应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

四阶椭圆型方程奇异摄动问题的数值解

苏煜城　　刘国庆

（南京大学）　（南京化工学院）

（1990年10月17日收到）

摘　要

本文对一类四阶椭圆型方程奇异摄动问题建立了指数型拟合差分格式，并且证明了这种格式在能量范数意义下关于小参数 ε 的一致收敛性．最后，我们给出了数值结果．

关键词　椭圆型　奇异摄动　能量范数　数值解

一、引　言

在文[1]中我们曾经考虑过四阶椭圆型方程奇异摄动问题

$$L_\varepsilon\phi\equiv-\varepsilon^2\nabla^4\phi(x,y)+a(x,y)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+c(x,y)\frac{\partial\phi}{\partial x}+d(x,y)\phi=f(x,y) \tag{I}$$

$$\left.\begin{aligned}&\partial\phi/\partial n+k\phi=g(x,y)\qquad (k=\text{const}<0),\ (x,y)\in\Gamma\\&\nabla^2\phi=h(x,y)\qquad (x,y)\in\Gamma\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

的渐近解．其中 n 表示内法线，Γ 表示区域的边界，并且假设所有的系数满足一定的相容性条件以保证解 ϕ 在包含 Γ 的一个开区域内光滑．现在我们来讨论这一问题的差分解法．

二、预 备 知 识

记号　∇，$\overline{\nabla}$ 分别表示前差和后差，∇_x 表示 x 的向前差商，$\hat{\nabla}_x$ 表示关于 x 的中心差商，h，τ 分别表示 x 和 y 方向上的网络步长，i.e，$\nabla_x=\nabla/h$，$\nabla_y=\nabla/\tau$．

2.1　离散的Green 公式及差分法则

$$\sum_{i=0}^{N-1}v_i\nabla w_i=-\sum_{i=1}^{N}w_i\overline{\nabla}v_i+v_Nw_N-v_0w_0 \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}v_i\nabla\overline{\nabla}w_i=-\sum_{i=1}^{N}\overline{\nabla}w_i\overline{\nabla}v_i+v_N\overline{\nabla}w_N-v_0\overline{\nabla}w_0 \tag{2.2}$$

$$\overline{\nabla}(u_i v_i)=v_i\overline{\nabla}u_i+u_{i-1}\overline{\nabla}v_i \tag{2.3}$$

$$\nabla(u_i v_i)=\nabla u_i\cdot v_{i+1}+u_i\nabla v_i \tag{2.4}$$

2.2 离散的迹引理

引理1

$$\tau\sum_{j=0}^{M}u_{0j}^2\leqslant\frac{2}{Lh}\cdot\tau h\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{M}u_{ij}^2+(L+1)h\cdot\tau h\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{M}(\overline{\nabla}_x u_{ij})^2 \tag{2.5}$$

$$\tau\sum_{j=0}^{M}u_{0j}^2\leqslant\frac{2}{Lh}\cdot\tau h\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{M}u_{ij}^2+(L+1)h\cdot\tau h\sum_{i=0}^{N-2}\sum_{j=0}^{M}(\nabla_x u_{ij})^2\quad 1\leqslant L\leqslant N-1 \tag{2.6}$$

证明

$$u_{ij}-u_{0j}=h\sum_{l=1}^{i}\overline{\nabla}_x u_{lj}$$

$$u_{0j}^2=\left(u_{ij}-h\sum_{l=1}^{i}\overline{\nabla}_x u_{lj}\right)^2\leqslant 2u_{ij}^2+2h^2\left(\sum_{l=1}^{i}\overline{\nabla}_x u_{lj}\right)^2$$

对上式两端同乘以τ，并关于j求和，得

$$\tau\sum_{j=0}^{M}u_{0j}^2\leqslant 2\tau\sum_{j=0}^{M}u_{ij}^2+2\tau\sum_{j=0}^{M}h^2\left(\sum_{l=1}^{i}\overline{\nabla}_x u_{lj}\right)^2$$

$$\leqslant 2\tau\sum_{j=0}^{M}u_{ij}^2+2\tau h^2\sum_{j=0}^{M}\left[i\sum_{l=1}^{i}(\overline{\nabla}_x u_{lj})^2\right]$$

上式两端同乘以h，然后关于i从1到L求和($0\leqslant L\leqslant N-1$)，则有

$$h\tau\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=0}^{M}u_{0j}^2\leqslant 2h\tau\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=0}^{M}u_{ij}^2+2\tau h^3\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=0}^{M}\left[i\sum_{l=1}^{i}(\overline{\nabla}_x u_{lj})^2\right]$$

$$\leqslant 2h\tau\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{M}u_{ij}^2+(L+1)L\cdot\tau h\cdot h^2\sum_{j=0}^{M}\sum_{i=1}^{N-1}(\overline{\nabla}_x u_{ij})^2$$

所以

$$\tau\sum_{j=0}^{M}u_{0j}^2\leqslant\frac{2}{Lh}\cdot h\tau\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=0}^{M}u_{ij}^2+(L+1)h\cdot\tau h\sum_{j=0}^{M}\sum_{i=1}^{N-1}(\overline{\nabla}_x u_{ij})^2$$

同理可证得另一个不等式(2.6)。

类似地，还有不等式

$$h\sum_{i=0}^{N}u_{i0}^2\leqslant\frac{2}{L\tau}\cdot\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\sum_{i=0}^{N}u_{ij}^2+(L+1)\tau\cdot\tau h\sum_{i=0}^{N}\sum_{l=1}^{M-1}(\overline{\nabla}_y u_{il})^2 \tag{2.7}$$

$$h\sum_{i=0}^{N}u_{i0}^2\leqslant\frac{2}{L\tau}\cdot\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N}u_{ij}^2+(L+1)\tau\cdot\tau h\sum_{i=0}^{N}\sum_{l=0}^{M-2}(\nabla_y u_{il})^2 \tag{2.8}$$

2.3 在有限和下的 w 不等式

$$\left|\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}a_{ij}b_{ij}\right|\leqslant w\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}a_{ij}^2+\frac{1}{w}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}b_{ij}^2 \tag{2.9}$$

其中$w>0$是任意常数。

2.4 差分格式 我们对奇异摄动问题(Ⅰ)、(Ⅱ)构造如下的指数型拟合差分格式

$$\begin{aligned}L_i^{h,\tau}\phi_{ij}\equiv&-\varepsilon^2(\sigma_1(j)\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2(i)\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi_{ij}+a_{ij}\sigma_1(j)\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\\&+b_{ij}\sigma_2(i)\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}+c_{ij}\sigma_1^{\frac{1}{2}}(j)\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+d_{ij}\phi_{ij}\\=&f_{ij}\qquad(1\leqslant i\leqslant N-1,\ 1\leqslant j\leqslant M-1)\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\left.\begin{aligned}&B_1^{(0)}\phi_{ij}\equiv\overline{\nabla}_x\phi_{0j}+k\phi_{0j}=g_{0j},\ B_2^{(0)}\phi_{ij}\equiv-\overline{\nabla}_x\phi_{Nj}+k\phi_{Nj}=g_{Nj}\qquad(0\leqslant j\leqslant M)\\&B_3^{(0)}\phi_{ij}\equiv\overline{\nabla}_y\phi_{i0}+k\phi_{i0}=g_{i0},\ B_4^{(0)}\phi_{ij}\equiv-\overline{\nabla}_y\phi_{iM}+k\phi_{iM}=g_{iM}\qquad(0\leqslant i\leqslant N)\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}&B^{(1)}\phi_{ij}\equiv(\sigma_1(j)\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2(i)\nabla_y\overline{\nabla}_y)\phi_{ij}=h_{ij}\\&(i=0\text{ 或}N,\ j=\overline{0,M-1};\ j=0\text{ 或}M,\ i=\overline{0,N-1})\end{aligned} \tag{2.12}$$

这里

$$\sigma_1(j)=(\rho_1\sqrt{a_{0j}}/\sinh(\rho_1\sqrt{a_{0j}}))^2,\ \rho_1=h/\varepsilon$$

$$\sigma_2(i)=(\rho_2\sqrt{b_{i0}}/\sinh(\rho_2\sqrt{b_{i0}}))^2,\ \rho_2=\tau/\varepsilon$$

为简便起见，记

$$M^{h,\tau}=\sigma_1(j)\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2(i)\nabla_y\overline{\nabla}_y$$

$$\{v_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N}=v_{Nj}+v_{0j}$$

$$w^{h,\tau}=\{(ih,j\tau):h=\alpha/N,\ \tau=\beta/M,\ i=-1,\cdots,N+1,j=-1,\cdots,M\}$$

$$\|v_{ij}\|=\left(\tau h\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M}v_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

