应用数学和力学，第 12 卷第 9 期（1991 年 9 月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

# 半空间的热弹性问题——弹性通解方法的应用*

王敏中　黄克服

（北京大学力学系，1990年5月30日收到）

**摘　要**

本文基于弹性力学的通解，求解了半空间的热弹性问题．这种解法对于轴对称问题及半平面问题特别有效．应用这种解法我们对几种典型的热弹性半空间问题进行了求解．

**关键词**　半空间　热弹性势　弹性通解　热弹性问题

## 一、引　　言

考虑热效应的弹性力学边值问题本世纪以来引起了广泛的注意．早在三十年代，Goodier[2]对不耦合的热弹性静力学问题进行了研究，他利用迭加原理，把由于热效应引起的位移场用一个位移势函数表示出来，然后再求解相应的弹性力学边值问题．后来，Nowacki[3,4]求解了半空间在瞬时热源作用时引起的热应力，刘先志在［5～10］中对半空间弹性体受定常热源作用及弹性体内部有异质物体时引起的热应力问题分别进行了求解．它们的方法均是从Goodier的热弹性位移势出发，先求解热弹性势，然后再求解半空间的弹性力学边值问题．但是，在求解弹性力学边值问题时，他们用的是积分变换方法，我们知道，用这个方法的一个难点是要进行积分逆变换，而求逆变换往往要进行冗长的积分，有时还不一定能给出积分的有限形式．

本文同样是从 Goodier 的热弹性势出发，不同的是在求解半空间的弹性力学边值问题时，利用了弹性力学的通解，把问题化归为调和函数的半空间边值问题，从而避开了用积分变换方法求解时所要进行的积分运算．

在下一节中我们首先一般地叙述我们的解法，然后在以后的几节中，分别求解了如下几个问题：（1）半无限体内点型定常热源所引起的热应力；（2）半无限体内部异质球体引起的热应力；（3）半无限空间内部定常线热源所引起的热应力；（4）半无限空间内部异质圆柱体所引起的热应力；（5）半无限空间内部异质矩形截面柱体所引起的热应力．对于以上每一个问题，我们分别考虑了两种边界条件：半空间边界固定与边界自由．在文献[5～8]中曾考虑了上述(1)(4)(5)这三个问题的自由边界情形．文[11]考虑了问题(2)的自由边界情形．由以下求解过程可以看出本文所用的方法是求解半空间弹性边值问题的一个简捷而有效方法．

* 丁浩江推荐．

## 二、热弹性问题的解

对于不耦合的热弹性静力学问题，其无体力的位移平衡方程与定常热传导方程分别为[1,2]：

$$\nabla^2\mathbf{u}+\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})=\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}2\nabla T,\quad \nabla^2 T=-\frac{1}{\lambda_0}Q \qquad (2.1\sim2.2)$$

其中 $\mathbf{u}$是位移场，$T$是温度场，$\nu$是Poisson比，$\alpha$是热膨胀系数，$\lambda_0$是热传导系数，$Q$是热源强度，$\nabla$是Hamilton算子，$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$是Laplace算子。

由于问题是热弹性不耦合的，可先由(2.2)式求出温度场$T$。这样，方程(2.1)可看作是关于$\mathbf{u}$的非齐次方程，其解设为

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}^e+\mathbf{u}^t \qquad (2.3)$$

其中$\mathbf{u}^t$是由于温度场$T$所引起的位移的特解，而$\mathbf{u}^e$表示相应齐次方程的一般解，即弹性通解。

根据Goodier[2]的方法，令：

$$\mathbf{u}^t=\nabla f \qquad (2.4)$$

则$f$满足如下方程：

$$\nabla^2 f=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T \qquad (2.5)$$

由于我们仅需求$f$的一个特解，因而令：

$$f(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\iiint\frac{T(\xi,\eta,\zeta)}{\rho}d\xi d\eta d\zeta \qquad (2.6)$$

其中 $\rho^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$.

本文所考虑的问题均是轴对称的或平面的，因而通解可以应用轴对称的与平面的通解。利用弹性力学的Boussinesq解，即Papkorich-Neuber通解的一种变形形式[12]，可以把$\mathbf{u}^e$表示为：

$$u_r^e=-\beta\frac{\partial}{\partial r}(\varphi+z\psi),\quad u_z^e=\psi-\beta\frac{\partial}{\partial z}(\varphi+z\psi) \qquad \text{(轴对称情形)} \quad (2.7)$$

$$u_x^e=G-\beta\frac{\partial}{\partial x}(F+xG),\quad u_y^e=-\beta\frac{\partial}{\partial y}(F+xG) \qquad \text{(平面应变情形)} \quad (2.8)$$

其中 $\varphi,\psi,F$和$G$均为调和函数，并且$\beta=1/4(1-\nu)$，$(r,\theta,z)$为柱坐标，$(x,y,z)$为直角坐标。

