

完全与不完全的随机网*

刘曾荣 许政范

(中科院力学所LNM开放实验室; 苏州大学) (上海海运学院)

王启高 侯殿辉

(苏州铁道师范学院) (上海海运学院)

摘 要

本文证明了鞍点连线网在小扰动下可以产生完全随机网和不完全随机网两种情况, 并按照动力系统理论讨论了两类随机网的结构。

关键词 完全随机网 不完全随机网 横截环 退化横截环

一、引 言

众所周知, 对于自由度大于2的Hamilton系统在等能面上存在复杂的Arnold网。如果取网上任一位置为初始点, 那么沿着网的运动是随机的, 这种现象被称为Arnold扩散。近年来的工作表明对于一个半自由度的Hamilton系统, 在一定的共振条件下, 也可以在相平面上产生类似于Arnold网的随机性^[1~3]。迄今为止, 通常认为这种网是相平面上的鞍点连线网中的鞍点连线在小扰动下发生破裂而形成。在小扰动作用, 鞍点连线是否一定会破裂? 这个问题至今没有从理论上很好加以探讨。我们认为, 鞍点连线网中异宿轨道在小扰动下可能全部破裂也可能只有部分发生破裂。对于第一种情况, 我们称所形成的随机网为完全随机网, 后一种情况被称为不完全随机网。

在第二节中, 我们给出了产生完全随机网的例子, 并且用横截环理论分析了完全随机网的结构。在第三节中通过一个例子讨论了不完全随机网的形成, 并提出了退化横截环理论, 用此理论详细分析了不完全随机网的结构。

二、完全随机网

我们考虑系统

$$\left. \begin{aligned} du/dt &= \sin u + e a \sin u \cos \omega t \\ dv/dt &= -\sin u + e b \sin u \cos \omega t \end{aligned} \right\} \quad (2.1).$$

* 1990年9月10日收到。

(2.1)_ε为一Hamilton系统, 其中Hamilton量为

$$H_ε(u, v) = -\cos u - \cos v + 2 - \varepsilon a \cos u v \cos \omega t + \varepsilon b \cos u \cos v \omega t \tag{2.2}$$

当ε=0时, (2.1)_ε的非扰动系统(2.1)_{ε=0}的Hamilton量为

$$H_0 = -\cos u - \cos v + 2 \tag{2.3}$$

在(u, v)相平面上, 存在可列多个双曲点和椭圆点, 它们分别为

双曲点((2m+1)π, 2nπ), (2mπ, (2n+1)π)

椭圆点(2mπ, 2nπ), ((2m+1)π, (2n+1)π)

(m, n=0, ±1, ±2, ……)

对应于H₀(u, v)=2, 存在由异宿轨道组成的鞍点连线网, 在网的每一个元胞内存在一族周期轨道. 图1给出了(2.1)_{ε=0}的鞍点连线网.

以AB、AD为例, 网中的异宿轨道的解为

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= 2\arctg \exp[t] \\ v(t) &= \pi - 2\arctg \exp[t] \end{aligned} \right\} \tag{2.4}$$

和

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= 2\arctg \exp[t] - \pi \\ v(t) &= 2\arctg \exp[t] \end{aligned} \right\} \tag{2.5}$$

在小扰动作用下, 这些异宿轨道所对应的稳定流形和不稳定流形之间位置发生了变化. 计算图1中异宿轨道AB和AD的Melnikov函数, 得到

$$M_{AB}(t_0, a, b, \omega) = (a+b)\omega\pi \operatorname{sech}\left(\frac{\omega\pi}{2}\right) \cos\omega t_0 \tag{2.6}$$

和

$$M_{AD}(t_0, a, b, \omega) = -(a+b)\omega\pi \operatorname{sech}\left(\frac{\omega\pi}{2}\right) \cos\omega t_0 \tag{2.7}$$

在t₀ ∈ [0, 2π/ω]内, M_{AB}和M_{AD}存在简单零点, 故AB和AD所对应的稳定流形和不稳定流形发生横截相交^[4]. 由于相平面(u, v)上其它异宿轨道平行于AB或AD, 且轨道表达式只相差一个常数, 它们的Melnikov函数与AB或AD的Melnikov函数是一致的, 因而这些轨道的稳定流形和不稳定流形都发生横截相交.

