

半球壳振动的有限元法分析*

樊尚春 刘广玉 王振均

(北京航空航天大学, 1990年6月20日收到)

摘 要

本文建立了用有限元法分析球壳的动力学方程。计算分析了不同边界条件下壳体的振动频率。

关键词 半球壳 振动 有限元法 谐振频率

一、简 述

半球壳振动分析是一个典型的弹性动力学问题。一些文献用解析法作过分析^{[1]~[4]}。虽然分析过程简单,对于特定的边界条件也能给出简洁的计算公式。但对于不同类型的边界条件,不能给出统一的计算公式,只能逐一处理。对有些边界条件只能给出近似解。当球壳的边界角变化时,计算误差增加。而用有限元法分析,可以统一建立动力学方程,易于处理边界条件。可以进行解析法无法进行的分析。在计算机迅速发展的今天也很容易进行计算。因此用有限元法分析球壳的振动问题是很有价值的。实际应用的半球壳只有一端有约束,另一端处于自由状态。底端(φ_0 处,见图1)有约束的半球壳主要用于半球壳谐振陀螺仪中^[5],本文主要分析这种类型的半球壳。顶端(φ_r 处)有约束的半球壳可见于某些建筑结构上,本文也作一定分析。其它类型的边界条件也很容易进行分析。

二、建立有限元列式

图1是所考虑的半球壳,中心轴为 x ,壳体的壁厚,中面半径分别为 h, R ;壳体两端的边界角为 φ_0, φ_r ,分别记为底端角和顶端角。壳体材料的弹性模量,泊桑比,密度分别为 E, μ, ρ 。假定壳体是一致均匀的,即 E, μ, ρ 不变。同时 h 为常数。

壳体在母线方向,环线方向的坐标分别为 φ, θ ,任一点 P 处的位移为:

$$V = ua + vb + wc$$

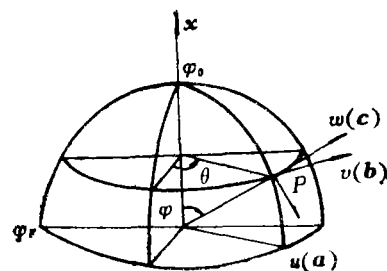


图1 半球壳数学模型

*樊大钧推荐。

国家自然科学基金资助项目。

其中 u, v, w 分别为母线方向, 环线方向, 法线方向的位移; a, b, c 为相应方向的单位动矢量。

利用[4]中的关系, 建立球壳的势能为:

$$U = \frac{h}{2} \int_s [\varepsilon]^T [D] [\varepsilon] dS \quad (2.1)$$

$$[\varepsilon] = [B][V]$$

$$[V] = \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(\varphi) \\ v(\varphi) \\ w(\varphi) \end{bmatrix} \cos \omega t \quad (2.2)$$

$$[B] = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & 1 \\ \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} & \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} & 1 \\ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} & 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & -\frac{\partial^2}{R \partial \varphi^2} \\ \frac{\cos \varphi}{R \sin \varphi} & \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \right) & \frac{2}{R \sin \varphi} \left(\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \theta} \right) \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^2/12 & h^2\mu/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^2\mu/12 & h^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\mu)h^2/24 \end{bmatrix}$$

S 为积分面积, n 为环向波数。式(2.2)给出的 $[V]$ 是环向波数为 n 的对称振型, $u(\varphi), v(\varphi), w(\varphi)$ 为沿母线方向的振型。

球壳的动能为:

$$T = \frac{h}{2} \int_s \rho \frac{\partial}{\partial t} [V]^T \cdot \frac{\partial}{\partial t} [V] dS \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [V] = -\omega \begin{bmatrix} \cos n\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(\varphi) \\ v(\varphi) \\ w(\varphi) \end{bmatrix} \sin \omega t \quad (2.4)$$

考虑式(2.2)和(2.4), 可沿母线方向划分单位。对于第 i 个球壳单元, 其母线方向坐标从 φ_{i-1} 到 φ_i , 记为第 i 和 $i+1$ 个节点, 在母线方向的振型为 $u^i(\varphi), v^i(\varphi), w^i(\varphi)$ 。考察算子矩阵 $[B]$, 为保证力连续性, 可以取 $u^i(\varphi), v^i(\varphi)$ 为一阶Hermite插值, $w^i(\varphi)$ 为二阶Hermite插值, 即:

$$\begin{bmatrix} u'(\varphi) \\ v'(\varphi) \\ w'(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & X_1 & 0 \\ 0 & 0 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_u^i \\ \alpha_v^i \\ \alpha_w^i \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$X_n = [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^{2n+1}]$$

