应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

非线性非定常系统在经常作用干扰下的稳定性定理——李雅普诺夫间接法*

张书顺　商大中

（哈尔滨船舶工程学院，1989年3月5日收到）

摘　要

研究在经常作用干扰下的稳定性是研究李雅普诺夫意义下稳定性的深入和发展，并且更有实际意义，因为干扰往往并不是一次的。关于经常作用干扰下的稳定性，马尔金(И. Г. Малкин)提出了一个一般定理；但实用它必须找出满足一定条件的李雅普诺夫函数。这对于非线性非定常系统是很困难的。

本文根据李雅普诺夫间接法的原理，将之推广应用到判别非线性非定常系统在经常作用干扰下的稳定性，证明了一个重要结论。

关键词　非定常系统　经常干扰　一致渐近稳定　状态转移矩阵

了解运动稳定性理论的人们都知道，判定非线性系统稳定性的方法有所谓李雅普诺夫第一方法和李雅普诺夫第二方法。前者也称间接法。间接法的原理是，将非线性系统线性化成为线性近似系统，通过判定线性近似系统的稳定性来判别原非线性系统的稳定性。

间接法是作为判定非线性系统在李雅普诺夫意义下稳定性的常用而有效的方法。它对于判别非线性系统在经常作用干扰下的稳定性是否适用呢？为解决这一课题，本文给出并证明下述定理。

定理 1　考虑非线性非定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t)) \tag{1}$$

假设$\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$连续可微，且$\mathbf{f}(t,0)=0$

置

$$\mathbf{A}(t)=\left[\frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]_{\mathbf{x}=0} \tag{2}$$

即，$\mathbf{A}(t)$表示$\mathbf{f}(t,\ \mathbf{x})$的Jacobi矩阵在$\mathbf{x}=0$之值。

$$\mathbf{h}(t,\mathbf{x})=\mathbf{f}(t,\mathbf{x})-\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

---

* 李骊推荐。

设

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|\to 0}\ \sup_{t\geqslant 0}\frac{\|\mathbf{h}(t,\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}=0 \tag{3}$$

$\mathbf{A}(t)$有界。

在上述条件下，如果线性系统

$$\dot{y}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \tag{4}$$

的平衡点$\mathbf{0}$在$[0,\infty)$上一致渐近稳定，则系统(1)的平衡点$\mathbf{0}$在经常作用干扰下稳定。

证明 И. Г. Малкин曾给出下述定理：

如果对于干扰运动的微分方程

$$\frac{dx_s}{dt}=X_s(t,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\qquad (s=1,2,\cdots,n)$$

存在正定函数$V(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其由这些方程构成的对时间的全导数$\dot{V}(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$是负定函数，并且在区域$t\geqslant 0,|x_s|\leqslant H$中偏导数$\partial V/\partial x_s$有界，则未干扰运动在经常作用下扰下是稳定的。

由此可知，要证明我们给出的定理，只需选取一个满足 И. Г. Малкин 定理条件的正定函数$V(t,\mathbf{x})$。

由于系统(4)的平衡点$\mathbf{0}$在$[0,\infty)$上一致渐近稳定，选取$\mathbf{Q}=\mathbf{I}$连续有界，则由有关引理[1]推得矩阵

$$\mathbf{P}(t)=\int_t^\infty \mathbf{\Phi}^T(\tau,t)\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,t)d\tau=\int_t^\infty \mathbf{\Phi}^T(\tau,t)\mathbf{\Phi}(\tau,t)d\tau$$

对一切$t\geqslant 0$是完全确定的正定函数，且对某正数α和β，满足不等式

$$\alpha\mathbf{x}^T\mathbf{x}\leqslant\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}\leqslant\beta\mathbf{x}^T\mathbf{x}\qquad (\forall\,\mathbf{x}\in R^n,\qquad \forall\,t\geqslant 0) \tag{5}$$

其中 $\mathbf{\Phi}(\tau,t)$是与$\mathbf{A}(\tau)$有关的状态转移矩阵。

因此，函数

$$V(t,\mathbf{x})=\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}$$

是渐减正定函数。

求函数$V(t,\mathbf{x})$关于系统(1)的全导数，得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,\mathbf{x})&=\mathbf{x}^T\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}+\mathbf{f}^T(t,\mathbf{x})\mathbf{P}(t)\mathbf{x}+\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{f}(t,\mathbf{x})\\&=\mathbf{x}^T[\dot{\mathbf{P}}(t)+\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)]\mathbf{x}+2\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{h}(t,\mathbf{x})\end{aligned} \tag{6}$$

