应用数学和力学，第 12 卷第 9 期（1991 年 9 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非完整非有势系统相对于非惯性系的广义Noether定理*

罗 绍 凯

（河南商丘师专，1990年9月3日收到）

摘 要

本文构造了力学系统相对运动的 Lagrange 函数，建立了非线性非完整非有势系统相对于非惯性系的 Jourdain 型变分原理，提出并证明了这类力学系统相对于非惯性系的广义 Noether 定理，研究了其守恒量.

关键词 非惯性参考系 非完整约束 动力学守恒律 Noether 定理

一、引 言

物理系统的守恒律与其内在的对称性密切相关. 1918年，Noether 揭示了这种关系[1]，极大地推动了理论物理学和近代力学的发展[2,3]. 近二十年来，Condotti[4]、Djukic[5]、Vujanovic[6,7]、李子平[8,9]和刘端[10]相继对 Noether 定理做了多方面的推广. 但是，人们仅在惯性参考系中研究了 Noether 定理.

本文在速度空间中建立非完整非有势系统相对于非惯性参考系的 Jourdain 型变分原理，提出并证明非线性非完整非有势系统相对于非惯性参考系的广义 Noether 定理，并给出一系列推论和一个例子.

二、非完整非有势系统相对于非惯性系的Jourdain原理

考虑 n 个质点构成的力学系统相对于某非惯性参考系的运动. 非惯性系与大质量的物体固连在一起，其相对于某惯性坐标系的平动加速度$\mathbf{a}_0$、角速度$\boldsymbol{\omega}$及角加速度$\dot{\boldsymbol{\omega}}$都是时间$t$ 的已知函数，与诸质点的运动无关. 第i个质点的质量为m_i，相对于非惯性系坐标原点的位矢$\mathbf{r}'_i$，所受主动力$\mathbf{F}_i$、约束反力$\mathbf{R}_i$，牵连惯性力和科里奥利力

$$\mathbf{F}_{ei}=-m_i[\mathbf{a}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}'_i+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}'_i)]$$

$$\mathbf{F}_{ci}=-2m_i\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}'_i$$

在速度空间中，引入 Jourdain 意义的变分δ_1，有

* 汪家訸推荐.

$$\delta_1 t=0,\ \delta_1\mathbf{r}'_i=0,\ \delta_1\dot{\mathbf{r}}'_i\neq 0,\ \delta_1\ddot{\mathbf{r}}'_i\neq 0,\cdots$$

如果加在系统上的约束反力的相对元功率之和为零，即

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}_i\cdot\delta_1\dot{\mathbf{r}}'_i=0$$

则在非惯性系中 Jourdain 型变分原理可以写为

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{F}_i+\mathbf{F}_{ei}+\mathbf{F}_{ci}-m_i\ddot{\mathbf{r}}'_i)\cdot\delta_1\dot{\mathbf{r}}'_i=0 \tag{2.1}$$

其中 $\dot{\mathbf{r}}'_i$, $\ddot{\mathbf{r}}'_i$分别是第i个质点的相对速度和相对加速度.

若系统具有s个自由度，其位形用非惯性系的广义坐标$q_{ar}(a=1,2,\cdots,s)$表示，相对位矢$\mathbf{r}'_i=\mathbf{r}'_i(q_{ar},t)$，相对速度为

$$\dot{\mathbf{r}}'_i=\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial\mathbf{r}'_i}{\partial q_{ar}}\dot{q}_{ar}+\frac{\partial\mathbf{r}'_i}{\partial t}$$

则有

$$\delta\dot{\mathbf{r}}'_i=\left(\sum_{a=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial^2\mathbf{r}'_i}{\partial q_{ar}\partial q_{\beta r}}\dot{q}_{\beta r}+\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial^2\mathbf{r}'_i}{\partial q_{ar}\partial t}\right)\delta q_{ar}+\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial\mathbf{r}'_i}{\partial q_{ar}}\delta\dot{q}_{ar}$$