X_1, X_1, X_2 分别为 $u'(\varphi), v'(\varphi), w'(\varphi)$ 在 $\varphi \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$ 即 $x \in [-1, 1]$ 上的Hermite插值向量,且有: $\varphi = \varphi_{i-1} + (x+1)l, l = (\varphi_i - \varphi_{i-1})/2$. $\alpha_u^i, \alpha_v^i, \alpha_w^i$ 分别为 $u'(\varphi), v'(\varphi), w'(\varphi)$ 的插值系数向量, H_1, H_2 为1阶和2阶的Hermite插值矩阵.为便于组成整体刚度阵,质量阵,引入变换阵 $[C]$,有如下关系:

$$\begin{aligned} [\alpha_u^i, \alpha_v^i, \alpha_w^i]^T &= [C][a^i] \\ [a^i] &= [\alpha_u^{i(-1)}, \alpha_v^{i(-1)}, \alpha_w^{i(-1)}, \dots, \alpha_u^{i(+1)}, \alpha_v^{i(+1)}, \alpha_w^{i(+1)}, \dots]^T \end{aligned} \quad (2.6)$$

即按节点 $i-1$ (记为 (-1))和节点 i (记为 $(+1)$)来排列插值系数阵,

$$\text{记} \quad [A] = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 \end{bmatrix} [C] \quad (2.7)$$

于是,

$$\begin{bmatrix} u'(\varphi) \\ v'(\varphi) \\ w'(\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & X_1 & 0 \\ 0 & 0 & X_2 \end{bmatrix} [A][a^i] = [X][A][a^i] \quad (2.8)$$

利用这些关系,可以写出第 i 个单元的势能和动能表达式,进而可得所对应的刚度阵和质量阵,分别为:

$$[K^i] = [A]^T \int_{-1}^{+1} [B_x]^T [D] [B_x] \sin[\varphi_{i-1} + (x+1)l] dx [A] \cdot \frac{1}{R} \quad (2.9)$$

$$[M^i] = [A]^T \int_{-1}^{+1} [X]^T [X] \sin[\varphi_{i-1} + (x+1)l] dx [A] R \rho \quad (2.10)$$

式中:

$$[A] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 4l & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -4l & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & -4l & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & -4l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4l & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4l & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 4l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 4l & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -4l & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -4l & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & -4l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4l & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4l & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 4l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 5l & l^2 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & -5l & l^2 \\ 0 & 0 & -15 & 0 & 0 & -7l & -l^2 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & -7l & l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6l & -2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & -2l^2 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 10l & 2l^2 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 10l & -2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l & l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l & l^2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3l & l^2 \end{bmatrix}$$

$$[B_x] = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} X_1^1 & 0 & X_2^0 \\ \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} X_1^0 & \frac{n}{\sin\varphi} X_1^0 & X_2^0 \\ -\frac{n}{\sin\varphi} X_1^0 & \frac{1}{l} X_1^1 - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} X_1^0 & 0 \\ -\frac{1}{Rl} X_1^1 & 0 & -\frac{1}{l^2 R} X_2^2 \\ -\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} X_1^0 & \frac{n}{R\sin\varphi} X_1^0 & \frac{n^2}{R\sin^2\varphi} X_2^0 - \frac{\cos\varphi}{l\sin\varphi} X_2^1 \\ -\frac{n}{R\sin\varphi} X_1^0 & \frac{1}{R} \left(\frac{1}{l} X_1^1 - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} X_1^0 \right) & \frac{2n}{R\sin\varphi} \left(\frac{1}{l} X_2^1 - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} X_2^0 \right) \end{bmatrix}$$

$$X_n^0 \triangleq X_n, \quad X_n^1 \triangleq \frac{\partial^{(1)}}{\partial x^1} X_n \quad (X_n^1 \text{ 为 } X_n \text{ 对 } x \text{ 的 I 次导数})$$

利用单元刚度矩阵 $[K']$ ，单元质量矩阵 $[M']$ ，可以组成整体刚度矩阵 $[K]$ ，整体质量矩阵 $[M]$ ，并得到未处理边界条件的动力学方程：

$$([K] - \omega^2[M])[a] = [0] \quad (2.11)$$

对于几何约束的边界条件，即在第一个节点 φ_0 ，最后一个节点 φ_F 处 u, v, w 及其相应的导数有约束。表1给出了几种不同边界条件及相应的约束。对于这类边界条件，在式(2.11)中把 $[K]$ ， $[M]$ 阵中 u, v, w 及其导数为0所在的行和列去掉就相当于处理了边界条件。这一措施自然要比解析法中采用的方法方便得多，也更通用。

