应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

边界伸缩原理*

宋顺成

（包头 内蒙古金属材料研究所，1990年1月15日收到）

摘　要

文[5]提出边界伸缩原理及边界伸缩法．本文补充叙述了边界伸缩原理，并根据已有研究成果给予了较严格地证明，进一步完善了边界伸缩法理论基础．

关键词　边界元　边界伸缩原理　边界伸缩法

一、前　言

同其它数值方法相比，用边界元方法(BEM)解弹性力学问题有很多优点．特别是区域内部解的精度较高，加之单元划分少，输入输出数据少，使用方便等．最近几年边界元方法在国内外得到了迅速发展．但是使用一般的边界元方法（BEM）由于存在着解的奇异性，往往使求解边界附近的区域失败．尽管无限制地增加单元，也很难直接求得边界上的应力解．

文[5]提出了边界伸缩原理，并在此原理基础上提出边界伸缩法(BECM)（boundary expanding-contracting method），不但较好地解决了求解边界附近区域包括边界上的解，而且可以方便地利用迭代过程改善求解精度．文[5]的计算实例表明，边界伸缩法在求解弹性边值问题中是十分有效的．

本文补充叙述了边界伸缩原理，并根据已有研究成果给予了较严格地证明，进一步完善了边界伸缩法理论基础．

二、引导定理

为了叙述和证明边界伸缩原理，首先给出如下引导定理．

引理1　面力不为零的弹性边值问题，可化为面力为零的弹性边值问题．

实际上根据平衡方程及面力边界条件，

$$\sigma_{ij,j}+X_i=0 \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij}n_j=\overline{X}_i \tag{2.2}$$

假设

$$\sigma_{ij}=\sigma'_{ij}+D_{ij} \tag{2.3}$$

---

* 钱伟长推荐．

其中
$$D_{ij}=\begin{cases}\bar{X}_i/n_j & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{2.4}$$

如果D_{ij}分段可微，将(2.3)代入(2.1)及(2.2)，

$$\sigma'_{ij,j}+X'_i=0 \tag{2.5}$$

$$\sigma'_{ij}n_j=0 \tag{2.6}$$

其中
$$X'_i=D_{ij,j}+X_i \tag{2.7}$$

这样面力不为零的边值问题(2.1)及(2.2)就化为面力为零的边值问题(2.5)及(2.6)。

引理2 面力边值弹性问题可化为位移边值弹性问题.

实际上将几何方程 $\varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$ (2.8)

及物理方程 $\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2G\varepsilon_{ij}$ (2.9)

代入面力边界条件 $\sigma_{ij}n_j=\bar{X}_i$ (2.10)

就得到位移边值条件 $\lambda u_{k,k}n_i+G(u_{i,j}+u_{j,i})n_j=\bar{X}_i$ (2.11)

根据引理2，下面叙述边界伸缩原理时，不失一般性只叙述位移边界条件.

三、边 界 伸 缩 原 理

1. 边界伸缩定义

设弹性体$\mathscr{D}_1$，其边界为$\partial\mathscr{D}_1$，φ是定义在$\partial\mathscr{D}_1$上的一个可逆映照，且

$$\varphi(\partial\mathscr{D}_1)=\partial\mathscr{D}_2 \tag{3.1}$$

当$\partial\mathscr{D}_2$所形成的区域$\mathscr{D}_2\supset\mathscr{D}_1$时，称边界$\partial\mathscr{D}_2$是由边界$\partial\mathscr{D}_1$伸缩得到的.

2. 边界伸缩原理1

设弹性体$\mathscr{D}_1$，其边界为$\partial\mathscr{D}_1$，边界条件为

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{g}\qquad (\text{在}\partial\mathscr{D}_1\text{上}) \tag{3.2}$$

其中$\mathbf{M}$是边界条件转换算子，$\mathbf{u}$是位移矢量，$\mathbf{g}$是已知矢量.

如果弹性体$\mathscr{D}_1$经边界$\partial\mathscr{D}_1$伸缩后得到弹性体$\mathscr{D}_2$及边界$\partial\mathscr{D}_2$，那么在$\partial\mathscr{D}_2$上存在位移$\mathscr{U}$及面力$\mathscr{P}$满足边界条件(3.2).

该原理可以由能量原理给出证明.

设ψ_u是$\mathscr{D}_2$上满足(3.2)的位移场$\mathbf{u}$的集合，并定义

$$\Pi(\mathbf{u})=B(\mathbf{u},\mathbf{u})/2-(\mathbf{u},\mathbf{f}) \tag{3.3}$$

$$B(\mathbf{u},\ \mathbf{u})=\int_{\mathscr{D}_2}\Gamma(\mathbf{u}):\mathrm{T}(\mathbf{u})dV \tag{3.4}$$

$$(\mathbf{u},\ \mathbf{f})_0=\int_{\mathscr{D}_2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}dV \tag{3.5}$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_1=\int_{\mathscr{D}_2}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\nabla\mathbf{u}:\mathbf{v}\nabla)dV \tag{3.6}$$

均方根模
$$\|\mathbf{u}\|_1=\sqrt{(\mathbf{u},\ \mathbf{u})_1} \tag{3.7}$$

$$\|\mathbf{u}\|_0=\sqrt{(\mathbf{u},\ \mathbf{u})_0} \tag{3.8}$$

及能量模
$$|\mathbf{u}|=\sqrt{B(\mathbf{u},\ \mathbf{u})} \tag{3.9}$$

其中$\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$表示位移矢量，$\Gamma(\mathbf{u})$及$\mathrm{T}(\mathbf{u})$分别表示应变张量及应力张量，$\mathbf{f}$是体积力矢量.