引理2 当h，τ量级相同时，有

$$(\overline{\nabla}_y\sigma_1(j))^2\sigma_2/\sigma_1^2,\ (\overline{\nabla}_x\sigma_2(i))^2\sigma_1/\sigma_2^2,\ \overline{\nabla}_y(\sigma_1\sigma_2)/\sigma_1,\ \overline{\nabla}_y(\sigma_1\sigma_2)/\sigma_2,$$
$$\overline{\nabla}_x(\sigma_1\sigma_2)/\sigma_1,\ \overline{\nabla}_x(\sigma_1\sigma_2)/\sigma_2$$

关于ε一致有界。

证明 由σ_1，σ_2的定义知

$$\begin{aligned}&\frac{(\overline{\nabla}_y\sigma_1(j))^2\sigma_2(i)}{\sigma_1^2(j)}\\&=\frac{\left(\dfrac{\rho_1^2a_{0j}\sinh^2(\rho_1\sqrt{a_{0,j-1}})-\rho_1^2a_{0,j-1}\sinh^2(\rho_1\sqrt{a_{0j}})}{\sinh^2(\rho_1\sqrt{a_{0j}})\sinh^2(\rho_1\sqrt{a_{0,j-1}})}\right)^2}{h^2(\rho_1^2a_{0j}/\sinh^2(\rho_1\sqrt{a_{0j}}))^2}\cdot\frac{\rho_2^2b_{i0}}{\sinh^2(\rho_2\sqrt{b_{i0}})}\\&=\left(\frac{a_{0j}\sinh^2(\rho_1\sqrt{a_{0,j-1}})-a_{0,j-1}\sinh^2(\rho_1\sqrt{a_{0j}})}{ha_{0j}\sinh^2(\rho_1\sqrt{a_{0,j-1}})}\right)^2\cdot\frac{\rho_2^2b_{i0}}{\sinh^2(\rho_2\sqrt{b_{i0}})}\end{aligned}$$

(i) 当ρ_1，$\rho_2\to0$时，由Taylor展式易知

$$(\overline{\nabla}_y\sigma_1(j))^2\sigma_2/\sigma_1^2\leqslant M_1$$

(ii) 当ρ_1，$\rho_2\to\infty$时

$$\frac{(\overline{\nabla}_y\sigma_1(j))^2\sigma_2}{\sigma_1^2}\approx\left(\frac{a_{0j}\exp[2\rho_1\sqrt{a_{0,j-1}}]-a_{0,j-1}\exp[2\rho_1\sqrt{a_{0j}}]}{ha_{0j}\exp[2\rho_1\sqrt{a_{0,j-1}}]}\right)^2\cdot\frac{\rho_2^2b_{i0}}{\exp[2\rho_2\sqrt{b_{i0}}]}$$

$$=\left(\frac{a_{0j}-a_{0,j-1}\exp[2\rho_1(\sqrt{a_{0j}}-\sqrt{a_{0,j-1}})]}{ha_{0j}}\right)^2\frac{\rho_2^2 b_{i0}}{\exp[2\rho_2\sqrt{b_{i0}}]}\leqslant M_2$$

(iii) 当$0<\underline{\rho}\leqslant\rho_1$，$\rho_2\leqslant\bar{\rho}<\infty$时，显然有

$$M_3\leqslant(\overline{\nabla}_y\sigma_1(j))^2\sigma_2/\sigma_1^2\leqslant M_4$$

由于M_1，M_2，M_3和M_4均与ε无关，因此$(\overline{\nabla}_y\sigma_1(j))^2\sigma_2/\sigma_1^2$关于$\varepsilon$一致有界。

同理可证得另外几个关系式关于ε的一致有界性。

引理3 若ϕ_{ij}为定义在$w^{h,\tau}$上的网格函数，且满足条件(2.12)，则有

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}((\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij})^2)$$

$$+\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{2}(\sigma_1\sigma_2)(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$\leqslant\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}((M^{h,\tau})^2\phi_{ij})^2+C_1\tau h\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=0}^{N-1}\sigma_1(\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+C_2\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_2(\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij})^2+K$$

这里及以后记

$$K=h\sum_{i=0}^{N-1}\{(\overline{\nabla}_xh_{ij})^2+(\nabla_x\overline{\nabla}_xh_{ij})^2\}_{j=0}^{j=M}+\tau\sum_{j=0}^{M-1}\{(\overline{\nabla}_yh_{ij})^2+(\nabla_y\overline{\nabla}_yh_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}$$

证明 直接推算有等式

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}((M^{h,\tau})^2\phi_{ij})^2=\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij})^2]$$

$$+2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\sigma_2\nabla_x\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij}\tag{2.13}$$

利用分部求和或Green公式(2.2)和边界条件(2.12)，我们有

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\sigma_2\nabla_x\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij}$$

$$=-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij})$$

$$+\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}$$

$$=\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\overline{\nabla}_y(\sigma_1\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij})\cdot\overline{\nabla}_x(\sigma_2\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij})$$

$$-h\sum_{i=1}^{N}\sigma_1\nabla_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\nabla_x(\sigma_2\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij})+\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\nabla_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_2\nabla_y\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}$$

$$=-h\sum_{i=1}^{N}\sigma_1\nabla_x h_{ij}\cdot\nabla_x(\sigma_2(i)\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij})\Big|_{j=0}^{j=M}+\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Big[\sigma_1\sigma_2(\nabla_x\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+(\nabla_y\sigma_1(j))\nabla_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_2\nabla_x\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}+(\nabla_x\sigma_2)\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_1\nabla_x\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}$$

$$+(\nabla_x\sigma_2(i))\cdot(\nabla_y\sigma_1)\nabla_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\Big]+\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\nabla_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_2\nabla_y\nabla_y h_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}$$

即

$$\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1\sigma_2(\nabla_x\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\sigma_2\nabla_x\nabla_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\nabla_y\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}$$

$$=-h\sum_{i=1}^{N}\sigma_1\nabla_x h_{ij}\cdot\nabla_x(\sigma_2\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij})\Big|_{j=0}^{j=M}$$

$$+\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}[(\nabla_y\sigma_1)\nabla_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_2\nabla_x\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}$$

$$+(\nabla_x\sigma_2)\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_1\nabla_x\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}+(\nabla_x\sigma_2)\cdot(\nabla_y\sigma_1)\nabla_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}]$$

$$+\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\nabla_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_2\nabla_y\nabla_y h_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}\tag{2.14}$$

我们知道

$$h\sum_{i=1}^{N}\sigma_1\nabla_x h_{ij}\cdot\nabla_x(\sigma_2\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij})\Big|_{j=0}^{j=M}$$

$$=\sigma_1\nabla_x h_{ij}\cdot\sigma_2\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}\Big|_{i=0}^{i=N}-h\sum_{i=0}^{N-1}\nabla_x(\sigma_1\nabla_x h_{ij})\cdot\sigma_2\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}$$

$$=\sigma_1\nabla_x h_{ij}\cdot\sigma_2\nabla_y h_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}\Big|_{i=0}^{i=N}-h\sum_{i=0}^{N-1}\nabla_x(\sigma_1\nabla_x h_{ij})\cdot\sigma_2\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}\tag{2.15}$$

所以由引理 1 及边界条件(2.12)得

$$\Big|h\sum_{i=1}^{N}\sigma_1\nabla_x h_{ij}\cdot\nabla_x(\sigma_2\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij})\Big|_{j=0}^{j=M}\Big|$$

$$=\Big|\sigma_1\nabla_x h_{ij}\cdot\sigma_2\nabla_y h_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}\Big|_{i=0}^{i=N}-h\sum_{i=0}^{N-1}\nabla_x(\sigma_1\nabla_x h_{ij})\sigma_2\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}\Big|$$

$$=\Big|\sigma_1\sigma_2\nabla_x h_{ij}\cdot\nabla_y h_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}\Big|_{i=0}^{i=N}-h\sum_{i=0}^{N-1}\sigma_1\nabla_x\nabla_x h_{ij}\cdot\sigma_2\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}\Big|$$

$$\leqslant\left|\sigma_1\sigma_2\overline{\nabla}_x h_{ij}\cdot\overline{\nabla}_y h_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}\Big|_{i=0}^{i=N}\right|+h\sum_{i=0}^{N-1}\left\{(\nabla_x\overline{\nabla}_x h_{ij})^2\right\}_{j=0}^{j=M}+h\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\sigma_2(\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2\right\}_{j=0}^{j=M}$$

$$\leqslant C_1K+h\sum_{i=1}^{N-1}\{\sigma_2(\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2\}_{j=0}^{j=M}$$

$$\leqslant C_1K+C_2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+C_3\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}(\sigma_2\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2 \qquad (2.16a)$$

