应用数学和力学，第13卷第1期（1992年1月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性弹性体的弹性动力学变分原理

张 汝 清
（重庆大学力学系，1990年12月21日收到）

摘 要

本文根据文献[1]，对非线性应力应变关系的弹性体，导出了弹性动力学问题的变分原理和广义变分原理，提出了混合位移协调元和混合应力协调元的瞬时广义变分原理．

关键词 变分原理 弹性动力学 非线性弹性力学

一、非线性应力应变关系弹性体的动力学基本方程

在非线性弹性体的弹性动力学问题中，待求的未知函数仍然是三类变量 σ_{ij}，e_{ij}，u_i，共有15个分量．不过，现在这15个分量，不仅是空间坐标x_i（$i=1$，2，3）的函数，而且是时间t的函数．从有限元离散的观点来看，我们不仅要对空间离散，还应对时间离散，而且，还有时间与空间同时离散或不同时离散等问题．这些就是动力学问题与静力学问题的重要差别．

求解这类问题，共有15个在域Ω中必须满足的方程式，即

（1） 应变位移关系（适用于小变形）

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (在\Omega内) \tag{1.1}$$

（2） 应力应变关系（适用于一般非线性弹性体）

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=e_{ij} \quad 或 \quad \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=\sigma_{ij} \qquad (在\Omega内) \tag{1.2a,b}$$

或者是

$$A(e)+B(\sigma)-e_{ij}\sigma_{ij}=0 \qquad (在\Omega内) \tag{1.2c}$$

其中，余能密度$B(\sigma)$是σ_{ij}的高阶函数，应变能密度$A(e)$是e_{ij}的高阶函数．

（3） 动力平衡方程（适用于小变形）

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i=0 \qquad (在\Omega内) \tag{1.3}$$

其中，$c\dot{u}_i$为粘性阻尼力，$\rho\ddot{u}_i$为由质量引起的惯性力，$\bar{F}_i$仍为体积力．

物体的边界条件，仍是

（4） 边界位移已知的边界条件

$$u_i=\bar{u}_i \qquad (在\Gamma_u上) \tag{1.4}$$

（5） 边界外力已知的边界条件

$$\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i=0 \qquad (\text{在}\Gamma_p\text{上}) \tag{1.5}$$

总的边界面积为

$$\Gamma=\Gamma_u+\Gamma_p \tag{1.6}$$

还应指出，现在的$\bar{u}_i$和$\bar{p}_i$一般都为与时间t有关的函数。

在动力学问题中，还必须知道非线性弹性体在某一时刻的位移和速度，才能使解唯一地确定。这个条件叫做初始条件。若把已知初值的时间取为$t=0$，那末初始条件可表示为

$$\text{在}t=0\text{时：}\quad u_i=u_i^0,\ \dot{u}_i=\dot{u}_i^0 \tag{1.7}$$

式中 u_i^0，$\dot{u}_i^0$是已知的x_i（$i=1.2,3$）的函数。

具有非线性应力应变关系的弹性体动力学问题，就是在式(1.4)，(1.5)的六个边界条件以及式(1.7)的初始条件下，从式(1.1)，(1.2)，(1.3)等 15 个方程中求解Ω内15个待定函数。本文的目的是建立瞬时变分原理或瞬时广义变分原理来代替上述微分方程的求解问题。

二、非线性弹性体动力问题的瞬时最小势能原理和广义变分原理

1. 瞬时最小势能原理

对于非线性弹性体的动力学问题，由于外力和位移都是时间 t 的函数，并且有由质量引起的惯性力$-\rho \ddot{u}_i$作用在系统上，如果再考虑系统的粘性阻尼力$-c\dot{u}_i$，则可知非线性弹性体的瞬时势能泛函为

$$\Pi_{pt}=\int_\Omega \{A(e)-(\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i)u_i\}\,d\Omega-\int_{\Gamma_p}\bar{p}_iu_id\Gamma \tag{2.1}$$

非线性弹性体的瞬时最小势能原理为：

在一切有足够光滑性，并满足变分约束条件应变位移关系式(1.1)和边界位移已知条件式(1.4)的u_i和e_{ij}中，其使瞬时泛函Π_{pt}为极小值的u_i和e_{ij}，加上初始条件，必为非线性应力应变关系的弹性体动力学问题的精确解。