将以上(2.4)与(2.7)或(2.8)式代入(2.3)式得到位移场，求出位移场后，相应的应力场也可以求出：

对于轴对称情形，有：

$$u_r=-\beta\frac{\partial}{\partial r}\left(\varphi-\frac{1}{\beta}f+z\psi\right),\quad u_z=\psi-\beta\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi-\frac{1}{\beta}f+z\psi\right) \qquad (2.9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2\beta\mu}\sigma_z&=2(1-\nu)\psi_{,z}-\left(\varphi-\frac{1}{\beta}\right)_{,zz}-z\psi_{,zz}-4(1+\nu)\alpha T\\
\frac{1}{2\beta\mu}\tau_{rz}&=(1-2\nu)\psi_{,r}-\left(\varphi-\frac{1}{\beta}\right)_{,rz}-z\psi_{,rz}\\
\frac{1}{2\beta\mu}\sigma_r&=2\nu\psi_{,z}-\left(\varphi-\frac{1}{\beta}f\right)_{,rr}-z\psi_{,rr}-4(1+\nu)\alpha T\\
\frac{1}{2\beta\mu}\sigma_\theta&=2\nu\psi_{,z}-\frac{1}{r}\left(\varphi-\frac{1}{\beta}f\right)_{,r}-\frac{z}{r}\psi_{,r}-4(1+\nu)\alpha T
\end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

对于平面应变情形，有：

$$u_x=G-\beta\frac{\partial}{\partial x}\left(F-\frac{1}{\beta}f+xG\right),\ u_y=-\beta\frac{\partial}{\partial y}\left(F-\frac{1}{\beta}f+xG\right) \tag{2.11}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2\beta\mu}\sigma_x&=2(1-\nu)G_{,x}-\left(F-\frac{1}{\beta}f\right)_{,xx}-xG_{,xx}-4(1+\nu)\alpha T\\ \frac{1}{2\beta\mu}\tau_{xy}&=(1-2\nu)G_{,y}-\left(F-\frac{1}{\beta}f\right)_{,xy}-xG_{,xy}\\ \frac{1}{2\beta\mu}\sigma_y&=2\nu G_{,x}-\left(F-\frac{1}{\beta}\right)_{,yy}-xG_{,yy}-4(1+\nu)\alpha T\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

其中 $\mu$表示Lame常数，$(\ \ )_{,x}$表示对变量$x$的微商，等等。

在以下的几节中我们将对第一节中提出的几个问题分别进行求解。

## 三、半无限体内定常点热源所引起的热应力

设弹性体占有半空间$z\geqslant0$. 在点$r=0$，$z=h$处有强度为$Q_0$的点热源，在边界$z=0$处保持常温，则由(2.2)式可求得：

$$T=\frac{Q_0}{4\pi\lambda_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{3.1}$$

其中 $R_1^2=(z-h)^2+r^2$，$R_2^2=(z+h)^2+r^2$. 将(3.1)式代入(2.5)式，可求得：

$$f=K(R_1-R_2)/2 \tag{3.2}$$

这里 $K=\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\alpha Q_0}{4\pi\lambda_0}$. 由于问题是轴对称的，因此利用(2.9)与(2.10)来求解. 下面分两种边界条件讨论.

**3.1 边界自由** （即$z=0$时，$\sigma_z=\tau_{rz}=0$）

利用(2.10)式，可得到关于$\psi$和$\varphi$的边条件如下，

$$2(1-\nu)\psi_{,z}-\varphi_{,zz}=0,\ (1-2\nu)\psi_{,r}-\varphi_{,rz}=\frac{Kh}{\beta}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+r^2}}\right)_{,r}\quad(z=0) \tag{3.3}$$

由于$\psi$与$\varphi$均是$z\geqslant0$中的调和函数，(3.3)的第一式可看作是调和函数$2(1-\nu)\psi-\varphi_{,z}$的Neumann问题的边界条件，再考虑到无限远条件，可得在半空间$z\geqslant0$中，有：

$$2(1-\nu)\psi-\varphi_{,z}=0\qquad(z\geqslant0) \tag{3.4}$$

而(3.3)的第二式，则可以看成：

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-2\nu)\psi-\varphi_{,z}-\frac{Kh}{\beta R_2}\right]=0\qquad(z=0) \tag{3.5}$$

由于方括号内函数是调和函数，因而可得到$z\geqslant0$中，有：

$$(1-2\nu)\psi-\varphi_{,z}=\frac{Kh}{\beta R_2}\qquad(z\geqslant0) \tag{3.6}$$

最后从(3.4)式以及(3.6)式，我们可以求得上半空间($z\geqslant0$)中的调和函数$\varphi$与$\psi$如下：

$$\psi=-\frac{Kh}{\beta R_2},\quad\varphi=-\frac{Kh}{2\beta^2}\ln(z+h+R_2)\qquad(z\geqslant0) \tag{3.7}$$