结论2.1 (2.1)_{ε=0}的鞍点连线网中的所有异宿轨道对应的稳定流形和不稳定流形在小扰动下都发生了横截相交.

满足上述结论2.1条件的随机网定义为完全随机网. 这样(2.1)_ε的随机网是一个完全随机网. 为了研究完全随机网的结构, 我们简单地介绍一下横截环理论.

定义2.1^[5] M是一个微分流形, f ∈ C^r(M)(r ≥ 1), p₁, p₂, …, p_n为f的互不相同的双曲不动点, 如果q_i ∈ W^u(p_i) ∩ W^s(p_{i+1}), 且 W^u(p_i) ∩_{q_i} W^s(p_{i+1}) (i=1, 2, …, n, p_{n+1}=p₁), 则称f具有横截n-环.

利用横截n-环概念, 可以证明.

定理2.1^[5] 如果f具有横截n-环, 则f存在横截同宿点, 即f具有Smale马蹄意义下的混沌.

定理2.2^[6] 如果p₁, p₂, …, p_n构成f的一个横截n-环

1
1
3
2
4

则有 (1) $\overline{W^u(p_1)} = \overline{W^u(p_2)} = \dots = \overline{W^u(p_n)}$

(2) $\overline{W^s(p_1)} = \overline{W^s(p_2)} = \dots = \overline{W^s(p_n)}$

依据横截环理论, 对于完全随机网可以得到如下结论:

结论2.2 完全随机网有无穷多个Smale马蹄构成, 在完全随机网上的运动是浑沌的.

结论2.3 完全随机网中所有鞍点的不稳定流形的闭包相同, 即存在一个由所有不稳定流形构成的整体结构.

现在, 我们就能正确地理解为什么随机运动可以沿着整个完全随机网进行.

三、不完全随机网

考虑系统

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \sin v + \sin \frac{v}{2} \cos \left(\frac{\sqrt{3}u}{2} \right) + \varepsilon a \sin v \cos \omega t \\ \frac{dv}{dt} &= -\sqrt{3} \cos \left(\frac{v}{2} \right) \sin \left(\frac{\sqrt{3}u}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.1).$$

(3.1)_ε为一Hamilton系统, 其Hamilton量为

$$H_\varepsilon(u, v) = -\cos v - 2 \cos \left(\frac{v}{2} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}u}{2} \right) + 3 - \varepsilon a \cos v \cos \omega t \quad (3.2)$$

当ε=0时非扰动系统(3.1)_{ε=0}的Hamilton量为

$$H_0(u, v) = -\cos v - \cos \left(\frac{v}{2} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}u}{2} \right) \quad (3.3)$$

在(u, v)相平面上, 存在有可列个奇点, 它们为

双曲点 $(2(2m+1)\pi/\sqrt{3}, 2n\pi), (4m\pi/\sqrt{3}, 2(2n+1)\pi),$

$((2m+1)\pi/\sqrt{3}, (2n+1)\pi)$

椭圆点 $(2m\pi/\sqrt{3}, 4(n+1)\pi/\sqrt{3}), (2m+1)\pi/\sqrt{3}, 2(2n+1)\pi/\sqrt{3})$