如果利用不参加变分的应力应变关系式(1.2b)用它来引进σ_{ij}，则这个瞬时泛函极值问题的Euler方程可以化为动力平衡方程式(1.3)和边界外力已知条件式(1.5)。

必要条件的证明　　现在对瞬时泛函Π_{pt}取变分，并注意到，现在为瞬时变分，即有

$$\delta\dot{u}_i=0,\ \delta\ddot{u}_i=0 \tag{2.2}$$

于是，可得

$$\delta\Pi_{pt}=\int_\Omega\left\{\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}-(\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i)\delta u_i\right\}d\Omega -\int_{\Gamma_u}\bar{p}_i\delta u_i d\Gamma \tag{2.3}$$

利用约束条件式(1.1)，有

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\,\delta e_{ij}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\,(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta u_{i,j} \tag{2.4}$$

再利用Green定理和约束条件式(1.4)，并注意到δu_i在Γ_u上等于零，得

$$\int_\Omega\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\,\delta e_{ij}d\Omega=\int_\Omega\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta u_{i,j}d\Omega$$

$$=\int_{\Gamma_p}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j\delta u_i\,d\Gamma-\int_{\Omega}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)_{,j}\delta u_i d\Omega \tag{2.5}$$

代入式(2.3)，得

$$\delta\Pi_{pt}=\int_{\Omega}\left\{-\left[\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)_{,j}+\left(\bar F_i-c\dot u_i-\rho\ddot u_i\right)\right]\delta u_i\right\}d\Omega$$

$$-\int_{\Gamma_p}\left\{\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j-\bar p_i\right\}\delta u_i d\Gamma=0 \tag{2.6}$$

由此可得到下列Euler方程

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)_{,j}+\bar F_i-c\dot u_i-\rho\ddot u_i=0 \qquad (在\Omega内) \tag{2.7a}$$

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j-\bar p_i=0 \qquad (在\Gamma_p上) \tag{2.7b}$$

在利用应力应变关系式(1.2b)后，上式分别化为式(1.3)和(1.5)。

因此，在变分约束条件式(1.1)和(1.4)的约束下，式(2.1)瞬时泛函的极值条件导出了Euler方程式(1.3)和(1.5)。所有这些约束条件和 Euler 方程，连同初始条件，就构成本问题的精确解。

充分条件的证明　由于$\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\delta e_{ij}\delta e_{kl}$是正定的，所以，有

$$\delta^2\Pi_{pt}=\int_{\Omega}\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\delta e_{ij}\delta e_{kl}d\Omega\geqslant 0 \tag{2.8}$$

这是非线性弹性体的瞬时势能泛函极小的充要条件。

2. 瞬时广义势能原理

现用 Lagrange 乘子法，把约束条件式 (1.1)，(1.4) 吸收到泛函中去。设引入待定Lagrange乘子λ_{ij}，μ_i建立新的四变量瞬时泛函

$$\Pi^*_{pt2}(e_{ij},u_i,\lambda_{ij},\mu_i)=\int_{\Omega}\Big\{A(e)-(\bar F_i-c\dot u_i-\rho\ddot u_i)u_i$$

$$+\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\lambda_{ij}\Big\}d\Omega-\int_{\Gamma_p}\bar p_i u_i d\Gamma$$

$$+\int_{\Gamma_u}(u_i-\bar u_i)\mu_i d\Gamma \tag{2.9}$$

注意到，现在为瞬时变分，有$\delta\dot u_i=0$，$\delta\ddot u_i=0$，所以，变分驻值条件为

$$\delta\Pi^*_{pt2}(e_{ij},u_i,\lambda_{ij},\mu_i)=\int_{\Omega}\Big\{\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}+\lambda_{ij}\right)\delta e_{ij}-\Big[e_{ij}$$

$$-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\Big]\delta\lambda_{ij}+(\lambda_{ij,j}-(\bar F_i-c\dot u_i-\rho\ddot u_i))\delta u_i\Big\}d\Omega$$

$$-\int_{\Gamma_p}(\lambda_{ij}n_j-\bar p_i)\delta u_i d\Gamma+\int_{\Gamma_u}\{(u_i-\bar u_i)\delta\mu_i+(\mu_i-\lambda_{ij}n_j)\delta u_i\}d\Gamma \tag{2.10}$$