根据引理1，不失一般性在$\partial\mathscr{D}_2$上只考虑面力为零的情况. 那么由最小势能原理得知，弹

性力学位移方程解的存在等价于ψ_u上泛函Π的极值位移场$\mathbf{u}$的存在。

由Schwarz不等式，

$$(\mathbf{u},\mathbf{f})_0=\int_{\mathscr{D}_2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}dV\leqslant\sqrt{\int_{\mathscr{D}_2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}dV\int_{\mathscr{D}_2}\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}dV}\leqslant\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{f}\|_0 \tag{3.10}$$

根据能量模与均方根模的等价性[4]，

$$B(\mathbf{u},\mathbf{u})/2\geqslant\gamma^2\|\mathbf{u}\|_1^2 \tag{3.11}$$

其中γ^2为一个正常数。于是，

$$\Pi(\mathbf{u})\geqslant\gamma^2\|\mathbf{u}\|_1^2-\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{f}\|_0=(\gamma\|\mathbf{u}\|-\|\mathbf{f}\|_0/2\gamma)^2-\|\mathbf{f}\|_0^2/4\gamma^2\geqslant-\|\mathbf{f}\|_0^2/4\gamma^2 \tag{3.12}$$

就是说在$\mathbf{f}$平方可积的条件下，$\Pi(\mathbf{u})$是一个有下确界的实数集合，记下确界为d。

由下确界定义，对任意$1/n$(n为自然数)，总有位移场$\mathbf{u}_n$存在使得

$$d\leqslant\Pi(\mathbf{u}_n)\leqslant d+1/n \tag{3.13}$$

由此对于$\varepsilon>0$，取N，使得$m>N$，$n>N$时，$1/m<\varepsilon/8$，$1/n<\varepsilon/8$总有$\mathbf{u}_m$与$\mathbf{u}_n$满足

$$d\leqslant\Pi(\mathbf{u}_m)<d+\varepsilon/8,\quad d\leqslant\Pi(\mathbf{u}_n)\leqslant d+\varepsilon/8 \tag{3.14}$$

另外根据泛函$B(\mathbf{u},\mathbf{u})$的下凸性[4]，

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{\mathbf{u}_m+\mathbf{u}_n}{2},\ \frac{\mathbf{u}_m+\mathbf{u}_n}{2}\right)-\left(\frac{\mathbf{u}_m+\mathbf{u}_n}{2},\ \mathbf{f}\right)_0=\Pi\left(\frac{\mathbf{u}_m+\mathbf{u}_n}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(\Pi(\mathbf{u}_m)+\Pi(\mathbf{u}_n))$$

$$=\frac{1}{4}[B(\mathbf{u}_m,\mathbf{u}_m)+B(\mathbf{u}_n,\mathbf{u}_n)]-\left(\frac{\mathbf{u}_m+\mathbf{u}_n}{2},\ \mathbf{f}\right)_0 \tag{3.15}$$

应用(3.14)可得 $$d\leqslant\Pi(\mathbf{u}_m+\mathbf{u}_n)/2<d+\varepsilon/8 \tag{3.16}$$

但是 $$\Pi(\mathbf{u}_m)+\Pi(\mathbf{u}_n)-2\Pi\left(\frac{\mathbf{u}_m+\mathbf{u}_n}{2}\right)=\frac{1}{4}B(\mathbf{u}_n-\mathbf{u}_m,\ \mathbf{u}_n-\mathbf{u}_m) \tag{3.17}$$

于是 $$\frac{1}{4}B(\mathbf{u}_n-\mathbf{u}_m,\ \mathbf{u}_n-\mathbf{u}_m)\leqslant\left|\ \Pi(\mathbf{u}_m)+\Pi(\mathbf{u}_n)-2\Pi\left(\frac{\mathbf{u}_m+\mathbf{u}_n}{2}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{3.18}$$

即 $$B(\mathbf{u}_n-\mathbf{u}_m,\ \mathbf{u}_n-\mathbf{u}_m)<\varepsilon \tag{3.19}$$

就是说序列$\mathbf{u}_n$当N充分大时有

$$|\mathbf{u}_n-\mathbf{u}_m|^2<\varepsilon \tag{3.20}$$

这说明$\mathbf{u}_n$是一个以能量模收敛的Cauchy序列，必存有极限$\mathbf{u}_0$，由此在$\mathscr{D}_2$边界上存在位移矢量及面力矢量满足边界条件(3.2)，

$$\mathscr{U}=\mathbf{u}_0(\varphi(\partial\mathscr{D}_1)) \tag{3.21}$$

$$\mathscr{P}=\mathbf{M}\cdot\mathbf{u}_0(\varphi(\partial\mathscr{D}_1)) \tag{3.22}$$