考虑到 Jourdain 变分的意义，上式变为

$$\delta_1\dot{\mathbf{r}}'_i=\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial\mathbf{r}'_i}{\partial q_{ar}}\delta_1\dot{q}_{ar} \tag{2.2}$$

把(2.2)代入(2.1)，得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(\mathbf{F}_i+\mathbf{F}_{ei}+\mathbf{F}_{ci})\cdot\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial\mathbf{r}'_i}{\partial q_{ar}}-m_i\ddot{\mathbf{r}}'_i\cdot\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial\mathbf{r}'_i}{\partial q_{ar}}\right]\cdot\delta_1\dot{q}_{ar}=0 \tag{2.3}$$

设系统受有g个一阶非线性非完整理想约束

$$\varphi_\rho(t,\ q_{ar},\ \dot{q}_{ar})=0\qquad(\rho=1,2,\cdots,g;\ a=1,2,\cdots,s) \tag{2.4}$$

则有[11]

$$\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\dot{q}_{ar}}\delta_1\dot{q}_{ar}=0 \tag{2.5}$$

把作用在系统上的主动力分为有势和非有势力两部分，即

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}'_i}{\partial q_{ar}}=-\frac{\partial V}{\partial q_{ar}}+Q_a(t,q_{ar},\dot{q}_{ar})$$

其中V是系统的势能，Q_a为非有势广义力. 引入广义迴转惯性力

$$Q_a^{\dot{\omega}}=-\sum_{i=1}^{n}(\dot{\omega}\times m_i\mathbf{r}'_i)\cdot\frac{\partial\mathbf{r}'_i}{\partial q_{ar}}$$

广义陀螺力

$$\Gamma_a=-\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}2m_i\,\omega\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}'_i}{\partial q_{\beta r}}\times\frac{\partial\mathbf{r}'_i}{\partial q_{ar}}\right)\dot{q}_{\beta r}$$

均匀力场势能

$$V^0=M\mathbf{a}_0\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_C'}{\partial q_{ar}}$$

以及惯性离心势能

$$V^{\omega}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\overrightarrow{\mathbf{I}}_0\cdot\boldsymbol{\omega}$$

其中 M是系统的总质量，$\mathbf{r}_C'$是质心C的相对位矢，$\overrightarrow{\mathbf{I}}_0$是系统对于非惯性系原点$O$的惯量张量。

利用如下关系式

$$\frac{\partial\mathbf{r}_i'}{\partial q_{ar}}=\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i'}{\partial\dot{q}_{ar}},\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathbf{r}_i'}{\partial q_{ar}}=\frac{\partial\mathbf{r}_i'}{\partial q_{ar}}$$

并考虑到(2.5)式，由(2.3)得

$$\sum_{a=1}^{s}\Big[-\frac{d}{dt}\frac{\partial T_r}{\partial\dot{q}_{ar}}+\frac{\partial T_r}{\partial q_{ar}}-\frac{\partial}{\partial q_{ar}}(V+V^0+V^{\omega})$$

$$+Q_a+Q_a^{\dot{\omega}}+\Gamma_a+\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\dot{q}_{ar}}\Big]\delta_1\dot{q}_{ar}=0 \tag{2.6}$$

其中

$$T_r=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\mathbf{r}}_i'\cdot\dot{\mathbf{r}}_i'$$

为系统相对运动的动能，λ_ρ为 Lagrange 待定乘子。(2.6)式即为非完整非有势系统相对于非惯性系在广义坐标下的 Jourdain 原理。

用L_r表示力学系统相对运动的 Lagrange 函数

$$L_r=T_r-V-V^0-V^{\omega}$$

利用$\partial L_r/\partial\dot{q}_{ar}=\partial T_r/\partial\dot{q}_{ar}$，则(2.6)式可写为

$$\sum_{a=1}^{s}\Big(-\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{ar}}+\frac{\partial L_r}{\partial q_{ar}}+Q_a+Q_a^{\dot{\omega}}+\Gamma_a+\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\dot{q}_{ar}}\Big)\delta_1\dot{q}_{ar}=0 \tag{2.7}$$