由于δe_{ij}，$\delta\lambda_{ij}$，δu_i在Ω内，δu_i 在Γ_p上，$\delta\mu_i$，δu_i 在Γ_u 上都是独立变分，所以，从上式求得新泛函的六个Euler方程为

$$(1)\quad \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}+\lambda_{ij}=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.11a}$$

$$(2)\quad e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.11b}$$

$$(3)\quad \lambda_{ij,j}-(\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i)=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.11c}$$

$$(4)\quad \lambda_{ij}n_j-\bar{p}_i=0 \qquad (\text{在}\Gamma_p\text{上}) \tag{2.11d}$$

$$(5)\quad u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (\text{在}\Gamma_u\text{上}) \tag{2.11e}$$

$$(6)\quad \mu_i-\lambda_{ij}n_j=0 \qquad (\text{在}\Gamma_u\text{上}) \tag{2.11f}$$

其中，式(2.11b)，(2.11e)是原来吸收进泛函的约束条件，现在变成了新泛函的 Euler 方程。从式(2.11a)，(2.11f)，我们导出了待定的Lagrange 乘子，这样识别的 Lagrange 乘子为

$$\lambda_{ij}=-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.12a}$$

$$\mu_i=\lambda_{ij}n_j=-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j \qquad (\text{在}\Gamma_u\text{上}) \tag{2.12b}$$

而式(2.11c,d)化为动力平衡方程和外力已知边界条件，若用式(1.2b)，即用 $\partial A/\partial e_{ij}=\sigma_{ij}$表示，则有

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i=0 \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{2.13a}$$

$$\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i=0 \qquad (\text{在}\Gamma_p\text{上}) \tag{2.13b}$$

将式(2.12a,b)中识别了的Lagrange乘子代入式(2.9)，得两类变量新泛函为

$$\begin{aligned}\Pi^*_{pt2}(e_{ij},u_i)=&\int_\Omega\Big\{A(e)-(\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i)u_i\\&-\Big[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\Big]\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\Big\}d\Omega-\int_{\Gamma_p}\bar{p}_iu_id\Gamma\\&-\int_{\Gamma u}(u_i-\bar{u}_i)\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_jd\Gamma\end{aligned} \tag{2.14}$$

于是，我们得到适用于一般非线性弹性体，以应变能为基础的二类变量弹性动力学广义变分原理为：

在一切有足够光滑条件的e_{ij}，u_i中，其使瞬时泛函$\Pi^*_{pt3}(e_{ij}, u_i)$为驻值的e_{ij}，u_i，连同初始条件，必为一般非线性弹性体的弹性动力学问题的精确解。在使用了式(1.2b)以后，泛函$\Pi^*_{pt2}(e_{ij}, u_i)$的变分驻值条件给出了式(1.1)，(1.3)，(1.4)，(1.5)等四个 Euler 方程。

在应力应变关系式(1.2b)的约束条件下，我们可将$\partial A/\partial e_{ij}$ 写成σ_{ij} 于是，式(2.14)可以写成

$$\begin{aligned}\Pi^*_{pt3}(e_{ij},u_i,\sigma_{ij})=&\int_\Omega\Big\{A(e)-(\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i)u_i\\&-[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})]\sigma_{ij}\Big\}d\Omega-\int_{\Gamma_p}\bar{p}_iu_id\Gamma\\&-\int_{\Gamma_u}(u_i-\bar{u}_i)\sigma_{ij}n_jd\Gamma\end{aligned} \tag{2.15}$$

于是，得到下列瞬时广义势能变分原理为

在式(1.2b)的约束下，其使泛函 $\Pi_{pt3}^*(e_{ij},u_i,\sigma_{ij})$ 为驻值的u_i，e_{ij}，σ_{ij}，连同初始条件，必为一般非线性弹性体动力学问题的精确解。

3. 瞬时广义余能原理

若根据余能原理，用两个待定Lagrange乘子λ_i，μ_i 把式(1.3)和式(1.5)两个约束条件吸收到余能泛函中去，得到下列新的瞬时泛函为

$$\Pi_{ct2}^*(\sigma_{ij},\lambda_i,\mu_i)=\int_\Omega\{B(\sigma)+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i)\lambda_i\}d\Omega$$
$$-\int_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i\,d\Gamma+\int_{\Gamma_p}(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)\mu_i d\Gamma \tag{2.16}$$