其中C_1，C_2，C_3是任意正常数。

同理，

$$\left|\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y h_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}\right|$$

$$\leqslant C_1K+C_2\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+C_3\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=1}^{N}(\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2 \qquad (2.16b)$$

另外，由不等式(2.9)及引理3，知

$$\left|\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(\overline{\nabla}_y\sigma_1)\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\sigma_2\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\right|$$

$$\leqslant C_1\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\frac{(\overline{\nabla}_y\sigma_1)^2}{\sigma_1^2}\cdot\sigma_1\sigma_2(\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+\frac{1}{C_1}\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1\sigma_2(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$\leqslant C_2\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1(\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+\frac{1}{C_1}\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1\sigma_2(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2 \qquad (2.17a)$$

同理，

$$\left|\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(\overline{\nabla}_x\sigma_2)\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_1\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\right|$$

$$\leqslant C_2\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+\frac{1}{C_1}\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1\sigma_2(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2 \qquad (2.17b)$$

$$\left|\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(\overline{\nabla}_x\sigma_2)(\overline{\nabla}_y\sigma_1)\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\right|$$

$$\leqslant C_3\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1(\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+C_4\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2 \qquad (2.17c)$$

由(2.14)，(2.16)，(2.17)，并适当地选择C_1，C_2，我们有

$$\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1\sigma_2(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\sigma_2\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}$$

$$\leqslant\left|\left[h\sum_{i=1}^{N}\sigma_1\overline{\nabla}_x h_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x(\sigma_2\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})\right]_{j=0}^{j=M}\right|$$

$$+\left|\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}[(\overline{\nabla}_y\sigma_1)\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_2\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\right.$$

$$\left.+(\overline{\nabla}_x\sigma_2)\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_1\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}+(\overline{\nabla}_x\sigma_2)\cdot(\overline{\nabla}_y\sigma_1)\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}]\right|$$

$$+\left|\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y h_{ij}\right|_{i=0}^{i=N}$$

$$\leqslant C_1K+C_2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2]$$

$$+C_3\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\nabla_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+C_4\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=1}^{N}\sigma_1(\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+C_5\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1\sigma_2(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2 \tag{2.18}$$

由于C_5可以任意选取，不妨假设$C_5=1/2$，再利用σ_1，σ_2的有界性，不难得．

$$\frac{1}{2}\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1\sigma_2(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\sigma_2\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}$$

$$\leqslant C_1K+C_2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2]$$

$$+C_3\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+C_4\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1(\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2 \tag{2.19}$$

由(2.13)和(2.19)不难得出引理3的结论．

引理4 若ϕ_{ij}为定义在$w^{h,\tau}$上的网格函数，且满足条件(2.12)，则有

$$\left.\begin{aligned}&\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1(\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2\leqslant C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2\\&\qquad+C_2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+K\\&\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2\leqslant C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2\\&\qquad+C_2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+K\end{aligned}\right\}, \tag{2.20}$$

这里C_1，C_2是任意正常数，K如前面所定义．

证明 由(2.12)，w不等式(2.9)及引理1，我们有

$$\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1(\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2=\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot M^{h,\tau}\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}$$

$$-\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}\nabla_x(\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})\cdot M^{h,\tau}\phi_{ij}$$

$$=\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot h_{ij}-\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot M^{h,\tau}\phi_{ij}$$

$$\leqslant C_1\tau\sum_{j=0}^{M-1}\{h_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N}+C_2\tau\sum_{j=0}^{M-1}\{(\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}$$

$$+C_3\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+C_4\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$\leqslant C_1\tau\sum_{j=0}^{M-1}\{h_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N}+C_5\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+C_6\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}(\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+C_3\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+C_4\tau h\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$=C_1\tau\sum_{j=0}^{M-1}\{h_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N}+C_7\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+C_6\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}\sigma_1^2(\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+C_4\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

适当地选择正常数，并利用σ_1关于ε的一致有界性，即可证得引理4的第一个结论。同理可证得第二个不等式。

引理5 设ϕ_{ij}是定义在$w^{h,\tau}$上的网格函数，ϕ_{ij}是离散边值问题(2.10)～(2.12)的解，则有以下的不等式

$$\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=1}^{N}\sigma_1(\varepsilon\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\varepsilon\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+C_3\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2]$$

$$\leqslant C_4\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]$$

$$+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}f_{ij}^2+K\max(\varepsilon,h,\tau)$$

证明 以$M^{h,\tau}\phi_{ij}$乘方程(2.10)的两端并求和$\tau h\sum\limits_{i=0}^{N-1}\sum\limits_{j=0}^{M-1}$，我们有

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[-\varepsilon^2(M^{h,\tau})^2\phi_{ij}+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}$$

$$+c_{ij}\sigma_1^{\frac{1}{2}}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+d_{ij}\phi_{ij}]M^{h,\tau}\phi_{ij}=\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}f_{ij}M^{h,\tau}\phi_{ij} \tag{2.21}$$

现在我们对上面等式的每一项进行估计，先考虑左端的第一项

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2(M^{h,\tau})^2\phi_{ij}\cdot M^{h,\tau}\phi_{ij}=\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot M^{h,\tau}\phi_{ij}$$

$$+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot M^{h,\tau}\phi_{ij})$$

$$=\tau\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2(\sigma_1\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij})M^{h,\tau}\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2\sigma_1(\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+h\sum_{i=0}^{N-1}\varepsilon^2(\sigma_2\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij})M^{h,\tau}\phi_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\varepsilon^2\sigma_2(\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$=\tau\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2\sigma_1\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot h_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2\sigma_1(\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+h\sum_{i=0}^{N-1}\varepsilon^2\sigma_2\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot h_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\varepsilon^2\sigma_2(\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij})^2 \tag{2.22}$$

由w不等式(2.9)及引理1，我们有

$$\left|\tau\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2\sigma_1\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot h_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}\right|$$

$$\leqslant C_1\tau\sum_{j=0}^{M-1}\{(\varepsilon^2\sigma_1\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}+\frac{1}{C_1}\tau\sum_{j=0}^{M-1}\{h_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N}$$

$$=(L+1)hC_1\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}(\varepsilon^2\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+\frac{C_1}{Lh}\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}(\varepsilon^2\sigma_1\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij})^2+\frac{1}{C_1}\tau\sum_{j=0}^{M-1}\{h_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N} \tag{2.23}$$

我们取$1/C_1=C_2\max(\varepsilon,h)$. 若$\varepsilon\leqslant h$时，令$L=1$，i.e.$Lh=h$；若$h\leqslant\varepsilon$时，选取$L$，使得$Lh\leqslant\varepsilon\leqslant(L+1)h$，则由(2.23)得

$$\left|\tau\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot h_{ij}\right|_{i=0}^{i=N}\leqslant C_2\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}(\varepsilon^2\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+C_2\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+C_3K\cdot\max(\varepsilon,h) \tag{2.24}$$

这里C_2，C_3是任意正常数。

将引理4的估计式代入引理3，得

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2]+\frac{1}{2}\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1\sigma_2(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$\leqslant\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}((M^{h,\tau})^2\phi_{ij})^2+C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+K \tag{2.25a}$$

$$\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1(\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2\leqslant C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}((M^{h,\tau})^2\phi_{ij})^2$$

$$+C_2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+K \tag{2.25b}$$

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2\leqslant C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}((M^{h,\tau})^2\phi_{ij})^2$$

$$+C_2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+K \tag{2.25c}$$

所以，由(2.25a)利用方程(2.10)得到

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(\varepsilon^2\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+(\varepsilon^2\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2]$$

$$+\frac{1}{2}\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1\sigma_2(\varepsilon^2\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$\leqslant\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(\varepsilon^2(M^{h,\tau})^2\phi_{ij})^2+C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+\varepsilon^4K$$

$$\leqslant\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]$$

$$+\varepsilon^4K+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}f_{ij}^2 \tag{2.26a}$$

由(2.25b)和(2.25c)，利用方程(2.10)分别得到

$$\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1(\varepsilon^2\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2\leqslant C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2$$

$$+\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]+\varepsilon^4K+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}f_{ij}^2 \tag{2.26b}$$

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\varepsilon^2\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2\leqslant C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2$$

$$+\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]+\varepsilon^4K+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}f_{ij}^2 \tag{2.26c}$$

由(2.24)和(2.26)得(2.22)右端的第一项估计

$$\left|\tau\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot h_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}\right|\leqslant C_2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2$$

$$+\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]+C_3\cdot\max(h,\varepsilon)K+C_4\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}f_{ij}^2 \tag{2.27}$$