三、Jourdain 型的非等时变分和无穷小变换

等时变分δq是在$\delta t=0$情形下广义坐标q的无穷小增量

$$\bar{q}(\bar{t})=q(t)+\delta q,\quad \bar{t}=t \tag{3.1}$$

在Δt时间间隔内，$\bar{q}(t)$的无穷小增量为

$$\bar{q}(t+\Delta t)=\bar{q}(t)+\dot{q}\Delta t$$

把(3.1)代入上式，并定义非等时变分$\Delta q=\bar{q}(t+\Delta t)-q(t)$，则有

$$\Delta q=\delta q+\dot{q}\Delta t \tag{3.2}$$

(3.2)式对任意的标量、矢量和张量均成立，故有

$$\Delta\dot{q}=\delta\dot{q}+\ddot{q}\Delta t \tag{3.3}$$

对(3.2)式求导，并利用 Hölder 定义$\delta\dot{q}_a=d(\delta q_a)/dt$及(3.3)式，可得

$$\Delta\dot{q}=(\Delta q)^{\cdot}-\dot{q}(\Delta t)^{\cdot} \tag{3.4}$$

即Δ与d/dt具有不可交换性。

定义 Jourdain 型的非等时变分$\Delta_1\dot{q}$，$(\Delta_1 q)^{\cdot}$和$(\Delta_1 t)^{\cdot}$，它们满足

$$\Delta_1 t=0,\ \Delta_1 q=0$$

利用该条件及(3.3)和(3.4)，我们得

$$\Delta_1\dot{q}=\delta_1\dot{q} \tag{3.5}$$

$$(\Delta_1 q)^{\cdot}=\delta_1\dot{q}+\dot{q}(\Delta_1 t)^{\cdot} \tag{3.6}$$

$$\Delta_1\dot{q}=(\Delta_1 q)^{\cdot}-\dot{q}(\Delta_1 t) \tag{3.7}$$

四、非完整非有势系统相对于非惯性系的广义守恒律

我们引进$s+1$个对应于无穷小变换$(\Delta_1 q_{ar})^{\cdot}$，$(\Delta_1 t)^{\cdot}$的空间生成函数$F_1^a(t,q_{ar},\dot{q}_{ar})$和时间生成函数$f_1(t,\ q_{ar},\ \dot{q}_{ar})$，则

$$\left.\begin{array}{l}(\Delta_1 q)^{\cdot}=\varepsilon F_1^a(t,q_{ar},\dot{q}_{ar})\\(\Delta_1 t)^{\cdot}=\varepsilon f_1(t,q_{ar},\dot{q}_{ar})\end{array}\quad(a=1,2,\cdots,s)\right\} \tag{4.1}$$

据(3.5)～(3.7)，得

$$\delta_1\dot{q}_{ar}=\varepsilon[F_1^a(t,q_{ar},\dot{q}_{ar})-\dot{q}_{ar}f_1(t,q_{ar},\dot{q}_{ar})] \tag{4.2}$$

由(4.2)和(2.5)式知，生成函数必须满足

$$\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\dot{q}_{ar}}(F_1^a-\dot{q}_{ar}f_1)=0 \tag{4.3}$$