将(3.2)及(3.7)两式回代到(2.9)与(2.10)两式，可得到本问题的位移场与应力场为：

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{Kr}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Khr}{R^2}\left[\frac{2(1-\nu)}{z+h+R}-\frac{z}{R_2^2}\right] \\ u_z &= \frac{K}{2}\left(\frac{z-h}{R_1}-\frac{z+h}{R_2}\right)-\frac{Kh}{R_2}\left[1-2\nu+\frac{z(z+h)}{R_2^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu K}\sigma_r &= -\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)-r^2\left(\frac{1}{R_1^3}-\frac{1}{R_2^3}\right)-\frac{4(1-\nu)h}{R_2(z+h+R_2)} \\ &\quad +\frac{2h}{R_2^3}\left[z+2h+3z\frac{r^2}{R_2^2}\right] \\ \frac{1}{\mu K}\sigma_\theta &= -\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{4(1-\nu)h}{R_2(z+h+R_2)}+\frac{2h}{R_2^3}[2\nu(z+h)-z] \\ \frac{1}{\mu K}\sigma_z &= -\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)-\left[\frac{(z-h)^2}{R_1^3}-\frac{(z+h)^2}{R_2^3}\right] \\ &\quad -\frac{2h}{R_2^3}z\left[1-3\frac{(z+h)^2}{R_2^2}\right] \\ \frac{1}{\mu K}\tau_{rz} &= -r(z-h)\left(\frac{1}{R_1^3}-\frac{1}{R_2^3}\right)+6rh\frac{z(z+h)}{R_2^5} \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

**3.2 边界固定** (即$z=0$时，$u_r=u_z=0$)

此时由(2.9)式可得：

$$\varphi_{,r}=0,\ (1-\beta)\psi-\beta\varphi_{,z}=\frac{Kh}{\sqrt{h^2+r^2}} \qquad (z=0) \tag{3.10}$$

同样，求解以(3.10)为边条件的调和函数半空间边值问题，可得：

$$\left.\begin{aligned} &\varphi=0 \\ &\psi=\frac{Kh}{(1-\beta)R^2} \qquad (z\geqslant 0) \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

最后将(3.2)与(3.11)两式回代到(2.9)与(2.10)两式，可求得该问题的位移场与应力场如下：

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{Kr}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{3-4\nu}Khz\frac{r}{R_2^3} \\ u_z &= \frac{K(z-h)}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{3-4\nu}Khz\frac{z+h}{R_2^3} \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu r}\sigma_r &= -\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)-r^2\left(\frac{1}{R_1^3}-\frac{1}{R_2^3}\right)+\frac{1}{3-4\nu}\ \frac{2h}{R_2^3}\left[z-2\nu(z+h)-3z\frac{r^2}{R_2^2}\right] \\ \frac{1}{\mu K}\sigma_\theta &= -\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{3-4\nu}\ \frac{2h}{R_2^3}[z-2\nu(z+h)] \\ \frac{1}{\mu K}\sigma_z &= -\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)-\left[\frac{(z-h)^2}{R_1^3}-\frac{(z+h)^2}{R_2^3}\right]-\frac{1}{3-4\nu}\ \frac{2h}{R_2^3}\Big[2z \\ &\quad +2(1-\nu)(z+h)-3z\frac{r^2}{R_2^2}\Big] \\ \frac{1}{\mu K}\tau_{rz} &= -r(z-h)\left(\frac{1}{R_1^3}-\frac{1}{R_2^3}\right)+\frac{1}{3-4\nu}\ \frac{2h}{R_2^3}\Big[2(1-\nu)r-3r\frac{3(z+h)}{R_2^2}\Big) \end{aligned}\right\}$$

## 四、半空间内部异质球体引起的热应力

半无限弹性体内部有一异质球体，其弹性常数与外面介质相同，而热膨胀系数不同。设其半径为$a$,球心位于$r=0, z=h$处($h>a$)。若半无限弹性体的温度升高$T_0$，求其引起的应力。

这个问题等价于异质高温球体在半无限体内所产生的热应力问题。显然，关于热弹性势$f$的方程为：

$$\nabla^2 f=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T=\begin{cases}\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\eta_0 T_0 & (R_1\leqslant a)\\ 0 & (R_1>a)\end{cases} \tag{4.1}$$

这里$\eta_0$是内外两种介质的热膨胀系数之差，$R_1^2=(z-h)^2+r^2$。易求得$f$的一个特解为：

$$f=\begin{cases}\dfrac{1}{6}KR_1^2 & (R_1\leqslant a)\\ \dfrac{1}{6}K\left[3a^2-2\dfrac{a^3}{R_1}\right] & (R_1>a)\end{cases} \tag{4.2}$$

其中　$K=\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\eta_0T_0$。同样，我们分别对自由边与固定边两种情形进行求解。

### 4.1　边界自由(即$z=0$时，$\sigma_z=\tau_{rz}=0$)

这时由(2.10)式，得：

$$\left.\begin{aligned}&2(1-\nu)\psi_{,z}-\varphi_{,zz}=-\frac{Ka^3}{3\beta}\frac{R_1^2-3h^2}{R_1^5}\\ &(1-2\nu)\psi_{,r}-\varphi_{,rz}=\frac{Ka^3}{3a}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h}{R_1^3}\right)\end{aligned}\quad (z=0)\right\} \tag{4.3}$$

由(4.3)式及$\varphi$与$\psi$为调和函数，可解得：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi=\frac{3-4\nu}{3\beta}\frac{Ka^3}{R_2}\\ &\psi=-\frac{2Ka^3}{3\beta}\frac{z+h}{R_2^3}\end{aligned}\quad (z\geqslant 0)\right\} \tag{4.4}$$