在St. Venant原理意义上说，如果$\partial\mathscr{D}_1$通过映照φ得到$\partial\mathscr{D}_2$远离$\partial\mathscr{D}_1$时，$\mathscr{U}$及$\mathscr{P}$不是唯一的。但这并不影响$\mathscr{D}_1$内的唯一解。下面给出另外一个边界伸缩原理。

3. 边界伸缩原理2

设弹性体$\mathscr{D}_1$，其边界为$\partial\mathscr{D}_1$，边界条件为

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{g}\qquad(\text{在}\partial\mathscr{D}_1\text{上}) \tag{3.23}$$

弹性体$\mathscr{D}_1$经边界$\partial\mathscr{D}_1$伸缩后得到弹性体$\mathscr{D}_2$及边界$\partial\mathscr{D}_2$，如果在$\partial\mathscr{D}_2$上求得一组位移$\mathscr{U}$及面力$\mathscr{P}$使$\mathscr{D}_2$内的解满足(2.23)，则$\mathscr{D}_2$在$\mathscr{D}_1$内的解与原问题在$\mathscr{D}_1$内的解一致。

该原理可类似于Krichhoff唯一性定理得到证明。

设$\mathscr{D}_2$在$\mathscr{D}_1$内的解为$\mathbf{u}_2$，原问题在$\mathscr{D}_1$内的解为$\mathbf{u}_1$，于是

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{u}_1=\mathbf{f}\quad(\text{在}\mathscr{D}_1\text{内});\qquad\qquad \mathbf{M}\cdot\mathbf{u}_1=\mathbf{g}\quad(\text{在}\partial\mathscr{D}_1\text{上}) \tag{3.24}$$

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{u}_2=\mathbf{f}\quad(\text{在}\mathscr{D}_1\text{内});\qquad \mathbf{M}\cdot\mathbf{u}_2=\mathbf{g}\quad(\text{在}\partial\mathscr{D}_1\text{上})\tag{3.25}$$

其中**L**是平衡方程算子矩阵。

(3.24)与(3.25)相减并考虑**L**及**M**的线性性质，

$$\mathbf{L}\cdot(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)=0\quad(\text{在}\mathscr{D}_1\text{内});\qquad \mathbf{M}\cdot(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)=0\quad(\text{在}\partial\mathscr{D}_1\text{上})\tag{3.26}$$

令$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2$，而$\mathbf{L}\cdot(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)=0$是以位移表示的平衡方程，它等价于$-\mathrm{div}\mathbf{T}=0$，两边点乘$\mathbf{u}$并在$\mathscr{D}_1$内积分得

$$\int_{\mathscr{D}_1}-(\mathrm{div}\mathbf{T})\cdot\mathbf{u}dV=0\tag{3.27}$$

由格林定理得到

$$\int_{\mathscr{D}_1}-(\mathrm{div}\mathbf{T})\cdot\mathbf{u}dV=\int_{\mathscr{D}_1}\mathbf{T}:\mathbf{\Gamma}dV-\int_{\partial\mathscr{D}_1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\cdot d\boldsymbol{\pi}=0\tag{3.28}$$

(3.26)第二式表示在$\partial\mathscr{D}_1$上$\mathbf{u}$满足齐次边界条件，故

$$\int_{\partial\mathscr{D}_1}\mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\cdot d\boldsymbol{\pi}=0\tag{3.29}$$

即

$$\int_{\mathscr{D}_1}\mathbf{T}:\mathbf{\Gamma}dV=0\tag{3.30}$$

但变形能应当是正定的，恒有

$$\mathbf{T}:\mathbf{\Gamma}>0\tag{3.31}$$

因此由(3.30)，只能

$$\mathbf{\Gamma}\equiv0\tag{3.32}$$

即$\mathbf{\Gamma}_1=\mathbf{\Gamma}_2$，$\mathbf{T}_1=\mathbf{T}_2$，亦即对应于$\mathbf{u}_1$的应力、应变和对应于$\mathbf{u}_2$的应力、应变一致。

参 考 文 献

[1] Brebbia, C. A. and S. Walker, *Boundary Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworth, London (1980).

[2] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社 (1956)，

[3] 米赫林, C. T.,《积分方程及其应用》，商务印书馆 (1955).

[4] 武际可、王敏中，《弹性力学引论》，北京大学出版社 (1981).

[5] 宋顺成，边界伸缩法，应用数学和力学，**10**(10) (1989)，921—928.

[6] 宋顺成、张玉诚、冯德振，边界元方法在开槽自紧管应力分析中的应用，应用数学和力学，**11** (2) (1990)，173—178.

The Boundary Expanding-Contracting Principle

Song Shun-cheng

(*Inner Mongolia Institute of Metallic Materials, Baotou*)

Abstract

In paper [5], we proposed the boundary expanding-contracting principle and the boundary expanding-contracting method (BECM). In this paper we make some complemental statements and detailed proofs about the principle.

Key words boundary element, boundary expanding-contracting principle, boundary expanding-contracting method