应用数学和力学, 第 25 卷 第 2 期(2004 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 02_0206_07

弹性_幂硬化蠕变性材料 型界面裂纹准静态扩展的渐近分析

唐立强[1], 李永东[2], 刘长海[3]

(1. 哈尔滨工程大学 建筑工程学院, 哈尔滨 150001;
2. 装甲兵学院 机械工程系, 北京 100072;
3. 大庆石油学院, 大庆 163318)

(王银邦推荐)

摘要: 建立了弹性_幂硬化蠕变性材料 型界面裂纹准静态扩展的力学模型, 求得了在裂纹表面自由和裂纹面有摩擦接触两种情况下, 裂纹尖端应力场分离变量形式的渐近解 求解结果表明: 型界面裂纹问题的应力、应变具有相同的奇异性; 型界面裂纹尖端场不存在振荡奇异性; 材料的幂硬化指数 n 和弹性模量比对裂纹尖端应力场幂硬化蠕变性材料区有着显著的影响, 而弹性区仅受幂硬化指数 n 的影响, 当 n 很大时, 蠕变变形占主导地位, 应力场趋于稳定, 不随 n 的变化而变化; 泊松比对裂纹尖端应力场的影响不明显

关 键 词: 弹性_幂硬化蠕变性材料; 型界面裂纹; 裂纹尖端场

中图分类号: O346 **文献标识码:** A

引 言

在工程实际中, 存在着这样一类界面: 一面是弹性体, 一面是蠕变材料 如地层中表现出蠕变性特征的泥岩层与弹性岩层间的界面便属于这种情况 泥岩层与弹性岩层间的准静态剪切滑动是导致油水井破坏的主要原因之一[1] 因此, 弹性_蠕变材料 型界面裂纹准静态扩展问题的研究对于工程实际具有理论的意义

界面裂纹的研究始于 Williams[2], 他采用级数的渐近展开法, 分析了各向同性弹性双材料界面裂纹问题, 发现 型和 型裂纹尖端的应力具有 $r^{-1/2+i}$ 的振荡奇异性(其中 为振荡指数) , 从而得出裂纹面互相嵌入的结论 从物理的角度解释这一现象是十分困难的 为了解决这一问题, 人们又陆续提出了一些新的模型, 如 Comninou[3] 和 Erdogan[4] 分别提出的接触区模型和均匀层模型 Shih 和 Asaro[5, 6] 首先对于非线性材料界面裂纹尖端场的问题进行分析, 他们给出不同弹塑性材料界面裂纹问题的数值解 给出的数值解与混合型与分离变量形式的裂纹尖端解相近, 该场解不具有振荡奇异性 T. C. Wang[7] 通过渐近分析找到了弹塑性界面裂

收稿日期: 2001_04_03; 修订日期: 2003_08_03
基金项目: 黑龙江省自然科学基金资助课题(A009)
作者简介: 唐立强(1948) , 男, 山东人, 教授, 博士, 博士生导师
(联系人. Tel: 86_451_82518854; E_mail: lqtang@ 0451. com) .

纹分离变量形式的 HRR 型解

在高温高压下, 一些地质材料表现出蠕变性特征　对于裂纹稳态扩展问题, C. Y. Hui 和 H. Riedel[8] 得出应变和应力具有相同奇异量级和裂纹尖端场是局部自治的结果　Y. C. Gao[9] 采用弹_粘_塑性本构模型, 研究动态扩展裂纹问题, 指出场的局部自治反应了材料固有的性质和裂纹动态扩展的特征　对于弹性_幂硬化蠕变性材料界面裂纹问题, M. Taher, A. Saif 和 C. Y. Hui[10] 研究了平面应变条件下　型界面裂纹扩展问题　L. Q. Tang, X. G. Sun 和 Z. Q. Wang[11] 研究了平面应变条件下　型界面裂纹扩展问题　李永东和唐立强[12] 给出了刚性_幂硬化蠕变性材料　型界面裂纹尖端场的渐近解

本文对弹性_幂硬化蠕变性材料　型界面裂纹准静态扩展问题进行了分析, 得到了分离变量形式的渐近解, 讨论了材料常数对裂纹尖端场的影响　对界面粘接处　$_r$ 的间断量进行讨论, 为研究油水井套管损坏问题提供了理论依据[13]