其中$R_2^2=r^2+(z+h)^2$。将(4.2)与(4.4)两式回代到(2.9)与(2.10)两式中，可得到位移场与应力场。限于篇幅，这里只列出位移场的结果：

$$\left.\begin{aligned}&u_r=\begin{cases}\dfrac{1}{3}Kr\left[1+(3-4\nu)\dfrac{a^3}{R_2^3}-6z(z+h)\dfrac{a^3}{R_2^5}\right] & (R_1\leqslant a)\\ \dfrac{1}{3}Kra^3\left[\dfrac{1}{R_1^3}+\dfrac{3-4\nu}{R_2^3}-6z(z+h)\dfrac{1}{R_2^5}\right] & (R_1>a)\end{cases}\\ &u_z=\begin{cases}\dfrac{1}{3}K\left[z-h-(3-4\nu)(z+h)\dfrac{a^3}{R_2^3}+2a^3z\dfrac{R_2^2-3(z+h)^2}{R_2^5}\right] & (R_1\leqslant a)\\ \dfrac{1}{3}Ka^3\left[\dfrac{z-h}{R_1^3}-(3-4\nu)\dfrac{z+h}{R_2^3}+2z\dfrac{R_2^2-3(z+h)^2}{R_2^5}\right] & (R_1>a)\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

### 4.2　边界固定　(即$z=0$时，$u_r=u_z=0$)

这时由(2.9)式可得边条件如下：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_{,r}=\frac{Ka^3}{3\beta}\frac{r}{R_1^3}\\&(1-\beta)\psi-\beta\varphi_{,z}=\frac{Ka^3h}{3R_1^3}\end{aligned}\quad(z=0)\right\}\tag{4.6}$$

以(4.6)为边条件求解调和函数$\varphi$与$\psi$的半空间边值问题，可得：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi=-\frac{Ka^2}{3\beta R_2}\\&\psi=\frac{2Ka^3}{3(1-\beta)}\cdot\frac{z+h}{R_2^3}\end{aligned}\quad(z\geqslant0)\right\}\tag{4.7}$$

最后将(4.2)与(4.7)两式代到(2.9)与(2.10)中，可得到位移场与应力场。这里仅给出位移场如下：

$$\left.\begin{aligned}&u_r=\begin{cases}\dfrac{1}{3}Kr\left[1-\dfrac{a^3}{R_2^3}+\dfrac{6}{3-4\nu}z(z+h)\dfrac{a^3}{R_2^5}\right] & (R_1\leqslant a)\\ \dfrac{1}{3}Kra^3\left[\dfrac{1}{R_1^3}-\dfrac{1}{R_2^3}+\dfrac{6}{3-4\nu}\dfrac{z(z+h)}{R_2^5}\right] & (R_1>a)\end{cases}\\&u_z=\begin{cases}\dfrac{1}{3}K\left[z-h+(z+h)\dfrac{a^3}{R_2^3}-\dfrac{2za^3}{3-4\nu}\dfrac{R_2^2-3(z+h)^2}{R_2^5}\right] & (R_1\leqslant a)\\ \dfrac{1}{3}Ka^3\left[\dfrac{z-h}{R_1^3}+\dfrac{z+h}{R_2^3}-\dfrac{2z}{3-4\nu}\dfrac{R_2^2-3(z+h)^2}{R_2^5}\right] & (R_1>a)\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{4.8}$$

## 五、内部定常线热源引起的热应力

半空间内部$x=h$，$y=0$线上均匀分布有定常热源，其强度为$Q_0$，在半空间边界$x=0$处保持常温，则其引起的温度场为：

$$T=\frac{Q_0}{2\pi\lambda_0}\ln\frac{R_1}{R_2}\tag{5.1}$$

这里$R_1^2=(x-h)^2+y^2$，$R_2^2=(x+h)^2+y^2$。易求得热弹性势函数$f$的一个特解为：

$$f=\frac{K}{2}[R_1^2\ln R_1-R_2^2\ln R_2]\tag{5.2}$$

其中 $K=\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\dfrac{\alpha Q_0}{4\pi\lambda_0}$。由于本问题是平面问题，因此下面应用(2.11)与(2.12)两式对不同边界情形分别进行求解。

### 5.1 边界自由（即$x=0$时$\sigma_x=\tau_{xy}=0$）

这时(2.12)式变为：

$$\left.\begin{aligned}&2(1-\nu)G_{,x}-F_{,xx}=0\\&(1-2\nu)G_{,y}-F_{,xy}=\frac{2Kh}{\beta}\frac{y}{h^2+y^2}\end{aligned}\quad(x=0)\right\}\tag{5.3}$$

求解以(5.3)式为边条件的半空间调和函数边值问题，可得$F$与$G$如下：

$$\left.\begin{aligned}&F=-\frac{Kh}{\beta^2}\left[(x-h)(\ln R_2-1)-y\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x+h}\right]\\&G=-\frac{2Kh}{\beta}\ln R_2\end{aligned}\quad(x\geqslant0)\right\}\tag{5.4}$$

