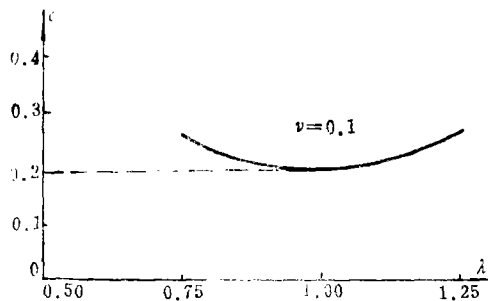


图 2

三、求 解

我们假定 $\nu \sim \epsilon \ll 1$, 选取 ϵ 为小参数, 则有

$$\left. \begin{aligned} f(\tau; \epsilon) &= \beta_0(\tau) + \epsilon \beta_1(\tau) + \epsilon^2 \beta_2(\tau) + \dots \\ \lambda &= n^2 + \epsilon \alpha_1 + \epsilon^2 \alpha_2 + \dots, \quad \nu = \epsilon \delta_1 + \epsilon^2 \delta_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.1a, b, c)$$

把(3.1)代入(2.8), 再比较 ϵ 的各幂次项, 可得递推方程

$$\epsilon^0: \quad \beta_0'' + n^2 \beta_0 = 0 \quad (3.2)$$

$$\epsilon^1: \quad \dot{\beta}_1 + n^2 \beta_1 = -\delta_1 \dot{\beta}_0 - (\alpha_1 + \cos 2\tau) \beta_0 \quad (3.3)$$

$$\epsilon^2: \quad \dot{\beta}_2 + n^2 \beta_2 = -\delta_1 \dot{\beta}_1 - \delta_2 \dot{\beta}_0 - \alpha_2 \beta_0 - (\alpha_1 + \cos 2\tau) \beta_1 \quad (3.4)$$

.....

我们首先来求稳定界限, 这是 λ -平面上的一条曲线. 在稳定界限上, 有阻尼Mathieu方程具有周期解. 在稳定界限的两侧分别是稳定区域和非稳定区域.

由(3.2), 我们可得

$$\beta_0 = A \cos n\tau + B \sin n\tau \quad (3.5)$$

其中 A 和 B 是两个任意常数. 我们分别讨论 $n=0, 1, 2$ 几种情况

(一) $n=0$, 此时(3.5)化为

$$\beta_0 = A$$

为了消去长期项, 由(3.3)和(3.4)可得

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1/8$$

因此精确到 $O(\epsilon^2)$, 从 $\lambda=0$ 出发的稳定界限为

$$\lambda = -\epsilon^2/8 \quad (3.6)$$

上式和 $\nu=0$ 的情况完全相同.

(二) $n=1$, 此时(3.5)化为

$$\beta_0 = A \cos \tau + B \sin \tau \quad (3.7)$$

把 β_0 代入(3.3), 为了要消去长期项, 应有

$$1/4 - \alpha_1^2 - \delta_1^2 = 0 \quad (3.8)$$

所以精确到 $O(\epsilon)$, 由(3.8)可知稳定界限为

$$\epsilon^2/4 - (\lambda - 1)^2 = \nu^2 \quad (3.9)$$

这一结果和[2]中的完全相同, 故可知用平均变分法求得稳定界限仅精确到 $O(\epsilon)$. 从(3.9)可知: 当 $\lambda=1$ 时 ϵ 有最小值 (即阈值) 2ν . 这时

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha_1 - 1/2}{\delta_1} = \frac{\lambda - 1 - \epsilon/2}{\nu} \quad (3.10)$$

和

$$\beta_1 = A \cos 3\tau/16 + B \sin 3\tau/16 \quad (3.11)$$

其次由(3.4)可知, 为了要消去长期项, 应有

$$\alpha_2 = -1/32$$

和

$$\delta_2 = 0$$

因此精确到 $O(\epsilon^2)$, 可得

$$\lambda = 1 + \alpha_1 \epsilon - \epsilon^2/32, \quad \nu = \delta_1 \epsilon$$

从上面两式解得 α_1 和 δ_1 , 再代入(3.8)可得稳定界限为

$$\epsilon^2/4 - (\lambda - 1 + \epsilon^2/32)^2 = \nu^2 \quad (3.12)$$

或者

$$\lambda - 1 = \frac{-\epsilon^2/16 \pm \sqrt{\epsilon^4 - 4\nu^2}}{2} \quad (3.13)$$

由(3.13)可知在 $\lambda = 1 - \nu^2/8$ 时, ϵ 仍有最小值 2ν . 曲线(3.12)绘在图2上, 当点 (λ, ϵ) 落在曲线(3.12)上时, 就得周期解. 当点落在(3.12)的上(下)方时, 得到非周期振荡解 (稳定解, 即管子保持直线形状).