类似地，我们可得到(2.22)右端第三项的估计

$$\left|h\sum_{i=0}^{N-1}\varepsilon^2\sigma_2\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot h_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}\right|\leqslant C_2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2$$

$$+\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]+C_3\max(\tau,\varepsilon)K+C_4\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}f_{ij}^2 \tag{2.28}$$

于是由(2.22)，(2.27)，(2.28)，我们有

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}\varepsilon^2(M^{h,\tau})^2\phi_{ij}\cdot M^{h,\tau}\phi_{ij}+\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=1}^{N}\sigma_1(\varepsilon\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\varepsilon\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$\leqslant C_2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]$$

$$+C_2K\max(\varepsilon,h,\tau)+C_3\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}f_{ij}^2 \tag{2.29}$$

现讨论(2.21)左端的二、三两项，经过简单运算有下面等式成立：

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})M^{h,\tau}\phi_{ij}$$

$$=\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(a_{ij}\sigma_1^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+b_{ij}\sigma_2^2(\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2)$$

$$+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(a_{ij}\sigma_1\sigma_2+b_{ij}\sigma_1\sigma_2)\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij} \tag{2.30}$$

令$\chi_{ij}=(a_{ij}+b_{ij})\sigma_1\sigma_2$。我们来估计上式右端的最后一个和式

$$\tau h\sum_{i=0}^{i-1}\sum_{j=0}^{M-1}\chi_{ij}\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}$$

$$=\tau\sum_{j=0}^{M-1}\chi_{ij}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}[\overline{\nabla}_x(\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\cdot\chi_{ij})]\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}$$

$$=\tau\sum_{j=0}^{M-1}\chi_{ij}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}(\overline{\nabla}_x\chi_{ij})\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}$$

$$-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\chi_{i-1,j}\nabla_x\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij} \tag{2.31}$$

由边界条件(2.11)，上式右端的第一项可改写为

$$\tau\sum_{j=0}^{M-1}\chi_{ij}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}=k\tau\sum_{j=0}^{M-1}\{\chi_{ij}\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\}_{i=0}^{i=N}-\tau\sum_{j=0}^{M-1}\{\chi_{ij}g_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\}_{i=0}^{i=N}$$

$$=\{k\chi_{ij}\phi_{ij}\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\}_{i=0}^{i=N}\Big|_{j=0}^{j=M}-k\tau\sum_{j=1}^{M}\{(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})\cdot\overline{\nabla}_y(\chi_{ij}\phi_{ij})\}_{i=0}^{i=N}$$

$$+\{\chi_{ij}g_{ij}\cdot\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\}_{i=0}^{i=N}\Big|_{j=0}^{j=M}+\tau\sum_{j=1}^{M}\{\overline{\nabla}_y(\chi_{ij}g_{ij})\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\}_{i=0}^{i=N}$$

$$=\{\{k\chi_{ij}\cdot\phi_{ij}k\phi_{ij}\}_{i=0}^{i=N}\}_{j=0}^{j=M}-\{\{k\chi_{ij}\phi_{ij}g_{ij}\}_{i=0}^{i=N}\}_{j=0}^{j=M}$$

$$-k\tau\sum_{j=1}^{M}\{(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})\cdot\overline{\nabla}_y(\chi_{ij}\phi_{ij})\}_{i=0}^{i=N}$$

$$-\{\{\chi_{ij}g_{ij}\cdot(k\phi_{ij}\cdot g_{ij})\}_{j=0}^{j=M}\}_{i=0}^{i=N}+\tau\sum_{j=1}^{M}\{\overline{\nabla}_y(\chi_{ij}g_{ij})\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\}_{i=0}^{i=N} \tag{2.32}$$

现对上式右端的项作出估计，先讨论第三项。因为

$$k\tau\sum_{j=1}^{M}\{(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})\overline{\nabla}_y(\chi_{ij}\phi_{ij})\}_{i=0}^{i=N}$$

$$=k\tau\sum_{j=1}^{M}\{(\overline{\nabla}_y\chi_{ij})\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\}_{i=0}^{i=N}+k\tau\sum_{j=1}^{M}\{\chi_{i,j-1}(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}$$

所以，

$$k\tau\sum_{j=1}^{M}\{(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})\cdot\overline{\nabla}_y(\chi_{ij}\phi_{ij})\}_{i=0}^{i=N}-k\tau\sum_{j=1}^{M}\{\chi_{i,j-1}(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}$$

$$=k\tau\sum_{j=1}^{M}\{(\nabla_y\chi_{ij})\phi_{ij}\cdot\nabla_y\phi_{ij}\}_{i=0}^{i=N}$$

$$\leqslant\frac{1}{w_1}\tau\sum_{j=1}^{M}\frac{(\nabla_y\chi_{ij})^2}{\chi_{i,j-1}}\{\phi_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N}+w_1\tau\sum_{j=1}^{M}\{\chi_{i,j-1}(\nabla_y\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N} \tag{2.33}$$

由引理2，我们知

$$(\nabla_y\chi_{ij})^2/\chi_{i,j-1}\leqslant C_1\sigma_1(j)$$

故由(2.33)不难得

$$k\tau\sum_{j=1}^{M}\{(\nabla_y\phi_{ij})\nabla_y(\chi_{ij}\phi_{ij})\}_{i=0}^{i=N}-k\tau\sum_{j=1}^{M}\{\chi_{i,j-1}(\nabla_y\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}$$

$$\leqslant\frac{1}{w_1}\tau\sum_{j=1}^{M}C_1\sigma_1\{\phi_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N}+w_1\tau\sum_{j=1}^{M}\{\chi_{i,j-1}(\nabla_y\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}$$

适当地选取w_1，并利用引理1，得

$$k\tau\sum_{j=1}^{M}\{(\nabla_y\phi_{ij})\cdot\nabla_y(\chi_{ij}\phi_{ij})\}_{i=0}^{i=N}+C_2\tau\sum_{j=1}^{M}\{\chi_{i,j-1}(\nabla_y\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}$$

$$\leqslant C_3\tau\sum_{j=1}^{M}\sigma_1\{\phi_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N}\leqslant C_4\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}[\sigma_1(\nabla_x\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]$$

从而有

$$k\tau\sum_{j=1}^{M}\{(\nabla_y\phi_{ij})\cdot\nabla_y(\chi_{ij}\phi_{ij})\}_{i=0}^{i=N}+C_1\tau\sum_{j=1}^{M}\{\chi_{i,j-1}(\nabla_y\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}$$

$$\leqslant C_4\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(\sigma_1(\nabla_x\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2) \tag{2.34}$$

由不等式(2.9)知(2.32)右端的最后两项满足不等式

$$\{\{\chi_{ij}g_{ij}\cdot(k\phi_{ij}+g_{ij})\}_{i=0}^{i=N}\}_{j=0}^{j=M}-\tau\sum_{j=1}^{M}\{\nabla_y(\chi_{ij}g_{ij})\nabla_y\phi_{ij}\}_{i=0}^{i=N}$$

$$\leqslant C_1\{\{\chi_{ij}\phi_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N}\}_{j=0}^{j=M}+C_2\{\{g_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N}\}_{j=0}^{j=M}$$

$$+C_3\tau\sum_{j=1}^{M}\{\chi_{ij}(\nabla_y\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}+C_4\tau\sum_{j=1}^{M}\{g_{ij}^2+(\nabla_y g_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N} \tag{2.35}$$

由不等式$|uv|\leqslant w_1|u|^2+(1/w_1)|v|^2$得到(2.32)右端第二项估计

$$|\{\{k\chi_{ij}\phi_{ij}g_{ij}\}_{i=0}^{i=N}\}_{j=0}^{j=M}|$$

$$\leqslant w_2\{\{g_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N}\}_{j=0}^{j=M}+(1/w_2)\{\{(\chi_{ij}\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}\}_{j=0}^{j=M} \tag{2.36}$$

其中w_2是任意正常数．

将(2.34)，(2.35)和(2.36)代入(2.32)，得

$$-\tau\sum_{j=0}^{M}\chi_{ij}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}+C_1\{\{\chi_{ij}\phi_{ij}^2\}_{i=0}^{i=N}\}_{j=0}^{j=M}+C_2\tau\sum_{j=1}^{M}\{\chi_{i,j-1}(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}$$

$$\leqslant C_3\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2)+C_4K \tag{2.37}$$

这里及以后记

$$K=\tau\sum_{j=0}^{M}\{g_{ij}^2+(\overline{\nabla}_y g_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}+h\sum_{i=0}^{N}\{g_{ij}^2+(\overline{\nabla}_x g_{ij})^2\}_{j=0}^{j=M}$$