由(5.2)与(5.4)两式代入到(2.11)和(2.12)中可得到本问题的位移场与应力场如下：

$$\left.\begin{aligned}u_x&=K[(x-h)\ln R_1-(x+h)\ln R_2-h]-2(1-2\nu)Kh\ln R_2+2Kh\frac{x(x+h)}{R_2^2}\\u_y&=Ky\ln\frac{R_1}{R_2}+2Kh\left[\frac{xy}{R_2^2}-2(1-\nu)\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x+h}\right]\end{aligned}\right\}\tag{5.5}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=2\mu K\left[\frac{(x-h)^2}{R_1^2}-\frac{(x+h)^2}{R_2^2}+2hx\frac{R_2^2-2(x+h)^2}{R_2^4}\right]\\\sigma_y&=2\mu K\left[\frac{y^2}{R_1^2}-\frac{y^2}{R_2^2}-4h\frac{x+h}{R_2^2}+2hx\frac{R_2^2-2y^2}{R_2^4}\right]\\\tau_{xy}&=2\mu K\left[(x+h)y\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right)-4hx\frac{(x+h)y}{R_2^4}\right]\end{aligned}\right\}\tag{5.6}$$

**5.2 边界固定**(即$x=0$时$u_x=u_y=0$)

从(2.11)式可得关于$F$和$G$的边条件：

$$\left.\begin{aligned}&(1-\beta)G-\beta F_{,x}=Kh[2\ln\sqrt{h^2+y^2}+1]\\&F_{,y}=0\end{aligned}\right\}\quad(x=0)\tag{5.7}$$

由此可求得调和函数$F$和$G$为：

$$\left.\begin{aligned}&F=0\\&G=\frac{Kh}{1-\beta}[2\ln R_2+1]\end{aligned}\right\}\quad(x\geqslant 0)\tag{5.8}$$

将(5.2)与(5.8)两式代入位移与应力的表达式(2.11)与(2.12)两式中，可得如下位移场与应力场：

$$\left.\begin{aligned}u_x&=K(x-h)\ln\frac{R_1}{R_2}-\frac{2Kh}{3-4\nu}\cdot\frac{x(x+h)}{R_2^2}\\u_y&=Ky\ln\frac{R_1}{R_2}-\frac{2Kh}{3-4\nu}\frac{xy}{R_2^2}\end{aligned}\right\}\tag{5.9}$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=2\mu K\left[\frac{(x-h)^2}{R_1^2}-\frac{(x+h)^2}{R_2^2}+\frac{4(1-\nu)}{3-4\nu}\frac{h(x+h)}{R_2^2}-\frac{2xh}{3-4\nu}\frac{R_2^2-2(x+h)^2}{R_2^4}\right]\\\sigma_y&=2\mu K\left[\frac{y^2}{R_1^2}-\frac{y^2}{R_2^2}+\frac{4\nu}{3-4\nu}\frac{h(x+h)}{R_2^2}-\frac{2xh}{3-4\nu}\frac{R_2^2-2y}{R_2^4}\right]\\\tau_{xy}&=2\mu K\left[(x-h)y\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right)-\frac{4(1-\nu)}{3-4\nu}\frac{hy}{R_2^2}+\frac{4xh}{3-4\nu}\frac{(x+h)y}{R_2^4}\right]\end{aligned}\right\}\tag{5.10}$$

此外本问题的结果可以利用发散积分的有限部分方法[12]，从第三节中结果导出。

## 六、半空间内部异质圆柱体引起的热应力

设弹性半空间内部有一异质圆柱体，其弹性常数与半空间介质一致，但热膨胀系数不同。圆柱体的中心轴平行于半空间表面，因而这是一个平面应变问题。设圆柱体的轴心在$x=h$，$y=0$处，半径为$a(h>a)$，则当半空间的温度升高$T_0$时，相应的热弹性势$f$满足：

$$\nabla^2 f=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T=\begin{cases}\frac{1+\nu}{1-\nu}\eta_0 T_0 & (R_2\leqslant a)\\ 0 & (R_1>a)\end{cases} \tag{6.1}$$

其中　$\eta_0$是两种材料的热膨胀系数之差，$R_1^2=(x-h)^2+y^2$。易求得$f$的一个特解为：

$$f=\begin{cases}\frac{1}{4}KR_1^2 & (R_1\leqslant a)\\ \frac{1}{2}Ka^2\left[\ln\frac{R_1}{a}+\frac{1}{2}\right] & (R_1>a)\end{cases} \tag{6.2}$$

这里$K=\frac{1+\nu}{1-\nu}\eta_0 T_0$。下面对自由边和固定边这两种边条解来求解本问题。

6.1　**边界自由**(即$x=0$时$\sigma_x=\tau_{xy}=0$)

这时由(2.12)式可得：

$$\left.\begin{aligned}2(1-\nu)G_{,x}-F_{,xx}&=-\frac{Ka^2}{2\beta}\frac{y^2-h^2}{(y^2+h^2)^2}\\ (1-2\nu)G_{,y}-F_{,xy}&=-\frac{Ka^2}{2\beta}\frac{2hy}{(y^2+h^2)^2}\end{aligned}\quad (x=0)\right\} \tag{6.3}$$

以(6.3)为边条件，求解调和函数$F$和$G$的半空间边值问题，可得（其中$R_2^2=(x+h)^2+y^2$）

$$F=-(3-4\nu)\frac{Ka^2}{2\beta}\ln R_2,\quad G=-\frac{Ka^2}{\beta}\frac{x+h}{R_2^2}\qquad (x\geqslant 0) \tag{6.4}$$