而式中

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}(t)&=\frac{d}{dt}\left[\int_t^\infty \mathbf{\Phi}^T(\tau,t)\mathbf{\Phi}(\tau,t)d\tau\right]\\&=\frac{d}{dt}\left[\int_t^0 \mathbf{\Phi}^T(\tau,t)\mathbf{\Phi}(\tau,t)dt+\int_0^\infty \mathbf{\Phi}^T(\tau,t)\mathbf{\Phi}(\tau,)d\tau\right]\\&=\int_t^0[\mathbf{\Phi}^T(\tau,t)]'\mathbf{\Phi}(\tau,t)d\tau+\int_t^0 \mathbf{\Phi}^T(\tau,t)\mathbf{\Phi}'(\tau,t)d\tau-\mathbf{\Phi}^T(t,t)\mathbf{\Phi}(t,t)\\&\quad+\int_0^\infty[\mathbf{\Phi}^T(\tau,t)]'\mathbf{\Phi}(\tau,t)d\tau+\int_0^\infty \mathbf{\Phi}^T(\tau,t)\mathbf{\Phi}'(\tau,t)d\tau\\&=\int_t^\infty[\mathbf{\Phi}^T(\tau,t)]'\mathbf{\Phi}(\tau,t)d\tau+\int_t^\infty \mathbf{\Phi}^T(\tau,t)\mathbf{\Phi}'(\tau,t)d\tau-\mathbf{I}\end{aligned}$$

其中$[\mathbf{\Phi}^T(\tau,t)]'=[\mathbf{\Phi}'(\tau,t)]^T$

根据公式

$$[\mathbf{B}^{-1}(t)]'=-\mathbf{B}^{-1}(t)\mathbf{B}'(t)\mathbf{B}^{-1}(t)$$

则

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}'(\tau,t)&=[\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)]'=-\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)\mathbf{\Phi}'(t,\tau)\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)\\&=-\mathbf{\Phi}(\tau,t)\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{\Phi}^{-1}(t,\tau)=-\mathbf{\Phi}(\tau,t)\mathbf{A}(t)\end{aligned}$$

$$[\mathbf{\Phi}^T(\tau,t)]'=[\mathbf{\Phi}'(\tau,t)]^T=[-\mathbf{\Phi}(\tau,t)\mathbf{A}(t)]^T=-\mathbf{A}^T(t)\mathbf{\Phi}^T(\tau,t)$$

所以

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}(t)&=-\int_t^\infty \mathbf{A}^T(t)\mathbf{\Phi}^T(\tau,t)\mathbf{\Phi}(\tau,t)d\tau-\int_t^\infty\mathbf{\Phi}^T(\tau,t)\mathbf{\Phi}(\tau,t)\mathbf{A}(t)d\tau-\mathbf{I}\\&=-\mathbf{A}^T(t)\mathbf{P}(t)-\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)-\mathbf{I}\end{aligned}\tag{7}$$

将(7)代入(6)，得

$$\dot{V}(t,\mathbf{x})=-\mathbf{x}^T\mathbf{x}+2\mathbf{x}\mathbf{P}(t)\mathbf{h}(t,\mathbf{x})$$

由条件(3)，适当选取正数$r>0$，使有

$$\|\mathbf{h}(t,\mathbf{x})\|\leqslant\frac{1}{3\beta}\|\mathbf{x}\|\qquad(\text{对具有}\|\mathbf{x}\|<r\text{的所有}\mathbf{x},\ \forall t\geqslant0)\tag{8}$$

则由式(5)和(8)，得

$$\begin{aligned}|2\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{h}(t,\mathbf{x})|&=\left|2\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}\frac{\mathbf{h}(t,\mathbf{x})}{\mathbf{x}}\right|\\&\leqslant|2\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}|\left|\frac{\mathbf{h}(t,\mathbf{x})}{\mathbf{x}}\right|\\&\leqslant2\beta\mathbf{x}^T\mathbf{x}\cdot\frac{1}{3\beta}\\&=\frac{2}{3}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\qquad(\text{当}\|\mathbf{x}\|<r,\ \forall t\geqslant0)\end{aligned}$$