(三) $n=2$, 此时可知: 当精确到 $O(\epsilon)$ 时有

$$\alpha_1=0$$

和

$$\delta_1=0$$

精确到 $O(\epsilon^2)$ 时, 我们有

$$(\alpha_2-5/48)(\alpha_2+1/48)+4\delta_2^2=0 \quad (3.14)$$

因为

$$\alpha_2=(\lambda-4)/\epsilon^2, \quad \delta_2=v/\epsilon^2$$

故 (3.14) 可化为

$$5\epsilon^2/48=-2(\lambda-4)\pm\sqrt{9(\lambda-4)^2+20v^2} \quad (3.15)$$

(3.15) 和 [2] 中的结果也完全相同。一般来说, 用平均变分法求得的结果只精确到 $O(\epsilon)$, 但 [2] 中的这一结果却精确到 $O(\epsilon^2)$ 。

当 $v=0$ 时, (3.13) 退化为

$$\lambda=1-\epsilon/2-\epsilon^2/32 \quad (3.16)$$

和

$$\lambda=1+\epsilon/2-\epsilon^2/32 \quad (3.17)$$

稳定界限为过 $\lambda=1$ 的两条曲线。(3.15) 退化为

$$\lambda=4-\epsilon^2/48 \quad (3.18)$$

和

$$\lambda=4+5\epsilon^2/48 \quad (3.19)$$

稳定界限也为过 $\lambda=4$ 的两条曲线。(3.16)~(3.19) 在 [3] 中已求得过。

四、周期解的稳定性

精确到 $O(\epsilon)$ 且取 $n=1$, 我们来讨论这一问题。在稳定界限 (3.9) 上的周期解由 (3.7) 和 (3.11) 组成, 即周期解 f_0 为

$$f_0=A\cos\tau+B\sin\tau+\epsilon(A\cos 3\tau+B\sin 3\tau)/16+O(\epsilon^2) \quad (4.1)$$

为了讨论 f_0 的稳定性, 设 f_0 的摄动量为 $\theta(\tau)$, 而 $\theta(\tau)$ 正比于 $\exp(\xi\tau)$ 。所以我们有

$$f=f_0+e^{\xi\tau}\Phi(\tau)$$

其中 ξ 为一小量, $\Phi(\tau)$ 为一周期函数。我们把上式代入 (2.8), 因 f_0 满足 (2.8), 故可得关于 Φ 的方程

$$\ddot{\Phi}+(2\xi+v)\dot{\Phi}+(\xi^2+\xi v+\lambda+\epsilon\cos 2\tau)\Phi=0 \quad (4.2)$$

我们同样设

$$\Phi=\beta_0(\tau)+\epsilon\beta_1(\tau)+\dots, \quad \lambda=1+\epsilon\alpha_1, \quad v=\epsilon\delta_1+\dots, \quad \xi=\epsilon\xi_1+\dots$$

把以上四式均代入 (4.2), 也可得递推方程

$$\ddot{\beta}_0+\beta_0=0 \quad (4.3)$$

$$\ddot{\beta}_1+\beta_1=-(2\xi_1+\delta_1)\dot{\beta}_0-(\alpha_1+\cos 2\tau)\beta_0 \quad (4.4)$$

.....

由 (4.3) 可得

$$\beta_0=A\cos\tau+B\sin\tau \quad (4.5)$$

把 (4.5) 代入 (4.4) 可得

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_1+\beta_1= & [-(2\xi_1+\delta_1)B-\alpha_1A-A/2]\cos\tau + [(2\xi_1+\delta_1)A-\alpha_1B+B/2]\sin\tau \\ & +NST \end{aligned}$$

显然应有

$$(\alpha_1 + 1/2)A + (2\xi_1 + \delta_1)B = 0, \quad (2\xi_1 + \delta_1)A - (\alpha_1 - 1/2)B = 0$$

所以我们有

$$\xi_1 = (-\delta_1 \pm \sqrt{1/4 - \alpha_1^2})/2$$

因此精确到 $O(\epsilon)$, 有

$$\xi = (-\nu \pm \sqrt{\epsilon^2/4 - (\lambda - 1)^2})/2$$

利用稳定界限 (3.9), 可得

$$\xi = 0 \quad \text{或} \quad \xi = -\nu$$

可见因为 $\nu > 0$, 故上述周期解 (3.18) 总是稳定的。这结论和 [2] 的结果也是相同的, 可见 [2] 是在精确到 $O(\epsilon)$ 时得出周期解稳定的结论。

五、结 论

(一) 在求解有阻尼 Mathieu 方程后, 我们可知用渐近方法可以得到不同精度的渐近解。与平均变分法的结果比较后, 可以相应地确定后者的精度。

(二) 本问题中的可瘪管确实有三种状态。当管子几乎完全被压瘪时, ϵ 很小。由于 ϵ 不超过阈值 2ν , 所以可瘪管必处于稳定状态, 即不发生位移振荡。

参 考 文 献

- [1] 柳兆荣、丁光宏, 可瘪管的位移振荡现象及其理论分析, 水动力学研究与进展, 3(2) (1988), 1—10.
- [2] Hsieh, D. Y., On Mathieu equation with damping, *J. Math. Phys.*, 21 (1980), 722—725.
- [3] Nayfeh, A.H., *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons (1973).

Asymptotic Solutions of Mathieu Equation with Damping

Tao Ming-de

(Department of Applied Mechanics, Fudan University, Shanghai)

Abstract

This paper first reduces the motion equation of a collapsible tube to the Mathieu equation with damping. Then the stability charts correcting the accuracy to each order are obtained with the method of asymptotic expansions. The accuracy of the results obtained with the average variational method is shown. And some phenomena observed in the experiment are also explained.

Key words collapsible tube, Mathieu equation, parametric excitation