由变分驻值条件，并注意到现在是瞬时变分，$\delta\dot{u}_i=0$，$\delta\ddot{u}_i=0$，得到

$$\delta\Pi_{ct2}^*=\int_\Omega\left\{\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}+\lambda_i\delta\sigma_{ij,j}+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i)\delta\lambda_i\right\}d\Omega$$
$$-\int_{\Gamma_u}\bar{u}_i n_j\delta\sigma_{ij}d\Gamma+\int_{\Gamma_p}\{(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)\delta\mu_i+\mu_i n_j\delta\sigma_{ij}\}d\Gamma=0 \tag{2.17}$$

根据恒等式

$$\int_\Omega\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\,\delta\sigma_{ij}d\Omega=-\int_\Omega u_i\delta\sigma_{ij,j}d\Omega+\int_{\Gamma_p}u_i n_j\delta\sigma_{ij}d\Gamma$$
$$+\int_{\Gamma_u}u_i n_j\delta\sigma_{ij}d\Gamma \tag{2.18}$$

则式(2.17)可以写成

$$\delta\Pi_{ct2}^*=\int_\Omega\left\{\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\delta\sigma_{ij}+(\lambda_i-u_i)\delta\sigma_{ij,j}\right.$$
$$\left.+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i)\delta\lambda_i\right\}d\Omega+\int_{\Gamma_u}(u_i-\bar{u}_i)n_j\delta\sigma_{ij}d\Gamma$$
$$+\int_{\Gamma_p}\left\{(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)\delta\mu_i+(\mu_i+u_i)\,n_j\delta\sigma_{ij}\right\}d\Gamma=0 \tag{2.19}$$

于是，导出Euler方程

(1) $\dfrac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\dfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0$ （在Ω内） (2.20a)

(2) $\lambda_i-u_i=0$ （在Ω内） (2.20b)

(3) $\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i=0$ （在Ω内） (2.20c)

(4) $u_i-\bar{u}_i=0$ （在Γ_u上） (2.20d)

(5) $n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i=0$ （在Γ_p上） (2.20e)

(6) $\mu_i+u_i=0$ （在Γ_p上） (2.20f)

由式(2.20b)、(2.20f)，决定了λ_i，μ_i为

$$\lambda_i=u_i\quad（在\Omega内） \tag{2.21a}$$
$$\mu_i=-u_i\quad（在\Gamma_p上） \tag{2.21b}$$

把它们代入式(2.16)，得到瞬时广义余能泛函

$$\Pi_{ct2}^*(\sigma_{ij},u_i)=\int_\Omega\{B(\sigma)+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i)u_i\}d\Omega$$

$$-\int_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i d\Gamma-\int_{\Gamma_p}(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)u_i d\Gamma \tag{2.22}$$

因此，适用于非线性弹性体的二类变量瞬时广义余能原理为

在一切有足够光滑条件的σ_{ij}，u_i中，其使二变量瞬时广义余能泛函式(2.22)为驻值的σ_{ij}，u_i，连同初始条件，必为一般非线性的弹性体动力学问题的精确**解**。显然，在使用了式(1.2a)以后，$\Pi_{ot_2}^*(\sigma_{ij},u_i)$的变分驻值条件，给出了式(1.1)，(1.3)，(1.4)，(1.5)等四个Euler方程。

三、非线性弹性体动力问题的混合位移协调元和混合应力协调元的瞬时广义变分原理

1. 混合位移协调元的瞬时广义变分原理

对整个非线性弹性体求解域Ω作有限元离散，分割为N个有限元。现用式(1.2c)，将式(2.15)写出其等价形式为

$$\Pi_{pt3}^{**}=-\left[\int_\Omega\left\{B(\sigma)-\frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j}+u_{j,i})+(\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i)u_i\right\}d\Omega\right.$$

$$\left.+\int_{\Gamma_u}(u_i-\bar{u}_i)\sigma_{ij}n_j d\Gamma+\int_{\Gamma_p}\bar{p}_i u_i d\Gamma\right] \tag{3.1}$$

再将上式写成有限元离散形式，有

$$\Pi_{pt3}^{**}=-\sum_{m=1}^{N}\left[\int_{\Omega_m}\left\{B^{(m)}(\sigma_{ij})-\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{(m)}(u_{i,j}^{(m)}+u_{j,i}^{(m)})+(\bar{F}_i-c\dot{u}_i^{(m)}-\rho\ddot{u}_i^{(m)})u_i^{(m)}\right\}d\Omega\right.$$

$$\left.+\int_{\Gamma_u^{(m)}}(u_i^{(m)}-\bar{u}_i)\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}d\Gamma+\int_{\Gamma_p^{(m)}}\bar{p}_i u_i^{(m)}d\Gamma\right] \tag{3.2}$$