把(6.2)与(6.4)两式代入到(2.11)与(2.12)两式中，可得到位移及应力的表达式。限于篇幅，这里只给出位移场：

$$\left.\begin{aligned}u_x&=\begin{cases}\frac{1}{2}K\left[(x-h)-(3-4\nu)(x+h)\frac{a^2}{R_2^2}+2xa^2\frac{R_2^2-2(x+h)^2}{R_2^4}\right] & (R_1\leqslant a)\\ \frac{1}{2}Ka^2\left[\frac{x-h}{R_1^2}-(3-4\nu)\frac{x+h}{R_2^2}+2x\frac{R_2^2-2(x+h)^2}{R_2^4}\right] & (R_1>a)\end{cases}\\ u_y&=\begin{cases}\frac{1}{2}Ky\left[1+(3-4\nu)\frac{a^2}{R_2^2}-4a^2\frac{x(x+h)}{R_2^4}\right] & (R_1\leqslant a)\\ \frac{1}{2}Ka^2y\left[\frac{1}{R_1^2}+\frac{3-4\nu}{R_2^2}-4\frac{x(x+h)}{R_2^4}\right] & (R_1>a)\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

6.2　**边界固定**(即$x=0$时$u_x=u_y=0$)

在这种情形下(2.11)式变为：

$$\left.\begin{aligned}(1-\beta)G-\beta F_{,x}&=\frac{1}{2}Ka^2\frac{h}{h^2+y^2}\\ F_{,y}&=\frac{Ka^2}{2\beta}\frac{y}{h^2+y^2}\end{aligned}\quad (x=0)\right\} \tag{6.6}$$

以(6.6)为边条件求解调和函数$F$的$G$半空间边值问题，得到：

$$\left.\begin{aligned}F&=\frac{Ka^2}{2\beta}\ln R_2\\ G&=\frac{Ka^2}{1-\beta}\frac{x+h}{R_2^2}\end{aligned}\quad (x\geqslant 0)\right\} \tag{6.7}$$

最后把(6.2)与(6.7)两式代入位移与应力表达式中，求得位移与应力场。这里只给出位移场：

$$
\left\{\begin{array}{l}
u_x=\begin{cases}\dfrac{1}{2}K\left[(x-h)+(x+h)\dfrac{a^2}{R_2^2}-\dfrac{2a^2x}{3-4\nu}\dfrac{R_2^2-2(x+h)^2}{R_2^4}\right] & (R_1\leqslant a)\\[2ex] \dfrac{1}{2}Ka^2\left[\dfrac{x-h}{R_1^2}+\dfrac{x+h}{R_2^2}-\dfrac{2x}{3-4\nu}\dfrac{R_2^2-2(x+h)^2}{R_2^4}\right] & (R_1>a)\end{cases}\\[4ex]
u_y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}Ky\left[1+\dfrac{a^2}{R_2^2}+\dfrac{4a^2}{3-4\nu}\dfrac{x(x+h)}{R_2^4}\right] & (R_1\leqslant a)\\[2ex] \dfrac{1}{2}Kya^2\left[\dfrac{1}{R_1^2}-\dfrac{1}{R_2^2}+\dfrac{4}{3-4\nu}\dfrac{x(x+h)}{R_2^4}\right] & (R_1>a)\end{cases}
\end{array}\right. \tag{6.8}
$$

## 七、内部异质矩形截面柱体所引起的热应力

半无限弹性体内部有一无限长矩形截面柱体，其弹性性质与半无限弹性体相同，但热膨胀系数不同．设柱体的中心轴与半空间表面平行，位于$x=h$，$y=0$处．矩形截面在$x$方向宽$2a$，在$y$方向宽$2b(h>a)$．则当半无限的温度升高$T_0$时，相应的热弹性势$f$满足如下方程：

$$
\nabla^2 f=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha T=\begin{cases}\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\eta_0 T_0 & (|x-h|\leqslant a\text{和}|y|\leqslant b)\\ 0 & (|x-h|>a\text{或}|y|>b)\end{cases} \tag{7.1}
$$

这里$\eta_0$是两种材料的热胀系数之差．设$K=\dfrac{1+\nu}{1-\nu}\eta_0T_0$，则可得$f$的一个特解为：

$$
f(x,y)=\frac{K}{2\pi}\iint\limits_{\substack{|\xi-h|\leqslant a\\ |\eta|\leqslant b}}\ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi d\eta \tag{7.2}
$$

同样，下面对不同边条件进行求解．

**7.1 边界自由**(即$x=0$时，$\sigma_x=\tau_{xy}=0$)

这时从(2.12)式可得：

$$
\left.\begin{aligned}
2(1-\nu)G_{,x}-F_{,xx}&=\frac{K}{2\pi\beta}\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{h+a}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{h+a}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{h-a}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{h-a}\right]\\
(1-2\nu)G_{,y}-F_{,xy}&=\frac{K}{4\pi\beta}\ln\frac{[(h+a)^2+(y+b)^2][(h-a)^2+(y-b)^2]}{[(h+a)^2+(y-b)^2][(h-a)^2+(y+b)^2]}
\end{aligned}\quad (x=0)\right\} \tag{7.3}
$$