表1 几种边界条件及相应的约束

边界条件类型	约束情况
固支端	$u=v=w=w'=0$
简支端	$u=v=w=0$
固支且沿母线方向滑动	$v=w=w'=0$
自由端	u, v, w 及其导数无约束

处理了边界条件后，便可以求解谐振频率 ω 及相应的振型。在数学上属于求解广义特征值及广义特征向量问题。本文采用Rayleigh-Ritz子空间迭代法进行求解。

三、计算结果及其分析

近年来发展起来的半球壳谐振陀螺仪是一种无转子和活动支承的陀螺仪，具有许多独特优点^[5]。它的敏感部件是一个底端(φ_0)固支，顶端(φ_F)自由的半球壳。分析它的振动特性对于研制这种陀螺有重要的意义。下面首先分析这种边界条件的半球壳的振动。

对于有限元计算，通常单元数增加，计算精度提高，计算速度下降。因此计算时确定适当的单元数进行计算是十分重要的。表2给出用等单元计算 $\varphi_0=0^\circ$ ， $\varphi_F=90^\circ$ 的上述半球壳谐振频率的收敛过程。可以看出：如果把用9个单元计算的结果作为有限元法计算的收敛解，那么用3个单元计算结果的误差分别为： $n=2$ 时，0.53%； $n=3$ 时，1.6%； $n=4$ 时，2.8%。随着 n 的增加而增大。用4个单元计算的结果误差为 $n=2$ 时，0.29%； $n=3$ 时，0.39%； $n=4$ 时，0.72%。也随着 n 的增加而增大。所以对 $n=2$ 的计算可以用3个单元，而对 $n \geq 3$ 的计算可用4个单元。半球壳的参数为 $R=50\text{mm}$ ， $h=0.5\text{mm}$ ， $E=1.911 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ ， $\rho=7.85 \times$

表2 用不同单元计算得到的谐振频率(Hz)

n	单元数				
	1	2	3	4	9
2	258.34	207.28	203.55	203.06	202.47
3	1749.33	636.23	566.55	559.99	557.84
4	3622.27	1287.14	1083.83	1061.54	1054.00

表3 计算结果 Ω 的比较

n	2	3	4	5	6	7	8	9
文献[2]	0.012	0.034	0.064	0.102	0.146	0.197	0.253	0.315
文献[3]	0.0125	0.0342	0.0717	0.1050	0.1500	0.2050	0.2583	0.3230
文献[4]	0.0127	0.0356	0.0687	0.1118	0.1647	0.2273	0.2995	0.3814
本文	0.0123	0.0340	0.0645	0.103	0.148	0.200	0.258	0.322

$10^{-3}g/mm^3$, $\mu=0.3$. 下文中计算的结果均是在上面的壳体参数下用上面确定的单元数得到的。

表3给出了本文计算的结果与有关文献结果的比较, $\varphi_0=0^\circ$, $\varphi_F=90^\circ$, 无量纲频率 Ω 的定义为^[3]:

$$\Omega = \omega R [\rho(1-\mu^2)/E]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

在表3中, [2], [4]的为计算值, [3]为实验值. 可以看出, 本文的结果与实验值最吻合。

用于半球壳谐振陀螺仪中的半球壳只用 $n=2$ 的四波腹振动^[5], 且其边界角 φ_0 , φ_F 一般不是 0° 和 90° , 为此, 表4给出了 $n=2$ 时, φ_0 ; φ_F 取不同值时的谐振频率与 $\varphi_0=0^\circ$, $\varphi_F=90^\circ$ 时的谐振频率的比值. 表5给出了不同 φ_0 时, $\varphi_F=72^\circ$ 的振频对 $\varphi_F=90^\circ$ 的振频的变化率 σ_F . 表6给出了不同 φ_F 时, $\varphi_0=15^\circ$ 的振频对 $\varphi_0=0^\circ$ 的振频的变化率 σ_0 .