$(m, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

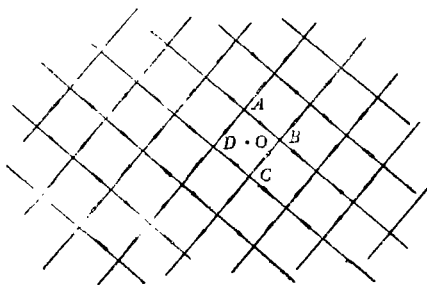
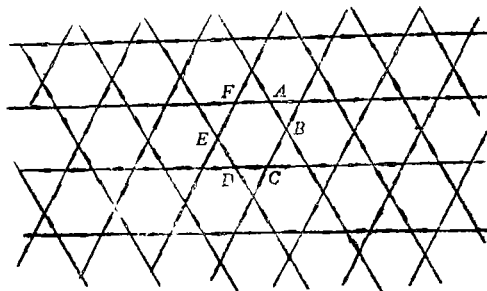


图1. (2.1)_{ε=0}的鞍点连线网



2. (3.1)_{ε=0}的鞍点连线网

当 $H_0(u, v) = 4$ 时, 由异宿轨道形成一个鞍点连线网, 在每一个网格内存在一族周期轨道. 图2给出了(3.1)_{ε=0}的鞍点连线网.

以 AB 、 AF 、 FE 为例，鞍点连线网中的异宿轨道的表达式为

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= -(2/\sqrt{3}) \operatorname{arctg} \left(\exp \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} t \right] \right) + 2\pi/\sqrt{3} \\ v(t) &= 2 \operatorname{arctg} \left(\exp \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} t \right] \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= (2/\sqrt{3}) \operatorname{arctg} \left(\exp \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} t \right] \right) + (-2\pi/\sqrt{3}) \\ v(t) &= 2 \operatorname{arctg} \left(\exp \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} t \right] \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= (4/\sqrt{3}) \operatorname{arctg} \left(\exp \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} t \right] \right) - \pi/\sqrt{3} \\ v(t) &= \pi \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

显然(3.6)式所代表的异宿轨道仍是(3.1)₀的解，即在小扰动的作用下，(3.6)所代表的异宿轨道不发生破裂。对于其它两类异宿轨道，由于对称性，我们只要讨论图2中的 AB 和 FE 。计算 AB 和 FE 的 Melnikov 函数得到

$$M_{AB}(t_0, \alpha, \omega) = 2\sqrt{3} \pi \omega \alpha \operatorname{sech} \left(\frac{\omega \pi}{\sqrt{3}} \right) \cos \omega t_0 \quad (3.7)$$

$$M_{FE}(t_0, \alpha, \omega) = -2\sqrt{3} \pi \omega \alpha \operatorname{sech} \left(\frac{\omega \pi}{\sqrt{3}} \right) \cos \omega t_0 \quad (3.8)$$

在 $t_0 \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega} \right]$ 时， M_{AB} 和 M_{FE} 有简单零点，因而 AB 和 FE 的稳定流形和不稳定流形必定横截相交。这样可以断定在小扰动作用下，除了位于 $v = (2k+1)\pi$ ， $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 上的异宿轨道，所有异宿轨道所代表的稳定流形和不稳定流形必然横截相交。

根据上述结果，我们可以看到(3.1)₀的鞍点连线网在小扰动作用下所形成的随机网是完全不同于完全随机网。在现在随机网中存在大量没有破裂的异宿轨道，它们把网分割成一些不同的子网。在子网内部的每一条异宿轨道的稳定流形和不稳定流形是横截相交的。我们称这样的随机网为不完全随机网。

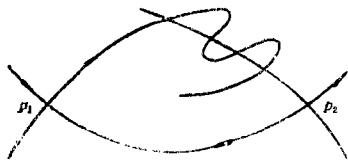


图3 退化的横截2环



图4 定理3.1示意图

为了研究不完全随机网上运动，我们引入了新的概念和有关结果。

定义3.1 M 是一个微分流形， $f \in \mathcal{F}^r(M)$ ($r \geq 1$)， p_1, p_2, \dots, p_n 是 f 的不同双曲不动点， $W^u(p_i)$ 和 $W^s(p_{i+1})$ ($i=1, 2, \dots, n, p_{n+1}=p$) 是横截相交或者部分重合，如果两种情况

同时存在, 称 f 具有一个退化的横截 n 环. 图3是退化横截2环的示意图.