求解以(7.3)为边条件的调和函数$F$和$G$的半平面边值问题，得到：

$$
\left.\begin{aligned}
G&=-\frac{K}{\pi\beta}H_{,x}\\
F&=-\frac{(3-4\nu)K}{2\pi\beta}H
\end{aligned}\quad (x\geqslant 0)\right\} \tag{7.4}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
H(x,y)=&(x+a+h)(y+b)\ln\sqrt{(x+a+h)^2+(y+b)^2}\\
&+\frac{1}{2}[(x+a+h)^2-(y+b)^2]\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{x+a+h}-(x+a+h)(y-b)\ln\sqrt{(x+a+h)^2+(y-b)^2}\\
&-\frac{1}{2}[(x+a+h)^2-(y-b)^2]\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{x+a+h}-(x-a+h)(y+b)\ln\sqrt{(x-a+h)^2+(y+b)^2}\\
&-\frac{1}{2}[(x-a+h)^2-(y+b)^2]\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{x-a+h}+(x-a+h)(y-b)\ln\sqrt{(x-a+h)^2+(y-b)^2}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}[(x-a+h)^2-(y-b)^2]\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{x-a+h} \tag{7.5}$$

将(7.2)与(7.4)式代回到位移与应力的表达式中，可得到位移场与应力场。限于篇幅，这里只给出位移场如下：

$$\left.\begin{aligned}
u_x=&\frac{K}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}(y-b)\ln\frac{(x-a-h)^2+(y-b)^2}{(x+a-h)^2+(y-b)^2}+\frac{1}{2}(y+b)\ln\frac{(x+a-h)^2+(y+b)^2}{(x-a-h)^2+(y+b)^2}\right.\\
&+(x-a-h)\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{x-a-h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{x-a-h}\right]-(x+a-h)\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{x+a-h}\right.\\
&\left.\left.-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{x+a-h}\right]\right\}+\frac{(3-4\nu)K}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}(y-b)\ln\frac{(x+a+h)^2+(y-b)^2}{(x-a+h)^2+(y-b)^2}\right.\\
&+\frac{1}{2}(y+b)\ln\frac{(x-a+h)^2+(y+b)^2}{(x+a+h)^2+(y+b)^2}+(x+a+h)\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{x+a+h}\right.\\
&\left.\left.-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{x+a+h}\right]-(x-a+h)\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{x-a+h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{x-a+h}\right]\right\}\\
&+\frac{Kx}{\pi}\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{x+a+h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{x+a+h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{x-a+h}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{x-a+h}\right]\\
u_y=&\frac{K}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}(x-a-h)\ln\frac{(x+a-h)^2+(y-b)^2}{(x-a-h)^2+(y+b)^2}\right.\\
&+\frac{1}{2}(x+a-h)\ln\frac{(x+a-h)^2+(y-b)^2}{(x-a-h)^2+(y-b)^2}+(y-b)\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{x+a-h}\right.\\
&\left.\left.-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{x-a-h}\right]-(y+b)\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{x+a-h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{x-a-h}\right]\right\}\\
&+\frac{(3-4\nu)K}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}(x+a+h)\ln\frac{(x+a+h)^2+(y+b)^2}{(x+a+h)^2+(y-b)^2}\right.\\
&+\frac{1}{2}(x-a+h)\ln\frac{(x-a+h)^2+(y-b)^2}{(x-a+h)^2+(y+b)^2}+(y-b)\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{x+a+h}\right.\\
&\left.\left.-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{x-a+h}\right]-(y+b)\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{x+a+h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{x-a+h}\right]\right\}\\
&+\frac{Kx}{2\pi}\ln\frac{[(x+a+h)^2+(y+b)^2][(x-a+h)^2+(y-b)^2]}{[(x-a+h)^2+(y+b)^2][(x+a+h)^2+(y-b)^2]}
\end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

### 7.2 边界固定(即$x=0$时$u_x=u_y=0$)

这时由(2.11)式可得：

$$\left.\begin{aligned}
(1-\beta)G-\beta F_{,x}=&\frac{K}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}(y+b)\ln\frac{(h+a)^2+(y+b)^2}{(h-a)^2+(y+b)^2}\right.\\
&+\frac{1}{2}(y-b)\ln\frac{(h-a)^2+(y-b)^2}{(h+a)^2+(y-b)^2}+(h+a)\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{h+a}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{h+a}\right]\\
&\left.+(h-a)\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{y-b}{h-a}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{y+b}{h-a}\right]\right\}\\
F_{,y}=&\frac{K}{2\pi\beta}\left\{\frac{1}{2}(h+a)\ln\frac{(h+a)^2+(y+b)^2}{(h+a)^2+(y-b)^2}\right.
\end{aligned}\right\}\quad(x=0)$$

$$+\frac{1}{2}(h-a)\ln\frac{(h-a)^2+(y-b)^2}{(h-a)^2+(y+b)^2}+(y+b)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{y+b}{h-a}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y+b}{h+a}\right]$$
$$\left.-(y-b)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{y-b}{h-a}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y-b}{h+a}\right]\right\} \tag{7.7}$$

以(7.7)为边条件，求解调和函数$F$和$G$的半平面边值问题，得到：

$$\left.\begin{aligned} F&=\frac{K}{2\pi\beta}H \\ G&=\frac{K}{\pi(1-\beta)}H_{,z} \end{aligned}\quad (x\geqslant 0)\right\} \tag{7.8}$$