1　基 本 方 程

1.1　力学模型

图 1 给出了材料 1 和材料 2 之间的界面裂纹沿 X 方向作稳态扩展的模型　xoy 为原点在裂纹尖端与裂纹一起运动的随动坐标系　材料 1 为弹性幂硬化蠕变性材料位于区域 0　, 材料 2 为完全弹性材料位于区域 -　　0　假设 $_{ij}$, $_{ij}$, $_{ij}$ 和 $_{ij}$ 分别为应力、应变、应力率和应变率张量　材料 1 和材料 2 的弹性模量和泊松比分别为 E_+, $_+$ 和 E_-, $_-$　在本文中, 当+ 号用作脚标时表示材料 1 的物理量; 当- 号用作脚标时, 表示材料 2 的物理量　公式的书写采用 Einstein 求和约定, 除非特殊说明

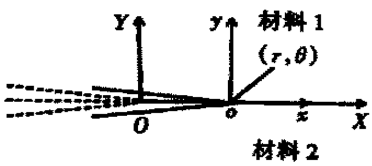

图 1　力学模型

假设　是时间微分算子, 对于裂纹稳态扩展, 物质导数为

$$ = \frac{D}{Dt} = - V \frac{}{x} = V\left[\frac{\sin}{r} \frac{}{} - \cos \frac{}{r}\right] ,\qquad (1)$$

其中　为任意物理量

1.2　基本方程

对于平面应力情况, 弹性幂硬化蠕变材料的本构方程为

$$ = \frac{1}{E}\left[(1+) - {}_{rr} \right] + \frac{3B}{2} {}_{e}^{n-1}\left(- \frac{{}_{rr}}{3}\right),\qquad (2)$$

其中 B 为幂硬化系数, n 为幂硬化指数,　为 Kronecker 符号　$_e$ 为有效应力, 在平面应力情况下,

$${}_{e} = ({}_{r}^{2} + {}^{2} + 3 {}_{r}^{2} - {}_{r})^{1/2};\qquad (3)$$

几何方程为

$${}_{r} = \frac{u_r}{r}, \quad = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{u}{}, \quad {}_{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{u_r}{} + \frac{u}{r} - \frac{u}{r}\right);\qquad (4)$$

应变协调方程为

$$\frac{1}{r}\frac{{}^2}{r^2}(r) + \frac{1}{r^2}\frac{{}^2}{{}^2}({}_{r}) - \frac{1}{r}\frac{}{r}({}_{r}) - \frac{2}{r^2}\frac{{}^2}{r}(r {}_{r}) = 0\qquad (5)$$

引入 Airy 应力函数　, 应力分量用　表示为

$$ _r = \frac{1}{r}\frac{}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{^2}{^2}, \quad = \frac{^2}{r^2}, \quad _r = -\frac{}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{}{}\right), \tag{6}$$

则平衡方程便自动满足

2 控制方程及其渐近解

2.1 应力和应变的奇异性量级分析

设应力具有 r^s 的奇异性,若在变形中弹性变形和蠕变变形同时处于主导地位,由(6)式和(2)式可以分析得出

$$s = (2n-3)/(n-1), \quad r^{-1/(n-1)}, \quad r^{-1/(n-1)}, \tag{7}$$

应力和应变具有相同的奇异性 取应力函数的奇异性主项为

$$ = Ar^s f(\ ), \tag{8}$$

其中 A 为待定常数,$f(\ )$ 为角分布函数

应力可表示为

$$ = Ar^{s-2} \ , \tag{9}$$

其中应力角分布函数 的分量为

$$ _r = f + sf, \quad = (s-1)sf, \quad _r = (1-s)f \tag{10}$$

有效应力可表示为

$$ _e = Ar^{s-2} \ _e,$$

在平面应力情况下

$$ _e = (\ _r^2 + \ ^2 + 3\ _r^2 - \ _r\ )^{1/2} \tag{11}$$

应力率可表示为

$$ = Ar^{s-2}\tilde{} \ , \tag{12}$$

其中

$$\tilde{} = \frac{V}{r} = \left[\sin \frac{d}{d} - (s-2)\cos \right] \tag{13}$$

应变率可表示为

$$ = Ar^{s-2}\tilde{}(\ ), \tag{14}$$

其中

$$\tilde{} = \frac{1}{E}\left[(1+\ )\tilde{} - \tilde{}_{rr}\ \right] + \frac{3A^{n-1}B}{2r}\ _e^{n-1}\left(- \frac{_{rr}}{3}\right) \tag{15}$$