所以

$$\dot{V}(t,\mathbf{x})\leqslant-\frac{1}{3}\mathbf{x}^T\mathbf{x}\qquad(\text{当}\|\mathbf{x}\|<r,\ \forall t\geqslant0)$$

由上述可知，对于系统(1)存在正定函数$V(t,\mathbf{x})$，其关于系统(1)的全导数$\dot{V}(t,\mathbf{x})$是负定函数。

此外，由于矩阵$\mathbf{Q}=\mathbf{I}$连续有界，系统(4)的平衡点$\mathbf{0}$在$[0,\infty)$上一致渐近稳定，则矩阵$\mathbf{P}(t)$是t的有界函数[1]。因此，二次型$\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}$对$x_s(s=1,2,\cdots,n)$的偏导数$\partial V/\partial x_s$必在区域$|x_s|\leqslant H$ $(H\leqslant r,\ t\geqslant0)$中有界。

所以所选取的李雅普诺夫函数$V(t,\mathbf{x})$满足马尔金定理所需的条件，则非线性非定常系统(1)的平衡点$\mathbf{0}$在经常作用干扰下稳定。

根据上述定理及线性系统(4)一致渐近稳定的充要条件[2]，定理1可改作如下的表述。

定理2 考虑非线性非定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}(t))\tag{1}$$

假设$\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$连续可微，且$\mathbf{f}(t,\mathbf{0})=\mathbf{0}$

置

$$\mathbf{A}(t)=\left[\frac{\partial \mathbf{f}(t,\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]_{\mathbf{x}=0} \tag{2}$$

$$\mathbf{h}(t,\mathbf{x})=\mathbf{f}(t,\mathbf{x})-\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$

设

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|\to 0}\ \sup_{t\geq 0}\frac{\|\mathbf{h}(t,\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}=0 \tag{3}$$

$\mathbf{A}(t)$有界。

在上述条件下，如果线性系统

$$\dot{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \tag{4}$$

满足条件：

$$\sup_{t_0\geq 0}\ \sup_{t\geq t_0}\ \|\mathbf{\Phi}(t,t_0)\|_i\triangleq m_0<\infty \tag{9}$$

$$\|\mathbf{\Phi}(t,t_0)\|_i\to 0 \qquad (\text{当}t\to\infty\text{时，对}t_0\text{一致}) \tag{10}$$

或存在正常数m和λ，使得

$$\|\mathbf{\Phi}(t,t_0)\|_i\leqslant m\exp[-\lambda(t-t_0)] \qquad (\forall t\geqslant t_0,\ \forall t_0) \tag{11}$$

则系统(1)的平衡点$\mathbf{0}$在李雅普诺夫意义下一致渐近稳定，且在经常作用干扰下稳定。其中 $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$是与$\mathbf{A}(t)$有关的状态转移矩阵，且是方程

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t,t_0)=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)$$

$$\mathbf{\Phi}(t_0,t_0)=\mathbf{I}$$

的唯一解。

应用定理 2 需要计算状态转移矩阵. 求状态转移矩阵，就是求解下面的矩阵微分方程的初值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\mathbf{\Phi}(t,t_0)=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)\\&\mathbf{\Phi}(t_0,t_0)=\mathbf{I}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

下面我们简要地例举几种计算方法。

1. 一般方法

记

$$\mathbf{\Phi}(t,t_0)=\begin{bmatrix}\varphi_{11}(t,t_0) & \cdots & \varphi_{1n}(t,t_0)\\ \varphi_{21}(t,t_0) & \cdots & \varphi_{2n}(t,t_0)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{n1}(t,t_0) & \cdots & \varphi_{nn}(t,t_0)\end{bmatrix}=[\varphi_{ij}(t,t_0)] \qquad (i,j=1,\cdots,n)$$

$$\mathbf{A}(t)=[a_{ij}(t)] \qquad (i,j=1,\cdots,n)$$

$$\mathbf{\Phi}(t_0,t_0)=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}=[\delta_{ij}] \qquad (i,j=1,\cdots,n)$$