其中$H$同(7.5)式。最后将(7.2)与(7.8)式代入(2.11)与(2.12) 两式中，得到位移场与应力场。位移场如下：

$$\begin{aligned}
u_x=&\frac{K}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}(y+b)\ln\frac{(x+a-h)^2+(y+b)^2}{(x-a-h)^2+(y+b)^2}+\frac{1}{2}(y-b)\ln\frac{(x-a-h)^2+(y-b)^2}{(x+a-h)^2+(y-b)^2}\right.\\
&+(x+a-h)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{y+b}{x+a-h}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y-b}{x+a-h}\right]-(x-a-h)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{y+b}{x-a-h}\right.\\
&\left.\left.-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y-b}{x-a-h}\right]\right\}+\frac{K}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}(y+b)\ln\frac{(x+a+h)^2+(y+b)^2}{(x-a+h)^2+(y+b)^2}\right.\\
&+\frac{1}{2}(y-b)\ln\frac{(x-a+h)^2+(y-b)^2}{(x+a+h)^2+(y-b)^2}+(x-a+h)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{y-b}{x-a+h}\right.\\
&\left.\left.-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y+b}{x-a+h}\right]-(x+a+h)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{y-b}{x+a+h}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y+b}{x+a+h}\right]\right\}\\
&-\frac{Kx}{(3-4\nu)\pi}\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{y+b}{x+a+h}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y-b}{x+a+h}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y+b}{x-a+h}+\operatorname{tg}^{-1}\frac{y-b}{x-a+h}\right]\\
u_y=&\frac{K}{2\pi}\left[\frac{1}{2}(x-a-h)\ln\frac{(x-a-h)^2+(y-b)^2}{(x-a-h)^2+(y+b)^2}\right.\\
&+\frac{1}{2}(x+a-h)\ln\frac{(x+a-h)^2+(y+b)^2}{(x+a-h)^2+(y-b)^2}+(y-b)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{y-b}{x+a-h}\right.\\
&\left.\left.-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y-b}{x-a-h}\right]-(y+b)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{y+b}{x+a-h}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y+b}{x-a-y}\right]\right\}\\
&-\frac{K}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}(x+a+h)\ln\frac{(x+a+h)^2+(y+b)^2}{(y+a+h)^2+(y-b)^2}\right.\\
&+\frac{1}{2}(x-a+h)\ln\frac{(x-a+h)^2+(y-b)^2}{(x-a+h)^2+(y+b)^2}+(y-b)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{y-b}{x+a+h}\right.\\
&\left.\left.-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y-b}{x-a+h}\right]-(y+b)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{y+b}{x+a+h}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{y+b}{x-a+h}\right]\right\}\\
&-\frac{Kx}{2(3-4\nu)\pi}\ln\frac{[(x+a+h)^2+(y+b)^2][(x+a+h)^2+(y-b)^2]}{[(x+a+h)^2+(y-b)^2][(x-a+h)^2+(y+b)^2]}
\end{aligned} \tag{7.9}$$

应力场也可得到，限于篇幅，这里不再列出。

## 参 考 文 献


[1] Nowinski, J. L., *Theory Thermoelasticity with Applications*, Sijthoff & Noordhoff International Publishers (1978), 248—268.

[2] Goodier, J. N., On the integration of the thermo-elastic equations, *Phil. Mag.*, 7 (1937), 1017—1032.

[3] Nowacki, W., State of stress in an infinite and semi-infinite elastic space, *Bull. Acad. Pol. Sci.* 5 (1957).

[4] Nowacki, W., State of stress in an elastic space, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, 5 (1957).

[5] 刘先志, 《刘先志论文集》, 应用数学和力学讲座丛书, 四川科学技术出版社 (1984).

[6] 刘先志, 半无限弹性体球型热源所激起的热应力和变形, 力学学报, 3 (1959), 236—256.

[7] 刘先志, 异质圆柱体在半无限弹性体内所引起的热应力和位移, 力学学报, 8 (1965), 12—27.

[8] 刘先志, 矩形截面异质柱体在半无限弹性体内的热应力问题, 力学学报, 8 (1966), 302～315.

[9] 刘先志, 用一个直接法来推求半无限弹性体表面上的定常点型热源所引起的应力及位移, 力学学报, 4 (1960), 66—83.

[10] 刘先志, 半无限弹性体表面上的定常对数势函数热源的热应力问题, 力学学报, 7 (1964), 244—250.

[11] Mindlin, R. D. and. D. H. Cheng, Thermoelastic stresses in the semi-infinite solids, *J. A. M.*, 21 (1950), 931—933.

[12] Eubanks, R. A. and E. Sternberg, On the completeness of the Bonssinesq-Papkoich stress functions, *Rat. Mech. and. Anal.*, 5 (1956), 735—746.

[13] 王敏中, 发散积分的有限部分在弹性力学中的应用, 应用数学和力学, 6 (12) (1985), 1071—1078.


# Theremoelastic Problems in the Half Space An Application of the General Solution in Elasticity


Wang Min-zhong Huang Ke-fu

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing*)



**Abstract**

In this paper, some thermoelastic problems in the half space are studied by using the general solutions of the elastic equations. The method presented here is extremely effective for the axisymmetric problems of the half space as well as the half plane problems.



**Key words** half space, thermoelastic potential, elastic general solutions, thermoelastic problems