2.2 控制方程及其渐近解

在 区域内,由本构方程(2)得

$$ ^+_{,} = -\frac{^+}{E_+}\ ^+_{rr,} + \frac{3B}{2}\left[(\ ^+_e)^{n-1}\left(^+ - \frac{^+_{rr}}{3}\right)\right]_{,}, \tag{16}$$

$$ ^+_{,} = \frac{1-\ ^+}{E_+}\ ^+_{,} + \frac{B}{2}\left[(\ ^+_e)^{n-1}\ ^+\right]_{,} \tag{17}$$

由(16)、(17)并考虑率协调方程 $^+_{,} - \ ^+_{,} = 0$,得出材料 1 的控制方程如下

$$-\frac{1}{E}\ ^+_{,} + \frac{3B}{2}\left[(\ ^+_e)^{n-1}\left(^+ - \frac{2\ ^+_{rr}}{3}\right)\right]_{,} = 0 \tag{18}$$

控制方程用应力角函数表示为

$$4\left[(s-4)K(\ )\cos - K(\ )\sin \right] +$$

$$(s-2)(\ ^{+}_{e})^{n-1}\left[(2s+n-6)\ ^{+}-(s+2n-3)\ ^{+}_{r}\right]+$$

$$\frac{d^2}{d\ ^2}\left[(\ ^{+}_{e})^{n-1}(2\ ^{+}_{r}-\ ^{+})\right]-6(s-2)\frac{d}{d}\left[(\ ^{+}_{e})^{n-1}\ ^{+}_{r}\right]=0, \qquad (19)$$

其中

$$K(\ )=f_{+}^{(4)}+2(s^2-2s+2)f_{+}+s^2(s-2)^2f_{+} \qquad (20)$$

在$-$　　0 区域内, 易于求得弹性材料的渐近解为

$$f_{-}=c_1\cos(s\ )+c_2\sin(s\ )+c_3\cos((s-2)\ )+c_4\sin((s-2)\ ), \qquad (21)$$

其中 $c_i(i=1,2,3,4)$ 为待定常数, 由界面交界处的连续条件和裂纹面的边界条件来确定

3　连接条件、正则条件及边界条件

3.1　界面交界处的应力连续条件

在界面, $\ :\ =0$ 处的应力连续条件为

$$[\ \ ]=0 \text{ 和 } [\ _{r}]=0, \qquad (22)$$

其中, $[\ \ ]$ 表示物理量　在界面　处的间断值, 用角分布函数分别表示为

$$f_{+}(0)=f_{-}(0),\ f_{+}(0)=f_{-}(0) \qquad (23)$$

3.2　界面交界处的位移连续条件

在界面, $\ :\ =0$ 处的位移是连续的, 即

$$[u_r]=0 \text{ 和 } [u\ ]=0$$

应用位移连续条件, 可得极坐标下的应变连续条件为

$$[\ _{r}]=0,\ \left[\frac{\ _{r}}{}\right]-2[\ _{r}]-2r\left[\frac{\ _{r}}{r}\right]=0 \qquad (24)$$

由方程(1)和(15), 方程(24)用角分布函数分别表示为

$$2(s-2)(\ ^{+}_{r}-\ _{+}\ ^{+})-(\ ^{+}_{e})^{n-1}(2R^{+}_{r}-R^{+}_{H})=$$

$$2B(s-2)(R^{-}_{r}-M\ R^{-}_{H}) \qquad (H=0), \qquad (25)$$

$$2(s-1)(s-3)\left[(1+M)(2-s)R^{+}_{rH}+\frac{3}{2}(R^{+}_{e})^{n-1}R^{+}_{rH}\right]-$$

$$(s-2)\frac{d}{dH}\left[(3-s)(R^{+}_{r}-M\ R^{+}_{H})+(R^{+}_{e})^{n-1}\left(R^{+}_{r}-\frac{R^{+}_{H}}{2}\right)\right]=$$

$$B(s-2)(s-3)\left[\frac{d}{dH}(R^{-}_{r}-M\ R^{-}_{H})-2(s-1)(1+M)R^{-}_{rH}\right] \qquad (H=0), \qquad (26)$$