利用分部求和法，(2.31)右端的第三项可改写为

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\chi_{i-1,j}\overline{\nabla}_x\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}=\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\chi_{i-1,j}\nabla_y(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij})\overline{\nabla}_x\phi_{ij}$$

$$=h\sum_{i=1}^{N}\chi_{i-1,j}\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}-\tau h\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_y(\chi_{i-1,j}\overline{\nabla}_x\phi_{ij})$$

$$=h\sum_{i=1}^{N}\chi_{i-1,j}\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(\overline{\nabla}_y\chi_{i-1,j})\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij}$$

$$-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\chi_{i-1,j-1}(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2 \tag{2.38}$$

由边界条件(2.11)，我们将上式右端的第一项写为

$$h\sum_{i=1}^{N}\chi_{i-1,j}\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}|_{j=0}^{j=M}=h\sum_{i=1}^{N}\{\chi_{i-1,j}\overline{\nabla}_x(k\phi_{ij}-g_{ij})\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\}_{j=0}^{j=M}$$

$$=kh\sum_{i=1}^{N}\{\chi_{i-1,j}(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2\}_{j=0}^{j=M}-h\sum_{i=1}^{N}\{\chi_{i-1,j}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x g_{ij}\}_{j=0}^{j=M}$$

从而有

$$\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\chi_{i-1,j}\overline{\nabla}_x\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}-kh\sum_{i=1}^{N}\{\chi_{i-1,j}(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2\}_{j=1}^{j=M}$$

$$+\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\chi_{i-1,j-1}(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2$$

$$=-h\sum_{i=1}^{N}\{\chi_{i-1,j}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x g_{ij}\}_{j=0}^{j=M}-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(\overline{\nabla}_y\chi_{i-1,j})\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij}$$

$$\leqslant C_1h\sum_{i=1}^{N}\{\chi_{ij}(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2\}_{j=1}^{j=M}+C_2\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\chi_{ij}(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2$$

$$+C_3\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\chi_{ij}(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+C_4h\sum_{i=1}^{N}\{(\overline{\nabla}_x g_{ij})^2\}_{j=0}^{j=M}$$

适当地选取C_1,C_2，得

$$\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\chi_{i-1,j}\overline{\nabla}_x\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}$$

$$+C_6h\sum_{i=1}^{N}\{\chi_{ij}(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2\}_{j=0}^{j=M}+C_8\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\chi_{ij}(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2$$

$$\leqslant C_3\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+C_4h\sum_{i=1}^{N}\{(\overline{\nabla}_x g_{ij})^2\}_{j=1}^{j=M} \tag{2.39}$$

利用分部求和及边界条件(2.11)将(2.31)式的第二项改写为

$$\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}(\overline{\nabla}_x\chi_{ij})\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}$$

$$=h\sum_{i=1}^{N}(\overline{\nabla}_x\chi_{ij})\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_y\phi_{ij}|_{j=0}^{j=M}-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_y(\overline{\nabla}_x\chi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij})$$

$$=h\sum_{i=1}^{N}\overline{\nabla}_x\chi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}(k\phi_{ij}-g_{ij})|_{j=0}^{j=M}-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\chi_{ij})\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\overline{\nabla}_y\phi_{ij}$$

$$-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(\overline{\nabla}_x\chi_{i,j-1})\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij} \tag{2.40}$$

所以由(2.31)，(2.37)，(2.39)和(2.40)，我们有

$$-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}\chi_{ij}\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}+\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\chi_{i-1,j-1}(\overline{\nabla}_x\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2$$

$$+C_1\{\{\phi_{ij}^2\}_{i=1}^{i=N}\}_{j=1}^{j=M}+C_2\tau\sum_{j=1}^{M}\{\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2\}_{i=0}^{i=N}+C_8h\sum_{i=1}^{N}\{\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2\}_{j=0}^{j=M}$$

$$\leqslant C_4\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}[\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]+C_7K \tag{2.41}$$

由(2.22)，(2.29)，(2.30)，(2.37)和(2.41)，得

$$\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=1}^{N}\sigma_1(\varepsilon\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij})^2+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\varepsilon\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[\sigma_1^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2^2(\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2]$$

$$\leqslant 1-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(c_{ij}\sigma_1^{1/2}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+d_{ij}\phi_{ij}-f_{ij})\cdot M^{h,\tau}\phi_{ij}$$

$$+K\max(\varepsilon,h,\tau)+C_2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[\sigma_1^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2^2(\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2$$

$$+\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]$$

利用C_2的任意性，即得

$$\tau h\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{i=1}^{N}\sigma_1(\varepsilon\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij})^2+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\varepsilon\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$+C_3\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[\sigma_1^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2^2(\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2]$$

$$\leqslant C_4\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}f_{ij}^2+K\max(h,\tau,\varepsilon)$$

于是引理 5 得证。

现在对差分问题(2.10)，(2.11)和(2.12)的解作出先验估计。将方程(2.10)的两端同乘以ϕ_{ij}，并求和 $\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}$，我们有

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[-\varepsilon^2(M^{h,\tau})^2\phi_{ij}+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}$$

$$+c_{ij}\sigma_1^{1/2}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+d_{ij}\phi_{ij}]\phi_{ij}=\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}f_{ij}\phi_{ij}\tag{2.42}$$

上式左端的第一项可改写为

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[(M^{h,\tau})^2\phi_{ij}]\phi_{ij}$$

$$=\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_yM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}\tag{2.43}$$

利用分部求和及边界条件(2.12)，得到

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}$$

$$=\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}-\tau h\sum_{i=1}^{N}\sigma_1\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}$$

$$=\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}-\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}$$

$$+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}=\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\overline{\nabla}_xM^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}$$

$$-\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1 h_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij} \tag{2.44}$$

同理，

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}=h\sum_{i=0}^{N-1}\sigma_1\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}$$

$$-h\sum_{i=0}^{N-1}h_{ij}\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}M^{h,\tau}\phi_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij} \tag{2.45}$$

因此，

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2[(M^{h,\tau})^2\phi_{ij}]\phi_{ij}=\varepsilon^2\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}$$

$$-\varepsilon^2 h\sum_{i=0}^{N-1}\sigma_2\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}-\varepsilon^2\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1 h_{ij}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}$$

$$-\varepsilon^2 h\sum_{i=0}^{N-1}\sigma_2 h_{ij}\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2 \tag{2.46}$$

现对上式右端的第一、二项作出估计，利用(2.9)及引理1有

$$\Big|\varepsilon^2\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}\Big|\leqslant C\Big[\tau\sum_{j=0}^{M-1}\{(\sigma_1\varepsilon^2\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij})^2\}\Big|_{i=0}^{i=N}\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C\Big\{(L+1)h\cdot\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}[\sigma_1\varepsilon^2\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}+\sigma_1\varepsilon^2\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\overline{\nabla}_x\phi_{ij}]^2$$

$$+\frac{1}{Lh}\cdot\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(\sigma_1\varepsilon^2\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij})^2\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C_1((L+1)h)^{\frac{1}{2}}\cdot\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[C_2(\varepsilon^2\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+\frac{1}{C_2}\phi_{ij}^2$$

$$+C_3\sigma_1(\varepsilon^2\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+\frac{1}{C_3}\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2$$

$$+C_1\Big(\frac{1}{Lh}\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\Big(C_4(\sigma_1\varepsilon^2\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+\frac{1}{C_4}\phi_{ij}^2\Big)$$

我们选择$C_4=1/\varepsilon$，利用引理 5 和(2.26)，得

$$\Big|\varepsilon^2\tau\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1\overline{\nabla}_x M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}\Big|\leqslant C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2$$

$$+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]+K\max(h,\varepsilon) \tag{2.47a}$$

这里C_1是任意正常数。

同理，

$$|\varepsilon^2 h\sum_{i=0}^{N-1}\sigma_2\overline{\nabla}_y M^{h,\tau}\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}|_{j=0}^{j=M}|\leqslant C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2$$

$$+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]+K\max(\tau,\varepsilon) \qquad (2.47b)$$

由(2.46)，(2.47)，并利用引理5，得

$$-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2(M^{h,\tau})^2\phi_{ij}\phi_{ij}+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$\leqslant C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}[\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]+K\max(h,\tau,\varepsilon)$$

$$+|\varepsilon^2 h\sum_{i=0}^{N-1}h_{ij}\sigma_2\overline{\nabla}_y\phi_{ij}|_{j=0}^{j=M}|+|\varepsilon^2\tau\sum_{j=0}^{M-1}h_{ij}\sigma_1\overline{\nabla}_x\phi_{ij}|_{i=0}^{i=N}|$$

$$\leqslant C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2+\max(h,\tau,\varepsilon)K)$$

$$+\varepsilon^2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2)$$

$$+\varepsilon^2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+(\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2)+\varepsilon^2 K$$

$$\leqslant C_2\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2)+\max(\varepsilon,h,\tau)K$$

i.e.