或 $$\varphi_{11}(t_0,t_0)=\varphi_{22}(t_0,t_0)=\cdots=\varphi_{nn}(t_0,t_0)=1$$

$$\varphi_{ij}(t_0,t_0)=0 \quad (i\neq j)$$

那么，初值问题(12)就是解下列线性方程组：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\varphi_{11}(t,t_0)}{dt} &= a_{11}(t)\varphi_{11}(t,t_0)+a_{12}(t)\varphi_{21}(t,t_0)+\cdots+a_{1n}(t)\varphi_{n1}(t,t_0)\\
&\vdots\\
\frac{d\varphi_{ij}(t,t_0)}{dt} &= a_{i1}(t)\varphi_{1j}(t,t_0)+a_{i2}(t)\varphi_{2j}(t,t_0)+\cdots+a_{in}(t)\varphi_{nj}(t,t_0)\\
&\vdots\\
\frac{d\varphi_{nn}(t,t_0)}{dt} &= a_{n1}(t)\varphi_{1n}(t,t_0)+a_{n2}(t)\varphi_{2n}(t,t_0)+\cdots+a_{nn}(t)\varphi_{nn}(t,t_0)
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

其初始条件为

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{11}(t_0,t_0)=\cdots=\varphi_{nn}(t_0,t_0)=1\\
&\varphi_{ij}(t_0,t_0)=0 \qquad (i\neq j)
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

一般地说，要获得方程(13)的解析解是比较困难的。可由数字电子计算机计算求出其近似解。

2. **用数值方法计算$\Phi(t,t_0)$** 为此可将之展开成级数形式[3]:

$$\Phi(t,t_0)=\mathbf{I}+\int_{t_0}^{t}\mathbf{A}(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\mathbf{A}(\tau_1)\left[\int_{t_0}^{\tau_1}\mathbf{A}(\tau_2)d\tau_2\right]d\tau_1+\cdots \tag{15}$$

3. **如果$(t-t_0)$较小，$\Phi(t,t_0)$可以用近似计算方法获得** 为此，将$\Phi(t,t_0)$在t_0处展开为矩阵形式的Taylor级数：

$$\Phi(t,t_0)=\Phi(t_0,t_0)+\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt}\Big|_{t=t_0}(t-t_0)+\frac{1}{2!}\frac{d^2\Phi(t,t_0)}{dt^2}\Big|_{t=t_0}\cdot(t-t_0)^2+o\left((t-t_0)^2\right) \tag{16}$$

由于

$$\Phi(t_0,t_0)=\mathbf{I}$$

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt}\Big|_{t=t_0}=\mathbf{A}(t_0)\Phi(t_0,t_0)=\mathbf{A}(t_0)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\Phi(t,t_0)}{dt^2}\Big|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\Phi(t,t_0)]|_{t=t_0}\\
&=\left[\dot{\mathbf{A}}(t)+\mathbf{A}(t)\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt}\right]\Big|_{t=t_0}\\
&=\dot{\mathbf{A}}(t_0)+\mathbf{A}(t_0)\mathbf{A}(t_0)\Phi(t_0,t_0)\\
&=\dot{\mathbf{A}}(t_0)+\mathbf{A}^2(t_0)\mathbf{I}
\end{aligned}$$

则(16)式变为

$$\Phi(t,t_0)=\mathbf{I}+\mathbf{A}(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2!}[\dot{\mathbf{A}}(t_0)+\mathbf{A}^2(t_0)](t-t_0)^2+o((t-t_0)^2) \tag{17}$$

4. 特殊情况，**如果A是常数矩阵，**(17)**式成为**

$$\Phi(t)=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2+\frac{\mathbf{A}^3}{3!}t^3+\cdots+\frac{\mathbf{A}^k}{k!}t^k+\cdots=\exp[\mathbf{A}t] \tag{18}$$

这时，$\Phi(t)$是

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}=\mathbf{A}\Phi(t)$$

在初始条件

$$\Phi(0)=\begin{bmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{bmatrix}$$

下的解。

从我们给出的定理2条件知道，应用定理时，只需算出转移矩阵的导出范数 $\|\Phi(t,t_0)\|_i$ 的上限即可。因此，有时可不必求出$\Phi(t,t_0)$，可以用矩阵测度估值定理确定$\|\Phi(t,t_0)\|_i$的上限。