现以σ_{ij}，u_i为变量对Π_{pt3}^{**}进行变分，注意到现在是瞬时变分，有$\delta\dot{u}_i=0$，$\delta\ddot{u}_i=0$，而且，还注意到，对于有限元而言，其总边界应为$\Gamma^{(m)}=\Gamma_p^{(m)}+\Gamma_u^{(m)}+\Gamma^{(mm')}$，这里，$\Gamma^{(mm')}$为相邻的两个有限元$(m)$和$(m')$的公共界面。于是，得到

$$\delta\Pi_{pt3}^{**}=-\sum_{m=1}^{N}\left[\int_{\Omega_m}\left\{\left(\frac{\partial B^{(m)}}{\partial\sigma_{ij}^{(m)}}-\frac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(m)}+u_{j,i}^{(m)}\right)\right)\delta\sigma_{ij}^{(m)}\right.\right.$$

$$\left.+(\sigma_{ij,j}^{(m)}+\bar{F}_i-c\dot{u}_i^{(m)}-\rho\ddot{u}_i^{(m)})\delta u_i^{(m)}\right\}d\Omega$$

$$\left.+\int_{\Gamma_u^{(m)}}(u_i^{(m)}-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}d\Gamma-\int_{\Gamma_p^{(m)}}(\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}-\bar{p}_i)\delta u_i^{(m)}d\Gamma\right]$$

$$-\sum_{(mm')}\int_{\Gamma^{(mm')}}[\delta u_i^{(m)}\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}+\delta u_i^{(m')}\sigma_{ij}^{(m')}n_j^{(m')}]d\Gamma \tag{3.3}$$

如果采用的是位移协调元，则在单元间的相邻交界面(mm')上，有

$$u_i^{(m)}=u_i^{(m')}=u_i^{(mm')} \tag{3.4}$$

则式(3.3)就变成

$$\delta\Pi_{pt3}^{**}=-\sum_{m=1}^{N}\left[\int_{\Omega_m}\left\{\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}^{(m)}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}^{(m)}+u_{j,i}^{(m)})\right)\delta\sigma_{ij}^{(m)}\right.\right.$$

$$+(\sigma_{ij,j}^{(m)}+\bar{F}_i-c\dot{u}_i^{(m)}-\rho\ddot{u}_i^{(m)})\delta u_i^{(m)}\Big\}d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma_u^{(m)}}(u_i^{(m)}-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}-\int_{\Gamma_p^{(m)}}(\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}-\bar{p}_i)\delta u_i^{(m)}d\Gamma\Big]$$

$$-\sum_{(mm')}\int_{\Gamma^{(mm')}}[\delta u_i^{(m)}(\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}+\sigma_{ij}^{(m')}n_j^{(m')})]d\Gamma \tag{3.5}$$

由于 $\delta u_i^{(m)}$ 在 Ω_m 内和 $\Gamma_p^{(m)}$，$\Gamma^{(mm')}$ 上，$\delta\sigma_{ij}^{(m)}$ 在 Ω_m 内和 $\delta\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}$ 在 $\Gamma_u^{(m)}$ 上都是独立的，所以，$\delta\Pi_{pt3}^{**}$ 的驻值条件给出了

（1） 单元应变位移关系（应用式(1.2a)之后）

$$e_{ij}^{(m)}=\frac{1}{2}(u_{i,j}^{(m)}+u_{j,i}^{(m)}) \qquad (\text{在}\Omega\text{内}) \tag{3.6a}$$

（2） 单元动力平衡方程

$$\sigma_{ij,j}^{(m)}+\bar{F}_i-c\dot{u}_i^{(m)}-\rho\ddot{u}_i^{(m)}=0 \qquad (\text{在}\Omega_m\text{内}) \tag{3.6b}$$

（3） 单元外力已知边界条件

$$\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}-\bar{p}_i=0 \qquad (\text{在}\Gamma_p^{(m)}\text{上}) \tag{3.6c}$$

（4） 单元位移已知边界条件

$$u_i^{(m)}-\bar{u}_i=0 \qquad (\text{在}\Gamma_u\text{上}) \tag{3.6d}$$

而且，还有

$$\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}+\sigma_{ij}^{(m')}n_j^{(m')}=0 \qquad (\text{在}\Gamma^{(mm')}\text{上}) \tag{3.6e}$$