$$-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2(M^{h,\tau})^2\phi_{ij}\phi_{ij}+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2$$

$$\leqslant C_1\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}[\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\phi_{ij}^2]+K\max(h,\tau,\varepsilon) \qquad (2.48)$$

此外，(2.42)中的其余项

$$-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}+c_{ij}\sigma_1^{1/2}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+d_{ij}\phi_{ij})\phi_{ij}$$

$$=-\tau\sum_{j=0}^{M-1}a_{ij}\sigma_1\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}|_{i=0}^{i=N}+\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})\cdot\overline{\nabla}_x(a_{ij}\phi_{ij})$$

$$-h\sum_{i=0}^{N-1}b_{ij}\sigma_2\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}|_{j=0}^{j=M}+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})\cdot\overline{\nabla}_y(b_{ij}\phi_{ij})$$

$$-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}c_{ij}\sigma_1^{1/2}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}d_{ij}\phi_{ij}^2$$

$$=\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}a_{i-1,j}\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}b_{i,j-1}\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2$$

$$+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(\overline{\nabla}_x a_{ij})\sigma_1\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}-\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}c_{ij}\sigma_1^{1/2}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}$$

$$+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}(\overline{\nabla}_y b_{ij})\sigma_2\phi_{ij}\overline{\nabla}_y\phi_{ij}-\tau\sum_{j=0}^{M-1}a_{ij}\sigma_1\overline{\nabla}_x\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}\Big|_{i=0}^{i=N}$$

$$-h\sum_{i=0}^{N-1}b_{ij}\sigma_2\overline{\nabla}_y\phi_{ij}\cdot\phi_{ij}\Big|_{j=0}^{j=M}$$

利用引理 1 及不等式(2.9)，我们有

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}(a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi_{ij}+c_{ij}\sigma_1^{1/2}\overline{\nabla}_x\phi_{ij}+d_{ij}\phi_{ij})\phi_{ij}$$

$$+\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}a_{i-1,j}\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}b_{i,j-1}(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\phi_{ij}^2$$

$$\leqslant C_1\tau\sum_{j=1}^{M-1}\{g_{ij}^2\}\Big|_{i=0}^{i=N}+C_2h\sum_{i=0}^{N-1}\{g_{ij}^2\}\Big|_{j=0}^{j=M}\leqslant C_3K \tag{2.49}$$

因此，综合(2.42)，(2.48)，(2.49)，我们得

$$\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\varepsilon^2(M^{h,\tau}\phi_{ij})^2+\tau h\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{M-1}\sigma_1(\overline{\nabla}_x\phi_{ij})^2$$

$$+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\sigma_2(\overline{\nabla}_y\phi_{ij})^2+\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\phi_{ij}^2$$

$$\leqslant C_1\tau h\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}f_{ij}^2+C_2K+K\max(h^2,\tau^2,\varepsilon^2) \tag{2.50}$$

定理1 设ϕ_{ij}是差分问题(2.10)～(2.12)的解，则有能量估计式(2.50)成立。

三、误 差 估 计

为了讨论误差估计，我们首先给出拟合因子σ_1，σ_2的性质

$$|\sigma_s-1|\leqslant C\rho_s^2 \qquad (s=1,\ 2) \tag{i}$$

$$0\leqslant\sigma_s\leqslant M \qquad (s=1,\ 2) \tag{ii}$$

这里M是与h,τ,ε无关的正常数.

$$|\sigma_s^{1/2}-1|\leqslant C\rho_s \qquad (s=1,\ 2) \tag{iii}$$

$$|\sigma_1\sigma_2-1|=|[(\sigma_1-1)(\sigma_2+1)+(\sigma_1+1)(\sigma_2-1)]/2|\leqslant C(\rho_1^2+\rho_2^2) \tag{iv}$$

这些性质由σ_1和σ_2的表达式很容易证明。

下面我们来估计误差。令$e_{ij}=\phi_{ij}-\phi(x_i,y_j)$，则有

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon^{h,\tau}e_{ij}=&-\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2(\phi_{ij}-\phi(x_i,y_j))+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x(\phi_{ij}-\phi(x_i,y_j))\\
&+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y(\phi_{ij}-\phi(x_i,y_j))+c_{ij}\sigma_1^{1/2}(\phi_{ij}-\phi(x_i,y_j))+d_{ij}(\phi_{ij}-\phi(x_i,y_j))\\
=&[-\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y+c_{ij}\sigma_1^{1/2}\overline{\nabla}_x+d_{ij}]\phi_{ij}\\
&-[-\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+b_{ij}\nabla_y\overline{\nabla}_y+c_{ij}\sigma_1^{1/2}\overline{\nabla}_x+d_{ij}]\phi(x_i,y_j)\\
=&f_{ij}-[-\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi(x_i,y_j)+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j)\\
&+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi(x_i,y_j)+c_{ij}\sigma_1^{1/2}\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j)+d_{ij}\phi(x_i,y_j)]\\
=&-\varepsilon^2(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)^2\phi(x_i,y_j)+\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi(x_i,y_j)\\
&+a_{ij}\partial^2\phi(x_i,y_j)/\partial x^2-a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j)+b_{ij}\partial^2\phi(x_i,y_j)/\partial y^2\\
&-b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi(x_i,y_j)+c_{ij}\partial\phi(x_i,y_j)/\partial x-c_{ij}\sigma_1^{1/2}\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

由解的渐近展开式[1]我们知道

$$|\partial^i\phi/\partial x^i|\leqslant C_1(1+\varepsilon^{-i+2}),\quad |\partial^j\phi/\partial y^j|\leqslant C_1(1+\varepsilon^{-j+2}) \tag{*}$$

现在利用(*)进行古典估计：

由(3.1)知

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon^{h,\tau}e_{ij}=&-\varepsilon^2(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)^2\phi(x_i,y_j)+\varepsilon^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x+\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi(x_i,y_j)\\
&-\varepsilon^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x+\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi(x_i,y_j)+\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi(x_i,y_j)\\
&+a_{ij}(\partial^2\phi(x_i,y_j)/\partial x^2-\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j))+a_{ij}(1-\sigma_1)\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j)\\
&+b_{ij}(\partial^2\phi(x_i,y_j)/\partial y^2-\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi(x_i,y_j))+b_{ij}(1-\sigma_2)\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi(x_i,y_j)\\
&+c_{ij}(\partial\phi(x_i,y_j)/\partial x-\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j))+c_{ij}(1-\sigma_1^{1/2})\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

我们先来考虑(3.2)的前面四项，

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon^2(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)^2\phi(x_i,y_j)+\varepsilon^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x+\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi(x_i,y_j)\\
&\quad-\varepsilon^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x+\nabla_y\overline{\nabla}_y)\phi(x_i,y_j)+\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi(x_i,y_j)\\
=&\varepsilon^2h^2\frac{\partial^6\phi(\xi,y_j)}{\partial x^6}+\varepsilon^2\tau^2\frac{\partial^6\phi(x_i,\eta)}{\partial y^6}+\varepsilon^2\tau^2h^2\frac{\partial^8\phi(\xi_1,\eta_1)}{\partial x^4\partial y^4}\\
&+\varepsilon^2(\sigma_1-1)(\nabla_x\overline{\nabla}_x)^2\phi(x_i,y_j)+\varepsilon^2(\sigma_2-1)(\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi(x_i,y_j)\\
&+2\varepsilon^2(\sigma_1\sigma_2-1)\nabla_x\overline{\nabla}_x\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi(x_i,y_j)\\
=&\varepsilon^2h^2\frac{\partial^6\phi(\xi,y_j)}{\partial x^6}+\varepsilon^2\tau^2\frac{\partial^6\phi(x_i,\eta)}{\partial y^6}+\varepsilon^2\tau^2h^2\frac{\partial^8\phi(\xi_1,\eta_1)}{\partial x^4\partial y^4}\\
&+\varepsilon^2(\sigma_1-1)\frac{\partial^4\phi(\xi_2,y_j)}{\partial x^4}+\varepsilon^2(\sigma_2-1)\frac{\partial^4\phi(x_i,\eta_2)}{\partial y^4}+2\varepsilon^2(\sigma_1\sigma_2-1)\frac{\partial^4\phi(\xi_3,\eta_3)}{\partial x^2\partial y^2}
\end{aligned}$$