5. 矩阵测度估值定理[1] 设非定常线性系统(4)的转移矩阵为$\Phi(t,t_0)$，则有不等式

$$\exp\left\{\int_{t_0}^{t}-\mu_i[-\mathbf{A}(\tau)]d\tau\right\}\leqslant\|\Phi(t,t_0)\|_i\leqslant\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\mu_i[\mathbf{A}(\tau)]d\tau\right\} \tag{19}$$

其中 $\mu[\mathbf{A}(\tau)]$为矩阵$\mathbf{A}(\tau)$的测度，并有以下公式

$$\left.\begin{aligned}\mu_{i\infty}(\mathbf{A})&=\max_i\left\{a_{ii}+\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\right\}\\ \mu_{i1}(\mathbf{A})&=\max_j\left\{a_{jj}+\sum_{i\neq j}|a_{ij}|\right\}\\ \mu_{i2}(\mathbf{A})&=\lambda_{\max}[(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)]/2\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

其中 $\mathbf{A}^*$是$\mathbf{A}$的共轭转置矩阵，即$\mathbf{A}^*=(\widetilde{\mathbf{A}})^T$，当$\mathbf{A}$为实阵时，则$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}^T$；$\lambda_{\max}[(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)]$是$(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)$的最大特征值。

我们可以应用不等式(19)的右半部来估计$\|\Phi(t,t_0)\|_i$的值。

推论(特例) 考虑非线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \tag{21}$$

假设$\mathbf{f}(x)$连续可微，且$\mathbf{f}(0)=0$，置

$$\mathbf{A}=\left[\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right]_{\mathbf{x}=0} \tag{22}$$

如果$\mathbf{A}$的所有特征根都有负实部，则系统(21)的平衡点$\mathbf{0}$在李雅普诺夫意义渐下近稳定，并且在经常作用干扰下稳定。

事实上，由于$\mathbf{A}$的所有特征根都有负实部，则系统(21)的线性近似系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)$$

必渐近稳定；根据定理，系统(21)的平衡点$\mathbf{0}$在经常作用干扰下稳定。

下面我们应用定理2对一类力学系统研究其在经常作用干扰下的稳定性。

例如，一个受有势力、陀螺力和阻尼（包括约束阻尼）作用的完整、理想、非保守力学系统，可由Lagrange方程描述：

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j}-\frac{\partial R}{\partial q_j}+\Gamma_j\qquad(j=1,2,\cdots,n) \tag{23}$$

其中 q_1，q_2，…，q_n为广义坐标，可记为列矩$\mathbf{q}=[q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n]^T$，$T$为系统的动能，$U$为力函数，$\dot{q}_j$为广义速度，$R=\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}/2+\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{F}\mathbf{q}$为阻尼函数，$\mathbf{D}$为正定或半正定阻尼矩阵，$\mathbf{F}=-\mathbf{F}^T$为反对称约束阻尼矩阵，$\Gamma_j$为陀螺力。

这类方程可以通过一个非奇异线性变换转换成矩阵微分方程[4]：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}+(\mathbf{B}+\mathbf{G})\dot{\mathbf{x}}+(\mathbf{K}+\mathbf{F})\mathbf{x}+\mathbf{f}(\mathbf{x})=0 \tag{24}$$

其中 $\mathbf{x}$为n维状态向量，$\mathbf{M}$为对称正定矩阵，$\mathbf{B}$为对称正定或半正定阻尼矩阵，$\mathbf{G}=-\mathbf{G}^T$为反对称陀螺矩阵，$\mathbf{F}=-\mathbf{F}^T$为反对称约束阻尼矩阵，$\mathbf{K}=\mathbf{K}^T$为正定矩阵，$\mathbf{f}(\mathbf{x})$为不低于二阶的全纯向量函数。

如果取方程(24)的零解 $\mathbf{x}=0$ 为未扰运动，则在其邻域，方程(24)的一次近似微分方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}+(\mathbf{B}+\mathbf{G})\dot{\mathbf{x}}+(\mathbf{K}+\mathbf{F})\mathbf{x}=0 \tag{25}$$