上式表明了各有限元间的公共界面上应力矢量连续条件。

从这里我们得到了具有非线性应力应变关系的弹性体动力学混合位移协调元的瞬时广义变分原理为

在一切 $\sigma_{ij}^{(m)}$，$u_i^{(m)}$ 中(其中 $u_i^{(m)}$ 是协调的)，使 Π_{pt3}^{**} 为驻值的 $\sigma_{ij}^{(m)}$，$u_i^{(m)}$ 必满足有限元中的式(3.6a,b,c,d)，而且，在有限元间的变界面上，应力是连续的。

2. 混合应力协调元的瞬时广义变分原理

基于余能原理，通过 Lagrange 乘子解除了有关动力平衡方程和边界外力已知的条件，而建立起的非线性应力应变关系弹性体动力问题的瞬时广义变分原理，它有两个变量 σ_{ij}，u_i。由式(2.22)，其瞬时泛函为

$$\Pi_{ct1}^{*}(\sigma_{ij},u_i)=\int_\Omega\{B(\sigma)+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i-c\dot{u}_i-\rho\ddot{u}_i)u_i\}d\Omega$$

$$-\int_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_j\,d\Gamma-\int_{\Gamma_p}(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)u_i d\Gamma \tag{3.7}$$

将上式写成有限元形式为

$$\Pi_{ct2}^{*}=\sum_{m=1}^{N}\Big\{\int_{\Omega_m}[B^{(m)}(\sigma_{ij})+(\sigma_{ij,j}^{(m)}-c\dot{u}_i^{(m)}-\rho\ddot{u}_i^{(m)})]u_i^{(m)}d\Omega$$

$$-\int_{\Gamma_u^{(m)}}\sigma_{ij}^{(m)}n_i^{(m)}\bar{u}_i\,d\Gamma-\int_{\Gamma_p^{(m)}}(n_j^{(m)}\sigma_{ij}^{(m)}-\bar{p}_i)u_i^{(m)}d\Gamma\Big\} \tag{3.8}$$

以 $\sigma_{ij}^{(m)}$，$u_i^{(m)}$ 为变量作 Π_{ct2}^{*} 的瞬时变分，并注意到 $\delta\dot{u}_i^{(m)}=\delta\ddot{u}_i^{(m)}=0$，有限元的总边界为

$\Gamma^{(m)}=\Gamma_u^{(m)}+\Gamma_p^{(m)}+\Gamma^{(mm')}$，所以，得到

$$\delta\Pi^*_{ct2}=\sum_{m=1}^{N}\Big\{\iint_{\Omega_m}\Big[-\frac{\partial B^{(m)}}{\partial\sigma_{ij}^{(m)}}\delta\sigma_{ij}^{(m)}+(\sigma_{ij,j}^{(m)}+\bar F_i-c\dot u_i^{(m)}-\rho\ddot u_i^{(m)})\delta u_i^{(m)}$$

$$-\frac{1}{2}(u_{i,j}^{(m)}+u_{j,i}^{(m)})\delta\sigma_{ij}^{(m)}\Big]d\Omega+\int_{\Gamma_u^{(m)}}(u_i^{(m)}-\bar u_i)\delta\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}d\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma_p^{(m)}}(\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}-\bar p_i)\delta u_i^{(m)}d\Gamma\Big\}$$

$$+\sum_{(mm')}\int_{\Gamma^{(mm')}}[u_i^{(m)}\delta\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}-u_i^{(m')}\delta\sigma_{ij}^{(m')}]d\Gamma \tag{3.9}$$

如果采用应力协调元，则在单元间相邻交界面$\Gamma^{(mm')}$上，有

$$\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}+\sigma_{ij}^{(m')}n_j^{(m')}=0 \tag{3.10}$$

取其变分，得

$$\delta\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}+\delta\sigma_{ij}^{(m')}n_j^{(m')}=0 \tag{3.11}$$