其中 $B=E_{+}/E_{-}$ 是弹性模量比#

3.3　正则条件

当 $H=0$, 由方程 (19) 得正则条件

$$4(s-4)K(H)+(s-2)(R^{+}_{e})^{n-1}\left[(2s+n-6)R^{+}_{H}-(s+2n-3)R^{+}_{r}\right]+$$

$$\frac{d^2}{dH^2}\left[(R^{+}_{e})^{n-1}(2R^{+}_{r}-R^{+}_{H})\right]-6(s-2)\frac{d}{dH}\left[(R^{+}_{e})^{n-1}R^{+}_{rH}\right]=0 \qquad (H=0)\# \qquad (27)$$

这是含有 $f_{+}^{(4)}(0)$ 的方程, 当 $f_{+}(0)$、$f_{+}^{c}(0)$、$f_{+}^{d}(0)$ 和 $f_{+}(0)$ 已知时, 由方程(27), 可求出 $f_{+}^{(4)}(0)$ 的值#

3.4　裂纹表面的边界条件

若裂纹表面自由, 则

$$R_{H}=R_{rH}=0 \qquad (H=?\ P), \qquad (28)$$

即 $$f_{-}(-P)=f_{+}(P)=0,\ f_{-}^{c}(-P)=f_{+}^{c}(P)=0\#\tag{29}$$

若裂纹表面有摩擦接触# 则

$$[RH]=0,\ [R_{rH}]=0\qquad(H=?P)\#\tag{30}$$

假设 RH 和 R_{rH} 的关系符合库仑摩擦律, 即 $R_{rH}=-GRH$, 其中 G 为摩擦系数# 裂纹面有摩擦接触的边界条件用角分布函数表示为

$$\begin{cases}f_{-}(-P)=f_{+}(P),\ f_{-}^{c}(-P)=f_{+}^{c}(P),\\ f_{+}^{c}(P)=Gsf_{+}(P),\ f_{-}^{c}(-P)=Gsf_{-}(-P)\#\end{cases}\tag{31}$$

4 数值计算和结果讨论

对于Ò 型问题, 若裂纹面自由, 则有 $RH|_{H=0}=0$, 即 $f_{+}(0)=0$, 此时以 $f_{+}^{c}(0)$ 作为可调参数; 若裂纹面有摩擦接触, 则以 $f_{+}(0)$ 和 $f_{+}^{c}(0)$ 作为可调参数# 利用方程(25), (26) 和(27) 可以求出 $f_{+}^{d}(0)$、$f_{+}(0)$ 和 $f_{+}^{(4)}(0)$ 的值# $(f_{+}, f_{+}^{c}, f_{+}^{d}, f_{+}, f_{+}^{(4)})|_{H=0}$ 的值即为五阶微分控制方程(19) 的初值# 利用 Runge_Kutta 法可以在材料 1 区域内对控制方程(19) 进行求解, 从而得到 $(f_{+}, f_{+}^{c}, f_{+}^{d}, f_{+}, f_{+}^{(4)})$ 随 H 变化的数值解# 由边界条件和连接条件(23)、(29) 和(21) 得到材料 2 区域内的 $(f_{-}, f_{-}^{c}, f_{-}^{d}, f_{-})$ 随 H 变化的数值解#