把(4.2)代入(2.7)，并整理得

$$\begin{aligned}\varepsilon\Big\{&\sum_{a=1}^{s}(Q_a+Q_a^{\dot{\omega}}+\Gamma_a)(F_1^a-\dot{q}_{ar}f_1)+\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial q_{ar}}F_1^a+\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{ar}}\dot{F}_1^a\\&-\left(\frac{\partial L_r}{\partial t}+\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial q_{ar}}\dot{q}_{ar}+\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{ar}}\ddot{q}_{ar}\right)f_1+\frac{\partial L_r}{\partial t}f_1\\&-\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{ar}}\dot{q}_{ar}\dot{f}_1-\frac{d}{dt}\Big[\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{ar}}(F_1^a-\dot{q}_{ar}f_1)\Big]\Big\}=0\end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4)加上并减去一个规范函数$\varepsilon\dot{P}(t,q_{ar},\dot{q}_{ar})$，并用到

$$\frac{dL_r}{dt}=\frac{\partial L_r}{\partial t}+\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial q_{ar}}\dot{q}_{ar}+\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{ar}}\ddot{q}_{ar}$$

则有

$$\begin{aligned}\varepsilon\Big\{&\sum_{a=1}^{s}(Q_a+Q_a^{\dot{\omega}}+\Gamma_a)(F_1^a-q_{ar}f_1)+\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial q_{ar}}F_1^a+\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{ar}}\dot{F}_1^a\\&+\left(L_r-\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{ar}}\dot{q}_{ar}\right)\dot{f}_1+\frac{\partial L_r}{\partial t}f_1-\dot{P}(t,q_{ar},\dot{q}_{ar})\\&-\frac{d}{dt}\Big[\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{ar}}F_1^a+\left(L_r-\sum_{a=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{ar}}\dot{q}_{ar}\right)f_1-P(t,q_{ar},\dot{q}_{ar})\Big]\Big\}=0\end{aligned} \tag{4.5}$$

从(4.5)和(4.3)，我们可以证明如下的定理。

定理 1 如果生成函数F_1^α，f_1和规范函数P满足

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\dot{q}_{\alpha r}}[F_1^\alpha(t,q_{\alpha r},\dot{q}_{\alpha r})-\dot{q}_{\alpha r}f_1(t,q_{\alpha r},\dot{q}_{\alpha r})]=0 \quad (\rho=1,2,\cdots,g) \tag{4.6}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial q_{\alpha r}}F_1^\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{\alpha r}}\dot{F}_1^\alpha+\left(L_r-\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{\alpha r}}\dot{q}_{\alpha r}\right)\dot{f}_1+\frac{\partial L_r}{\partial t}f_1$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^{\dot{\omega}}+\Gamma_\alpha)(F_1^\alpha-\dot{q}_{\alpha r}f_1)-\dot{P}(t,q_{\alpha r},\dot{q}_{\alpha r})=0 \tag{4.7}$$

则非性线非完整非有势系统相对于非惯性参考系的运动存在守恒量

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{\alpha r}}F_1^\alpha+\left(L_r-\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{\alpha r}}\dot{q}_{\alpha r}\right)f_1-P(t,q_{\alpha r},\dot{q}_{\alpha r})=\text{const}=c \tag{4.8}$$

这便是非惯性参考系中的广义 Noether 定理。我们把(4.6)和(4.7)称为非惯 性系的广义 Noether 等式。对于一般的非完整非有势系统相对于非惯性系的运动，可以通过 寻找广义 Noether 等式的$s+2$个函数F_1^α，f_1和P，得到守恒量。

非惯性系的 Noether 等式是$g+1$个方程，其数目小于$s+2$，故F_1^α，f_1和P不是唯一的。我们可以适当选择F_1^α，f_1，P，得到不同的守恒量。

非完整约束方程(2.4)不改变 Noether 等式(4.7)的形式，但却限制了F_1^α，f_1和P的选择范围，F_1^α，f_1，P必须同时满足非惯性系中的广义 Noether 等式(4.6)和(4.7)。

五、讨　论

我们得到的守恒律更具广泛的意义。

5.1 非惯性系中的经典守恒量

（1） 若取$F_1^\alpha=0$，$f_1=1$，$P=0$，则非惯性系的广义 Noether 等式(4.6)，(4.7) 退化为

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\dot{q}_{\alpha r}}\dot{q}_{\alpha r}=0 \quad (\rho=1,2,\cdots,g) \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial t}-\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^{\dot{\omega}}+\Gamma_\alpha)\dot{q}_{\alpha r}=0 \tag{5.2}$$