表4 不同 φ_0 , φ_F 下的振频对 $\varphi_0=0^\circ$, $\varphi_F=90^\circ$ 时振频的比值($n=2$)

φ_0	φ_F			
	72°	78°	84°	90°
0°	1.20312	1.10573	1.03999	1
5°	1.21931	1.11937	1.04762	1.00352
10°	1.41769	1.25578	1.14563	1.03404
15°	2.21954	1.84129	1.57731	1.16344

表5 不同 φ_0 时, φ_F 变化引起振频的变化率 σ_F

φ_0	0°	5°	10°	15°
σ_F	0.20312	0.21503	0.37102	0.90774

表6 不同 φ_F 时, φ_0 变化引起振频的变化率 σ_0

φ_F	72°	78°	84°	90°
σ_0	0.84482	0.66523	0.51666	0.16344

从表4~6可以看出, 同样的 φ_0 变化引起的振频变化量随 φ_F 的增大而减小; 同样的 φ_F 变化引起的振频变化量随 φ_0 的增大而增大. 而且 φ_F , φ_0 变化时, 引起振频的变化都比较明显. 文献[4]也对 φ_0 , φ_F 变化时半球壳谐振频率的变化情况进行了分析. 在文献[4]中, 求解谐振频率是利用Lord Rayleigh不扩张条件得到的. 正如文献[4]指出的, 当边界角 $\varphi_0 \neq 0^\circ$ 时, 固支边界条件与Lord Rayleigh条件相矛盾. 所以, 文献[4]所得到的 $\varphi_0 \neq 0^\circ$ 的有关结果, 在 φ_0 较小时, 误差较小; 而当 φ_0 较大时, 误差增大. 这是解析法不容易解决的, 本文所采用的有限元法则很好地解决了这一问题。

一些球形顶建筑物, 其底端($\varphi_0=0^\circ$)是自由的, 而在顶端(φ_F)有约束, 通常是固支或简

支。表7给出了用4个单元计算 $\varphi_0=0^\circ$, $\varphi_F=90^\circ$ 的这种半球壳的谐振频率。半球壳的参数同前。可以看出: 这种类型半球壳的谐振频率很高, 边界条件对谐振频率的影响不大。当 n 增加时, 谐振频率增加, 但增加量不大。

表7 $\varphi_0=0^\circ$ 自由, $\varphi_F=90^\circ$ 约束的半球壳的振频(Hz)

边界条件类型		n	2	3	4
固	支		14182.5	14976.3	15306.7
筒	支		14186.2	14885.3	15312.4

对比表2和表7, 可以看出, 对半球壳来说, 约束其底端(φ_0)和约束其顶端, 其谐振频率相差很大, 这表明球壳的底端和顶端所具有的等效刚度相差很大。且这种差别随着 n 的增加而减小。当环向波数 n 不太大时, 底端 φ_0 处的等效刚度要比顶端 φ_F 处的等效刚度大, 当 n 增加时, 顶端 φ_F 处的等效刚度逐渐接近于底端 φ_0 处的等效刚度。

四、结 论

1. 用有限元法计算半球壳的谐振频率在处理边界条件方面有独特的优点, 特别是边界角 φ_F 或 φ_0 变化时。它可以解决解析法不易处理的问题。
2. 半球壳的边界角 φ_0 , φ_F 对谐振频率的影响均比较明显。相同 φ_0 变化引起的振频变化量随 φ_F 的增加而减少。相同 φ_F 变化引起的振频变化量随 φ_0 的增加而增加。
3. 半球壳的底端角 φ_0 处, 顶端角 φ_F 处所具有的等效刚度相差很大, 因此约束底端和顶端对半球壳的振频影响很大。

参 考 文 献

- [1] Ross, E.W., Jr., Natural frequencies and mode shapes for axisymmetric vibration of deep spherical shells, *J. Appl. Mech.*, 32(3) (1965), 553—561.
- [2] Lin Gau-feng, Analytical solutions for open nonshallow spherical shell vibrations, AD 74269, Sep.(1979).
- [3] Hwang, C., Some experiments on the vibration of a hemispherical shell, *J. Appl. Mech.*, 33(4) (1966), 817—824.
- [4] 樊尚春、刘广玉、王振均, 半球壳的弯曲振动分析, 应用数学和力学, 12(10) (1991).
- [5] Scott, W.B., Delco makes low-cost gyro prototype, *AW & ST*, Oct. (1982), 64—71.

On Vibration of Hemispherical Shell by Using Finite Element Method

Fan Shang-chun Liu Guang-yu Wang Zhen-jun

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing)

Abstract

This paper establishes the finite element equation for the spherical shell. The resonant frequencies of the above shell under different boundary conditions are also discussed and calculated.

Key words hemispherical shell, vibration, finite element method, resonant frequency