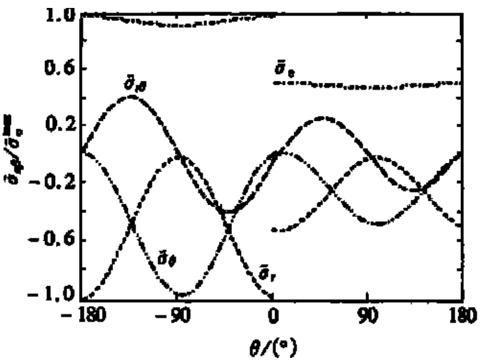

图 2 $n=25, B=0.5$ 时应力的归一化角分布

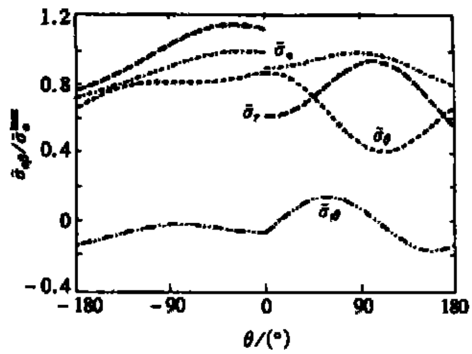

图 3 $n=5, B=0.25, G=0.2$ 时应力的归一化角分布

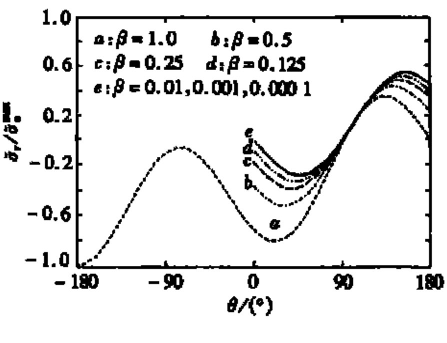

图 4 $n=5$ 时 R_r 的归一化角分布

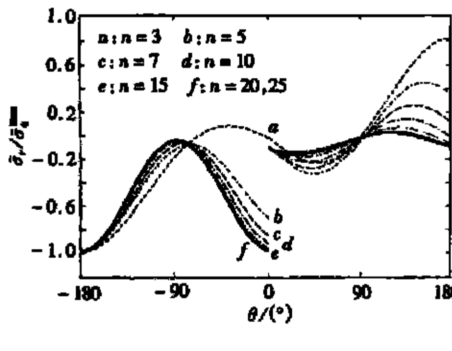

图 5 $B=0.1$ 时 R_r 的归一化角分布

在裂纹面自由的条件下, 图 2 给出 RAB 及 R_e 随 H 变化的曲线; 若裂纹面有摩擦接触, 图 3 给出 RAB 及 R_e 随 H 变化的曲线; 图 4 给出 n 固定时, R_r 随 B 变化的曲线; 图 5 给出 B 固定时, R_r 随 n 变化的曲线# 图 6 给出了 $R_{rH}(0)$ 随摩擦系数 G 的变化曲线# 所有的曲线都用 $(R_e)_{max}=1$ 进行了归一化#

5 结　　论

1) 对于平面应力Ò型界面裂纹问题,应力和应变具有相同的奇异性 $r^{-1/(n-1)}$,并且奇异性指数仅由蠕变材料的蠕变指数 n 决定# 这里的奇异性指数不具有振荡奇异性#

2) 在初始条件中含有材料常数 n 和B,所以 n 和B影响材料1区域内的应力场分布# 计算结果表明,泊松比 M+ 和 M- 的取值对应力场的分布没有明显的影响#

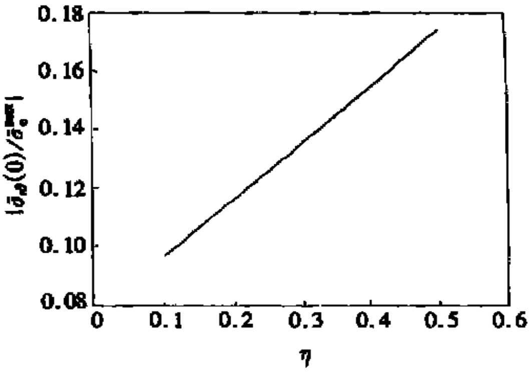

图6　$n=15, B=0.4$ 时归一化 | $R_{rH}(0)$ | 随G的变化曲线

当 n 值固定时,在0b到90b区域内,应力场的幅度随B的减小而减小,而在90b到180b内,应力场的幅度却随B的减小而增大(见图4中的 R_r)# 当B固定时,在材料1区域内的应力场的幅度随 n 的增大而变小#

由方程(21),在区域 $-P[H[0$,应力分布只受 n 而不受B的影响# 当 n 固定时,在区域0b~-180b,R_r 呈稳定分布,并不随B而变化;图5中,在0b~-90b内,应力场的幅度随 n 的增大而增大,而在-90b~-180b内,随 n 的增大而减小#

3) 图5指出,当 n \ 20时,材料1内的蠕变变形占主导地位,此时场趋于稳定,应力场便几乎不再随 n 有明显的变化# 由图2和5可见,当 n 增大时,R_r 和RH逐渐趋于/对称分布0,R_{rH} 则逐渐趋于/反称分布0,对称轴为H=-90b直线#