因此，由(*)及σ_1，σ_2的性质，得

$$\begin{aligned}
&|-\varepsilon^2(\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2)^2\phi(x_i,y_j)+\varepsilon^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x+\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi(x_i,y_j)\\
&\quad-\varepsilon^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x+\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi(x_i,y_j)+\varepsilon^2(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2\phi(x_i,y_j)|\\
\leqslant&\frac{h^2}{\varepsilon^2}+\frac{\tau^2}{\varepsilon^2}+\frac{\tau^2h^2}{\varepsilon^4}+\frac{h^2+\tau^2}{\varepsilon^2}=O\left(\frac{h^2+\tau^2}{\varepsilon^2}+\frac{\tau^2h^2}{\varepsilon^4}\right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.2)式后面几项的估计也不难得到：

$$\begin{aligned}
&|a_{ij}(\partial^2\phi(x_i,y_j)/\partial x^2-\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j))+a_{ij}(1-\sigma_1)\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j)\\
&\quad+b_{ij}(\partial^2\phi(x_i,y_j)/\partial y^2-\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi(x_i,y_j))+b_{ij}(1-\sigma_2)\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi(x_i,y_j)
\end{aligned}$$

$$+c_{ij}(\partial\phi(x_i,y_j)/\partial x-\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j))+c_{ij}(1-\sigma_1^{1/2})\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j)|$$
$$=O((h^2+\tau^2)/\varepsilon^2+h+\tau) \tag{3.4}$$

因此，由(3.3)，(3.4)得到

$$L_\varepsilon^{h,\tau}e_{ij}=O(h+\tau+(h^2+\tau^2)/\varepsilon^2+h^2\tau^2/\varepsilon^4) \tag{3.5}$$

下面我们来考虑边界条件的逼近

$$B_1^{(0)}e_{ij}=\overline{\nabla}_x e_{0j}+ke_{0j}=g_{0j}-(\phi(x_0,y_j)-\phi(x_{-1},y_j))/h-k\phi(x_0,y_j)$$
$$=\partial\phi(x_0,y_j)/\partial x-(\phi(x_0,y_j)-\phi(x_{-1},y_j))/h+k\phi(x_0,y_j)-k\phi(x_0,y_j)$$
$$=h\partial^2\phi(\xi,y_j)/\partial x^2$$

所以，由(*)式得

$$|B_1^{(0)}e_{ij}|=O(h) \tag{3.6a}$$

同理，

$$|B_2^{(0)}e_{ij}|=O(h) \tag{3.6b}$$
$$|B_3^{(0)}e_{ij}|=O(\tau) \tag{3.6c}$$
$$|B_4^{(0)}e_{ij}|=O(\tau) \tag{3.6d}$$

另外，

$$B^{(1)}e_{ij}=\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x e_{ij}+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y e_{ij}=h_{ij}-(\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)\phi(x_i,y_j)$$
$$=(1-\sigma_1)\nabla_x\overline{\nabla}_x\phi(x_i,y_j)+(1-\sigma_2)\nabla_y\overline{\nabla}_y\phi(x_i,y_j)$$
$$+\sigma_1h^2\partial^4\phi(\xi,y_j)/\partial x^4+\sigma_2\tau^2\partial^4\phi(x_i,\eta)/\partial y^4$$

所以，由(*)式及σ_1，σ_2的性质，我们有

$$|B^{(1)}e_{ij}|=h^2/\varepsilon^2+\tau^2/\varepsilon^2$$

由能量不等式(2.50)，得

$$\|e_{ij}\|=O\left(h+\tau+\left(\frac{h^2+\tau^2}{\varepsilon^2}\right)^2\cdot\frac{1}{h+\tau}+\frac{h^4\tau^3}{\varepsilon^8}+\frac{h^3\tau^4}{\varepsilon^8}\right) \tag{3.7}$$

现在我们转向非古典估计，考虑

$$L_\varepsilon^{h,\tau}(v_0^{(\alpha)}+v_0^{(\beta)}+v_0^{(\gamma)}+v_0^{(\delta)})=[-\varepsilon^2\sigma_1^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x)^2+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x](v_0^{(\alpha)}+v_0^{(\gamma)})$$
$$+[-\varepsilon^2\sigma_2^2(\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y](v_0^{(\beta)}+v_0^{(\delta)})+[-\varepsilon^2\sigma_1^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x)^2$$
$$+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x](v_0^{(\beta)}+v_0^{(\delta)})+[-\varepsilon^2\sigma_2^2(\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y](v_0^{(\alpha)}+v_0^{(\gamma)})$$
$$+[(-2\varepsilon^2\sigma_1\sigma_2\nabla_x\overline{\nabla}_x\nabla_y\overline{\nabla}_y+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)$$
$$+c_{ij}\sigma_1^{1/2}\overline{\nabla}_x+d_{ij}](v_0^{(\alpha)}+v_0^{(\beta)}+v_0^{(\gamma)}+v_0^{(\delta)})$$

这里$v_0^{(\alpha)},v_0^{(\beta)},v_0^{(\gamma)},v_0^{(\delta)}$分别为四条边上边界层函数的首项（参见[1]），

$$v_0^{(\alpha)}=g^{(\alpha)}(y)\exp\,[-\sqrt{a(0,y)}x/\varepsilon]$$

$v_0^{(\beta)}$，$v_0^{(\gamma)}$，$v_0^{(\delta)}$也具有$v_0^{(\alpha)}$同样的形式。

为简便起见，记$\sqrt{a_{0,j}}=\bar{a}$。先讨论上面的关系式的第一项，将$v_0^{(\alpha)}$的表达式代入，得

$$(-\varepsilon^2\sigma_1^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x)^2+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x)v_0^{(\alpha)}=\sigma_1(-\varepsilon^2\sigma_1(\nabla_x\overline{\nabla}_x)^2v_0^{(\alpha)}+a_{ij}\nabla_x\overline{\nabla}_x v_0^{(\alpha)})$$
$$=\sigma_1\Big[-\frac{\varepsilon^2\rho_1^2a_{0j}}{\exp[\rho_1\bar{a}]-2+\exp[-\rho_1\bar{a}]}\cdot\varepsilon^2g^{(\alpha)}(y)(\nabla_x\overline{\nabla}_x)^2\exp\Big[-\frac{ih}{\varepsilon}\bar{a}\Big]$$
$$+a_{ij}\varepsilon^2g^{(\alpha)}(y)\nabla_x\overline{\nabla}_x\exp[-ih\bar{a}/\varepsilon]\Big]$$
$$=\sigma_1\varepsilon^2g^{(\alpha)}(y)\{-\varepsilon^2\rho_1^2\bar{a}/[\exp[\rho_1\bar{a}]-2+\exp[-\rho_1\bar{a}]]$$
$$\cdot h^{-4}[\exp[-\bar{a}h(i+2)/\varepsilon]-4\exp[-\bar{a}h(i+1)/\varepsilon]+6\exp[-\bar{a}ih/\varepsilon]$$
$$-4\exp[-\bar{a}h(i-1)/\varepsilon]+\exp[-\bar{a}h(i-2)/\varepsilon]]$$

$$+a_{ij}h^{-2}[\exp[-\bar{a}h(i+1)/\varepsilon]-2\exp[-\bar{a}ih/\varepsilon]+\exp[-\bar{a}h(i-1)/\varepsilon]]\}$$

$$=\sigma_1\varepsilon^2 g^{(a)}(a_{ij}-a_{0j})h^{-2}\left[\exp\left[-\bar{a}\frac{i+1}{\varepsilon}h\right]-2\exp\left[-\bar{a}\frac{ih}{\varepsilon}\right]+\exp\left[-\bar{a}\frac{i-1}{\varepsilon}h\right]\right]$$

$$=\sigma_1\varepsilon^2 g^{(a)}(y)(a_{ij}-a_{0j})\exp[-\bar{a}ih/\varepsilon]h^{-2}[\exp[-\bar{a}h/\varepsilon]-2+\exp[\bar{a}h/\varepsilon]]$$

$$=a_{0j}g^{(a)}(y)(a_{ij}-a_{0j})\exp[-\bar{a}ih/\varepsilon]$$

$$=a_{0j}g^{(a)}(y)C_1 ih\exp[-\bar{a}ih/\varepsilon]$$

这里$C_1=\partial a(\xi,y_j)/\partial x$，$0\leqslant\xi\leqslant x_i$。由于$|x\exp[-x]|\leqslant C\exp[-x/2]$，所以

$$|(-\varepsilon^2\sigma_1^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x)^2+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x)v_0^{(a)}|\leqslant C\varepsilon\exp[-\bar{a}ih/2\varepsilon]$$