为非惯性系的守恒律(4.8)退化为

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{\alpha r}}\dot{q}_{\alpha r}-L_r=c \tag{5.3}$$

显然，如果满足

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\dot{q}_{\alpha r}}\dot{q}_{\alpha r}=k\varphi_\rho \quad (\rho=1,2,\cdots,g)$$

$$\sum_{a=1}^{s}(Q_a+Q_a^{\dot{\varphi}}+\Gamma_a)\dot{q}_{ar}=0,\qquad \frac{\partial L_r}{\partial t}=0$$

其中k为齐次性阶指数，则存在守恒量(5.3)．这即是非完整系统在非惯性系中的广义能量积分．

（2） 若有$Q_a+Q_a^{\dot{\varphi}}+\Gamma_a=0$，选取$F_1^1=1, F_1^j=0$ ($j>1$)，$f_1=0$，$P=0$，则 (4.6) 和(4.7)退化为

$$\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\dot{q}_{1r}}=0\quad(\rho=1,2,\cdots,g)\tag{5.4}$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial q_{1r}}=0\tag{5.5}$$

(4.8)化为

$$\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{1r}}=c\tag{5.6}$$

这便是非完整系统在非惯性系中对应于循环坐标q_{1r}的广义动量守恒量．

5.2　特殊情形

对于完整系，恒有$\partial\varphi_\rho/\partial\dot{q}_{ar}=0$，非惯性系的广义 Noether 等式 (4.6) 和(4.7)退化为(4.7)，本文的定理化为完整非有势系统相对于非惯性系的 Noether 定理．

如果$\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\omega}}=0$，则 $V^\omega=Q_a^{\dot{\varphi}}=\Gamma_a=0$，$L_r=T_r-V-V^0$，本文定理退化为非完整非有势系统相对于平动非惯性系的 Noether 定理．

如果非惯性系绕固定点转动，则$V^0=0$，$L_r=T_r-V-V^\omega$，本文定理化为非完整非有势系统相对于定点转动参考系的 Noether 定理．

如果$\mathbf{a}_0=0$，$\dot{\boldsymbol{\omega}}=0$，则$V^0=Q_a^{\dot{\varphi}}=0$、$L_r=T_r-V-V^\omega$，本文定理化为非完整非有势系统相对于匀连转动参考系的 Noether 定理．

对于惯性参考系，有

$$\mathbf{a}_0=\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\omega}}=0,$$
$$V^0=V^\omega=Q_a^{\dot{\varphi}}=\Gamma_a=0,\ \mathbf{r}_i'=\mathbf{r}_i,$$
$$q_{ar}=q_a,\ T_r=T,\ L_r=T-V=L$$

则(2.1)、(2.3)、(2.6)、(2.7)均化为惯性系的 Jourdain 型变分原理，而本文的广义 Noether 定理化为非线性非完整非有势系统相对于惯性系的 Noether 定理，得到文献[10]的结果．对于线性非完整系统、完整非保守系统或完整保守系统，则又依次分别化为文献[8]、文献[5,6,7]和文献[1]的惯性系结果．

以往的 Noether 定理均可作为本文定理的推论．

六、例　　子

参考系的载体以匀角速度ω绕固定轴转动，系统为一质量为m的质点在 Newton 力场中运动，其运动受有速度大小为常数的非线性非完整约束．

选取引力中心O为坐标系的原点，Oz 轴为参考系的转轴，用 $\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 表示坐标的单位矢量，则有$\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{k}$、$V^0=\Gamma_a=Q_a^{\dot{\varphi}}=0$，而

$$V=-\frac{mM\gamma}{r},\quad V^{*}=-\frac{1}{2}m(x^2+y^2)\omega^2$$

故

$$L_r=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{mM\gamma}{r}+\frac{1}{2}m(x^2+y^2)\omega^2$$