4) 在H=0b处,R_r 的间断值随 n 和B的变化而改变# 由图4和5可见,当B=1时,$[R]_{H=0b}=0$,应力 R_r 是连续# 在 n 值固定时,随着B的减小 $[R_r]_{H=0b}$ 逐渐增大# 当B[0.01,$[R]_{H=0b}$ 趋于某个定值# 在B固定时,$[R]_{H=0b}$ 随着 n 的增大而增大# 当 n \ 20,$[R]_{H=0b}$ 趋于常数#

5) 当B y 0时,弹性_粘弹性界面裂纹问题便成为刚性_粘弹性界面裂纹问题# 数值计算结果表明,当B[0.01,材料1中的应力场不随B的变化而变化,所得的结果与[12]相同#

6) 由图6可见,$R_{rH}(0)$ 的幅度随G的增大而增大# 如果裂纹面的摩擦系数越大,维持裂纹扩展所需的剪应力也越大,因为裂纹面间的摩擦力对于裂纹的扩展起到了阻碍的作用#

[参 考 文 献]

[1] 王仲茂,卢万恒,胡江明.油田油水井套管损坏的机理及防治[M].北京:石油工业出版社,1994,61)126.

[2] Williams M L. The stress around a fault or crack in dissimilar media[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1959, 49(2): 199)204.

[3] Comninou M. The interface crack[J]. J Appl Mech, 1977, 44(4): 631)636.

[4] Delale F, Erdogan F. On the mechanical modeling of the interfacial region bonded half_plane[J]. ASME J Appl Mech, 1988, 55(2): 317)324.

[5] Shih C F, Asaro R J. Elastic_plastic analysis of crack on bi_material interfaces_Part : Small scale yielding[J]. J Appl Mech, 1988, 55(2): 299)316.

[6] Shih C F, Asaro R J. Elastic_plastic analysis of crack on bi_material interfaces_Part : Structure of small scale yielding fields[J]. J Appl Mech, 1989, 56(4): 763)779.

7] Wang T C. Elastic_plastic asymptotic fields for cracks on bimaterial interfaces [J]. Engng Fracture Mech, 1990, 37(3): 527) 538.

[8] Hui C Y, Riedel H. The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep condition [J]. Int J Fracture, 1981, 17(4): 409) 425.

[9] Gao Y C. Further study on strain singularity behavior of moving crack in elastic_viscoplastic materials [J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 1990, 14(3): 233) 242.

[10] Taher M, Saif A, Hui C Y. Plane strain asymptotic field of a crack growing along an elastic_elastic power law creeping bimaterial interface[J]. J Mech Phys Solids, 1994, 42(2): 181) 214.

[11] Tang L Q, Sun X G, Wang Z Q. Near tip field for stationary growth crack at the interface between an elastononlinear viscous material and an elastic solid[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1995, 8(增刊): 646) 649.

[12] 李永东, 唐立强. 刚性_粘弹性材料Ò型界面裂纹准静态扩展的渐近解[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2000, 21(2): 58) 66.

[13] 李永东. 油水井套管损坏的断裂力学机理的研究[D]. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2001.

Asymptotic Analysis of Mode Stationary Growth Crack on Elastic_Elastic Power Law Creeping Bimaterial Interface

TANG Li_qiang[1], LI Yong_dong[2], LIU Chang_hai[3]

(1. College of Civil Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, P. R. China;

2. Department of Mechanics Engineering, PLA Armored Force Engineering Institute, Beijing 100072, P. R. China;

3. Daqing Petroleum Institute, Daqing 163318, P. R. China)

Abstract: A mechanical model was established for mode interfacial crack static growing along an elastic_elastic power law creeping bimaterial interface. For two kinds of boundary conditions on crack faces, traction free and frictional contact, asymptotic solutions of the stress and strain near tip_crack were given. Results derived indicate that the stress and strain have the same singularity, there is not the oscillatory singularity in the field; the creep power_hardening index n and the ratio of Young. s module notably influence the crack_tip field in region of elastic power law creeping material and n only influences distribution of stresses and strains in region of elastic material. When n is bigger, the creeping deformation is dominant and stress fields become steady, which does not change with n. Poisson. s ratio does not affect the distributing of the crack_tip field.

Key words: elastic_elastic power law creeping material; mode interfacial crack; crack_tip field