同理可得

$$|(-\varepsilon^2\sigma_2^2(\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)v_0^{(\beta)}|\leqslant C\varepsilon\exp[-\sqrt{b_{i0}}\,j\tau/2\varepsilon]$$

$$|(-\varepsilon^2\sigma_2^2(\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)v_0^{(\delta)}|\leqslant C\varepsilon\exp(-\sqrt{b_{iM}}\,j\tau/2\varepsilon)$$

$$|(-\varepsilon^2\sigma_1^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x)^2+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x)v_0^{(\gamma)}|\leqslant C\varepsilon\exp(-\sqrt{a_{Nj}}\,ih/2\varepsilon)$$

$$|[(-\varepsilon^2\sigma_1^2(\nabla_x\overline{\nabla}_x)^2+a_{ij}\sigma_1\nabla_x\overline{\nabla}_x)(v_0^{(\beta)}+v_0^{(\delta)})+(-\varepsilon^2\sigma_2^2(\nabla_y\overline{\nabla}_y)^2+b_{ij}\sigma_2\nabla_y\overline{\nabla}_y)$$
$$\cdot(v_0^{(a)}+v_0^{(\gamma)})+\cdots+(c_{ij}\sigma_1^{1/2}\overline{\nabla}_x+d_{ij})(v_0^{(a)}+v_0^{(\beta)}+v_0^{(\gamma)}+v_0^{(\delta)})|\leqslant C\varepsilon$$

所以有

$$L_\varepsilon^{h,\tau}(v_0^{(a)}+v_0^{(\beta)}+v_0^{(\gamma)}+v_0^{(\delta)})=O(\varepsilon)$$

另外，易知

$$L_\varepsilon^{h,\tau}(w_0)=f_{ij}+O(h+\tau+\varepsilon^2)$$

这里w_0是退化问题的解[1]。

因此，

$$L_\varepsilon^{h,\tau}[\phi(x_i,y_j)-(w_0+v_0^{(a)}+v_0^{(\beta)}+v_0^{(\gamma)}+v_0^{(\delta)})]=O(h+\tau+\varepsilon^2)$$

由定理1得

$$\|w_0(x_i,y_j)+v_0^{(a)}+v_0^{(\beta)}+v_0^{(\gamma)}+v_0^{(\delta)}-\phi_{ij}\|\leqslant C(h+\tau+\varepsilon^2)$$

另外，据渐近展开式知

$$\|\phi(x_i,y_j)-(w_0(x_i,y_j)+v_0^{(a)}+v_0^{(\beta)}+v_0^{(\gamma)}+v_0^{(\delta)})\|=O(\varepsilon^2)$$

故，

$$\|\phi(x_i,y_j)-\phi_{ij}\|=O(h+\tau+\varepsilon^2)$$

i.e.

$$\|e_{ij}\|=O(h+\tau+\varepsilon^2) \tag{3.8}$$

由估计式(3.7)，(3.8)我们可得到数值解的一致误差估计。

定理2 当$h,\tau\to 0$时，差分问题(2.10)～(2.12)的解ϕ_{ij}一致收敛到摄动问题(Ⅰ)，(Ⅱ)的解$\phi(x_i,y_j)$，并有如下的误差估计

$$\|e_{ij}\|=O(h+\tau)$$

证明 当$\varepsilon^2\geqslant h,\tau$时利用(3.7)；当$\varepsilon^2\leqslant h,\tau$时用(3.8)，我们得到估计。

四、数值例子

本节就第三节中讨论的差分格式给出一个算例，为书写方便起见，这里我们仅给出在能量范数意义下的整体误差和$x=h$，$y=j\tau$ $(j=1,10,20)$等若干网格点上的误差。

例 $-\varepsilon^2\nabla^4\phi+(x^2+1)\partial^2\phi/\partial x^2+(y^2+1)\partial^2\phi/\partial y^2-\phi=4+3(x^2+y^2)$

$$+\varepsilon y(x^2+1)\exp[-x/\varepsilon^{1/2}]+(8\varepsilon y^2(x^2+1)+8\varepsilon^2$$
$$-4\varepsilon^2y^2-32\varepsilon^3)\exp[-\sqrt{2}(1-x)/\varepsilon^{1/2}]$$
$$+\varepsilon x(y^2+1)\exp[-y/\varepsilon^{1/2}]$$

$$\begin{cases} -(\partial\phi/\partial x-\phi)|_{x=0}=(1+\varepsilon^2)y^2+\varepsilon^{1.5}y-\varepsilon^2\exp[-y/\varepsilon^{1/2}] \\ \qquad -(4\sqrt{2}\,\varepsilon^{1.5}-4\varepsilon^2)y^2\exp[-\sqrt{2}/\varepsilon^{1/2}] \\ (\partial\phi/\partial x+\phi)|_{x=1}=3+(1+4\sqrt{2}\,\varepsilon^{1.5}+4\varepsilon^2)y^2 \\ \qquad -(\varepsilon^{1.5}-\varepsilon^2)y\exp[-1/\varepsilon^{1/2}]+2\varepsilon^2\exp[-y/\varepsilon^{1/2}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\partial\phi/\partial y-\phi)|_{y=0}=x^2+(\varepsilon^{1.5}+\varepsilon^2)x-\varepsilon^2\exp[-x/\varepsilon^{1/2}] \\ (\partial\phi/\partial y+\phi)|_{y=1}=3+x^2+2\varepsilon^2\exp[-x/\varepsilon^{1/2}]+12\varepsilon^2\exp[-\sqrt{2}(1-x)/\varepsilon^{1/2}] \\ \qquad -(\varepsilon^{1.5}-\varepsilon^2)\exp[-1/\varepsilon^{1/2}] \end{cases}$$

$$\nabla^2\phi|_{x=0}=4+\varepsilon y+8(\varepsilon+y^2)\varepsilon\exp[-\sqrt{2}/\varepsilon^{1/2}]$$
$$\nabla^2\phi|_{y=0}=4+8\varepsilon^2\exp[-\sqrt{2}(1-x)/\varepsilon^{1/2}]+\varepsilon x$$
$$\nabla^2\phi|_{x=1}=4+8(y^2+\varepsilon)+\varepsilon y\exp[-1/\varepsilon^{1/2}]+\varepsilon\exp[-y/\varepsilon^{1/2}]$$
$$\nabla^2\phi|_{y=1}=4+\varepsilon\exp[-x/\varepsilon^{1/2}]+\varepsilon x\exp[-1/\varepsilon^{1/2}]$$
$$+8(\varepsilon+\varepsilon^2)\exp[-\sqrt{2}(1-x)/\varepsilon^{1/2}]$$

该问题的精确解为

$$\phi(x,y)=x^2+y^2+\varepsilon^2y\exp[-x/\varepsilon^{1/2}]+4\varepsilon^2y^2\exp[-\sqrt{2}(1-x)/\varepsilon^{1/2}]$$
$$+\varepsilon^2x\exp[-y/\varepsilon^{1/2}]$$

下面的两个表格分别给出了能量范数意义下的整体误差和部分网格点上的绝对误差：

表 1

h,τ \ ε	0.1	0.01	0.001	0.0001
$h=0.05$ $\tau=0.05$	0.0657932	0.0591236	0.0487621	0.0328537
$h=0.01$ $\tau=0.01$	0.00341762	0.00312865	0.0022614	0.0014067

表 2

ε,h,τ \ j	1	10	20
$\varepsilon=0.1$ $h=\tau=0.05$	0.0033618	0.0151178	0.05021845
$\varepsilon=0.01$ $h=\tau=0.05$	0.014362	0.0070672	0.0010710
$\varepsilon=0.001$ $h=\tau=0.01$	0.0067340	0.0031678	0.0030183
$\varepsilon=0.0001$ $h=\tau=0.01$	0.0003038	0.0001345	0.0000861

数值结果表明第三节中的误差估计是合理的，并且由表 2 可以看出在网格点上的误差也可以达到$O(h+\tau)$。

参 考 文 献

[1] 苏煜城、刘国庆，四阶椭圆型方程奇异摄动问题渐近解，应用数学和力学，11(7) (1990)，597—610。

[2] Comstock, C., Singular perturbations of elliptic equations I, *SIAM J. Appl. Math.*, 20 (1971), 491.

[3] Ladyzhenskaya, O. A., *The Boundary Problems of Mathematical Physics*, Springer-Verlag (1985).

Numerical Solution of Singular Perturbation Problems for the Fourth-Order Elliptic Differential Equations

Su Yu-cheng
(*Nanjing University, Nanjing*)
Liu Guo-qing
(*Nanjing Institute of Chemical Technology, Nanjing*)

Abstract

In this paper we construct the finite-difference scheme for the singularly perturbed boundary value problem for the fourth-order elliptic differential equation on the basis of paper[1], and prove the uniform convergence of this scheme with respect to the small parameter ε in the discrete energy norm. Finally, we give a numerical example.

Key words elliptic, singular perturbation, energy norm, numerical solution