将上式代入式(3.9)中，得

$$\delta\Pi_{ct2}^*=\sum_{m=1}^{N}\Big\{\iint_{\Omega_m}\Big[\frac{\partial B^{(m)}}{\partial\sigma_{ij}^{(m)}}\delta\sigma_{ij}^{(m)}+(\sigma_{ij,j}^{(m)}+\bar F_i-c\dot u_i^{(m)}-\rho\ddot u_i^{(m)})\delta u_i^{(m)}$$

$$-\frac{1}{2}(u_{i,j}^{(m)}+u_{j,i}^{(m)})\delta\sigma_{ij}^{(m)}\Big]d\Omega+\int_{\Gamma_u^{(m)}}(u_i^{(m)}-\bar u_i)\delta\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}d\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma_p^{(m)}}(\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}-\bar p_i)\delta u_i^{(m)}d\Gamma\Big\}$$

$$+\sum_{(mm')}\int_{\Gamma^{(mm')}}(u_i^{(m)}-u_i^{(m')})\delta\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}d\Gamma \tag{3.12}$$

由于$\delta\sigma_{ij}^{(m)}$在Ω_m内，$\delta\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}$在$\Gamma_u^{(m)}$和$\Gamma^{(mm')}$上，$\delta u_i^{(m)}$在$\Omega_m$内和在$\Gamma_p^{(m)}$上都是独立的。所以，$\delta\Pi^*_{ct2}=0$的驻值条件给出了

（1） 单元应变位移关系（在应用式(1.2a)之后）

$$e_{ij}^{(m)}=\frac{1}{2}(u_{i,j}^{(m)}+u_{j,i}^{(m)}) \qquad (\text{在}\Omega_m\text{内}) \tag{3.13a}$$

（2） 单元动力平衡方程

$$\sigma_{ij,j}^{(m)}+\bar F_i-c\dot u_i^{(m)}-\rho\ddot u_i^{(m)}=0 \qquad (\text{在}\Omega_m\text{内}) \tag{3.13b}$$

（3） 单元位移已知边界条件

$$u_i^{(m)}-\bar u_i=0 \qquad (\text{在}\Gamma_u^{(m)}\text{上}) \tag{3.13c}$$

（4） 单元外力已知边界条件

$$\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}-\bar p_i=0 \qquad (\text{在}\Gamma_p^{(m)}\text{上}) \tag{3.13d}$$

而且，还有

$$u_i^{(m)}-u_i^{(m')}=0 \qquad (\text{在}\Gamma^{(mm')}\text{上}) \tag{3.13e}$$

所以，上式给出了相邻有限元间的交界面上位移协调条件，这就证明了在应力矢量的连续条件

$$\sigma_{ij}^{(m)}n_j^{(m)}+\sigma_{ij}^{(m')}n_j^{(m')}=0 \qquad (\text{在}\Gamma^{(mm')}) \tag{3.14}$$

下，Π^*_{ct2}的驻值条件给出了位移协调条件．从这里，我们证明了从Π^*_{ct2}导出的混合应力协调元的瞬时广义变分原理．即

在一切$\sigma_{ij}^{(m)}$，$u_i^{(m)}$中，其中$\sigma_{ij}^{(m)}$是协调的，使瞬时泛函Γ^*_{pt2}为驻值的$\sigma_{ij}^{(m)}$，$u_i^{(m)}$，必满足有限元中的方程式(3.13a,b,c,d)，而且，在有限元间的交界面上位移是协调的。

四、结 束 语

在动力学问题中，在实际应用有限元法分析时，通常是由瞬时最小势能原理导出整体动力平衡方程，再作时间离散并进行求解．实践表明，为了提高动态应力的精度，采用本文提出的混合有限元瞬时广义变分原理是有效的．还必须指出，在具体求解时，应作时间离散，并加上初始条件.而且，由于是非线性弹性体，有限元的矩阵方程，通常应写成增量形式。

参 考 文 献

[1] 钱伟长，非线性弹性体的弹性力学变分原理，应用数学和力学，8(7) (1987)，567-577.

[2] 张汝清、何显勇，线性结构动应力分析的两种广义变分原理及混合有限元，重庆大学学报，11，(11) (1988)，11—17.

Elastic Dynamics Variational Principle for Nonlinear Elastic Body

Zhang Ru-qing

(Engr. Mech. Dept., Chongqing Univ., Chongqing)

Abstract

Based on paper[1] the variational principle and generalized variational principle of elastic dynamics for elastic body with nonlinear stress-strain relations are introduced in this paper. The generalized instantaneous variational principle is also raised for the mixed harmonious displacement element and the mixed harmonious stress element.

Key words variational principles, elastic dynamics, nonlinear elastic mechanics