其中$M\gamma$是常数，约束方程为

$$\varphi=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2-c^2=0$$

取$q_{1r}=x$，$q_{2r}=y$，$q_{3r}=z$，则有

$$L_r=\frac{1}{2}m(\dot{q}_{1r}^2+\dot{q}_{2r}^2+\dot{q}_{3r}^2)+\frac{mM\gamma}{\sqrt{q_{1r}^2+q_{2r}^2+q_{3r}^2}}+\frac{1}{2}m(x^2+y^2)\omega^2$$

$$\varphi=\dot{q}_{1r}^2+\dot{q}_{2r}^2+\dot{q}_{3r}^2-c^2=0$$

广义陀螺力

$$\Gamma_x=-\sum_{\alpha=1}^{3}2m\dot{\omega}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_{\alpha r}}\times\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_{1r}}\right)\dot{q}_{\alpha r}=2m\omega\dot{y}$$

$$\Gamma_y=-\sum_{\alpha=1}^{3}2m\dot{\omega}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_{\alpha r}}\times\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_{2r}}\right)\dot{q}_{\alpha r}=-2m\omega\dot{x}$$

$$\Gamma_z=-\sum_{\alpha=1}^{3}2m\dot{\omega}\left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_{\alpha r}}\times\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial q_{3r}}\right)\dot{q}_{\alpha r}=0$$

其中 $\mathbf{r}'=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=q_{1r}\mathbf{i}+q_{2r}\mathbf{j}+q_{3r}\mathbf{k}$。

若取$F_1^{\alpha}=0$，$f_1=1$，$P=0$，则满足(4.6)和(4.7)式，有

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}_{\alpha r}}\dot{q}_{\alpha r}=2\varphi=0$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial t}-\sum_{\alpha=1}^{3}\Gamma_{\alpha}\dot{q}_{\alpha r}=0$$

故存在守恒量

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_{\alpha r}}\dot{q}_{\alpha r}-L_r=c$$

即

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{mM\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+n^2}}+\frac{1}{2}m(x^2+y^2)\omega^2=E_r=\mathrm{const}$$

这便是此非惯性系问题中的能量积分。

感谢汪家訸教授的热情帮助。

参 考 文 献

[1] Noether, A.E., *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Gottingen*, Nath. Phys. Kl., (1918), 235—237.

[2] 吴学谋，力学与实践，1 (2) (1979).

[3] 吴学谋，力学与实践，2 (3) (1980).
[4] Candotti, E., Palmieri, C. and B. Vitale, *Am. J. Phys.*, 40 (1972), 424—429.
[5] Djukic, Dj. S. and B. Vujanovic, *Acta Mechanica*, 23 (1975), 17—27.
[6] Vujanovic, B., *Int. J. Non-Linear Mech.*, 13 (1978), 185—197.
[7] Vujanovic, B., *Acta Mechanica*, 65 (1986), 63—80.
[8] 李子平，物理学报，12 (1981), 1659—1971.
[9] 李子平，新疆大学学报，6 (3) (1989), 37—43.
[10] 刘端，力学学报，21 (1) (1989), 76—83.
[11] 牛青萍，力学学报，7 (2) (1964).

Generalized Noether's Theorem of Nonholonomic Nonpotential System in Noninertial Reference Frames

Luo Shao-kai

(*Shangqiu Teachers College, Henan*)

Abstract

The new Lagrangian of the relative motion of mechanical system is constructed. And the variational principles of Jourdain's form of nonlinear nonholonomic nonpotential system in noninertial reference frame are established, the generalized Noether's theorem of the system above is presented and proved, and the conserved quantities of the system are studied.

Key words noninertial reference frame, nonholonomic constraint, conservation law of dynamics, Norther's theorem