定理3.1 如果 f 有退化横截 n 环, 则 f 没有横截同宿点.

证 由归纳法可知, 我们只要证明退化横截2环情况. 下面用反证法加以证明(见图4).

如果 f 有横截同宿点, 即存在 $q' \in W^u(p_1) \cap W^s(p_1)$, 且 $W^u(p_1) \bar{\cap} q'W^s(p_1)$. 设 B 是包含 p_2 的拓扑开球, 且 $BCW^u(p_2)$; D 是包含 q 和 q' 的拓扑开球, 且 $DCW^u(p_1)$, 由于 $W^u(p_1) \bar{\cap} qW^s(p_2)$, 由Lambda引理知对给定 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbb{Z}$, 使得当 $n \geq n_0$ 时, D_n 与 B 为 ε 、 C^1 接近. 又因为 B 可以任意选择, 可以认为 D_n 是包含在 B_n 中, 其中 $B_n = B \times B_1$, B_1 是包含 p_2 的拓扑开球, 且 $B_1CW^s(p_2)$, $f^n(q') \in D_n$, 且 $D_n \bar{\cap} f^n(q')W^s(p_1)$, 则必存在 $r \in B$, 使得 $W^s(p_1) \bar{\cap} rB$, 即 $W^s(p_1) \bar{\cap} W^u(p_2)$ 得到矛盾.

定理3.2 在退化横截 n 环中所有发生横截相交的不稳定流形(或者稳定流形), 最终都收敛到退化部分.

依据这些结果, 我们可以清楚看到, 每一个子网中运动都是孤立的, 这种运动不能扩散到整个不完全随机网上. 同时运动也不具有Smale马蹄意义下的浑沌.

结论3.1 在不完全随机网中, 每一个子网都是独立的.

结论3.2 每一个子网上的运动最终都收敛到没有破裂的异宿轨道上去.

四、结 论

我们的工作说明了在小扰动作用下, 由鞍点连线网所形成的随机网分成二种不同类型, 一种为完全随机网, 另一种为不完全随机网. 不同扰动方式可能导至不同形式的随机网. 对于不同类型的随机网, 它的结构是不相同的. 在完全随机网上的运动是随机的而且能扩散到整个网上; 而在不完全随机网上的运动只能限于一个子网中且不是浑沌性质的.

参 考 文 献

- [1] Chernikov, A. A. et al., Stochastic webs, *Physica D*, **33** (1988), 65.
- [2] Chernikov, A. A. et al., Some peculiarities of stochastic layer and stochastic web formation, *Physics Letter A*, **122** (187), 39.
- [3] Murakami, S. et al., Development of stochastic webs in a wave-driven linear oscillator, *Physica D*, **32** (1988), 269.
- [4] Guckerheimer, J. and Holmes P. J., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag (1983).
- [5] 严寅、钱敏, 横截环及其对Henan映射的应用, 科学通报, **29** (1985), 961.
- [6] 刘曾荣、曹永罗, 横截环和不变流形(待发表).

Completed and Incompleted Stochastic Webs

Liu Zeng-rong

*(LNM Institute of Mechanics Chinese Academy of Sciences, Department
of Mathematics, Suzhou University, Suzhou)*

Xu Zheng-fan

(Shanghai Maritime Institute, Shanghai)

Wang Qi-gao

(Suzhou Railway Teachers College, Suzhou)

Hou Dian-hui

(Shanghai Maritime Institute, Shanghai)

Abstract

In this paper, the completed stochastic web and incompleted stochastic web produced by the perturbed saddle separatrix net are given. The structural properties of two kinds of web are discussed by means of the dynamical system theory.

Key words completed stochastic web, incompleted stochastic web, transversal heteroclinic cycle, degenerated transversal heteroclinic cycle