显然，零解也是式(25)的未扰运动。则式(24)和(25)即为对应的扰动运动微分方程。如果方程的某些系数显含时间t，则系统(24)和(25)均为非定常系统，(24)是非线性系统，(25)是(24)的近似线性系统。

我们应用定理2研究系统(24)在经常作用干扰下的稳定性，为此，我们需要将(25)化成一阶矩阵微分方程，这只需简单地变换即可。

设$\mathbf{y}_1=\mathbf{x}$，$\mathbf{y}_2=\dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{y}}_1$，均为$n$维向量，则式(25)变换为

$$\dot{\mathbf{y}}_1=\mathbf{y}_2$$

$$\dot{\mathbf{y}}_2=-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}+\mathbf{F})\mathbf{y}_1-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{B}+\mathbf{G})\mathbf{y}_2$$

或

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{y}}_1\\ \dot{\mathbf{y}}_2\end{bmatrix}=\mathbf{A}(t)\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix} \tag{26}$$

其中

$$\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}\\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}+\mathbf{F}) & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{B}+\mathbf{G})\end{bmatrix}$$

为判别稳定性，我们利用式(16)，为此，先求矩阵$\mathbf{A}(t)$的测度，可选用(20)中的任何一个公式，比如采用第三个公式。

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}+\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}+\mathbf{F})\\ \mathbf{I}-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}+\mathbf{F}) & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{B}+\mathbf{G})\end{bmatrix}$$

矩阵$\mathbf{B}$的特征方程：

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B}|=\begin{vmatrix}\lambda\mathbf{I} & \mathbf{I}-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}+\mathbf{F})\\ \mathbf{I}-\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{K}+\mathbf{F}) & \lambda\mathbf{I}+\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{B}+\mathbf{G})\end{vmatrix}=0 \tag{27}$$

由此得$\mathbf{B}$的最大特征值$\lambda_{max}(\mathbf{B})$，则矩阵$\mathbf{A}(t)$的测度为

$$\mu_{t2}(\mathbf{A})=\lambda_{max}(\mathbf{B})/2\triangleq\bar{\lambda}(t) \tag{28}$$

如果对于$t\geqslant t_0$，$t_0\geqslant 0$，$\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\bar{\lambda}(\tau)d\tau\right\}$有界，且

$$\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\bar{\lambda}(\tau)d\tau\right\}\to 0\ (\text{当}t\to\infty)$$

根据不等式(19)的右部，显然有

$$\sup_{t_0\geqslant 0}\ \sup_{t\geqslant t_0}\|\Phi(t,t_0)\|_i\triangleq m_0<\infty \tag{29}$$

$$\|\Phi(t,t_0)\|_i\to 0\ (\text{当}\ t\to\infty\text{时对}t_0\text{一致}) \tag{30}$$

因此，满足定理2的条件(9)和(10)，所以，非线性系统(24)的零解（平衡点）在李雅普诺夫意义下一致渐近稳定，且在经常作用干扰下稳定

参 考 文 献

[1] Vidyasagar, M., Nonlinear systems analysis, Prentice-Hall, *Inc.*, *Englowood Cliffs*, New Jersey (1978), 179—181, 71.

[2] 秦化淑、林正国，常微分方程及其应用，国防工业出版社 (1985), 159—161.

[3] Ogata, K. (绪方胜彦), *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall, Inc. (1970). 中译本，卢伯英等译《现代控制工程》，科学出版社 (1980), 530.

[4] 王照林、曾凡才，大系统方法与部分充液系统的三轴稳定性分析，力学学报，**20**, 2 (1988), 49—50.

The Theorem of the Stability of Nonlinear Nonautonomous Systems under the Frequently—Acting Perturbation —— Liapunov's Indirect Method

Zhang Shu-shun　　Shang Da-zhong

(*Haerbin Shipbuilding Engineering Institute, Haerbin*)

Abstract

In this paper the stability of nonlinear nonautonomous systems under the frequently-acting perturbation is studied. This study is a forward development of the study of the stability in the Liapunov sense; furthermore, it is of significance in practice since perturbations are often not single in the time domain. Malkin proved a general theorem about the subject. To apply the theorem, however, the user has to construct a Liapunov function which satisfies specified conditions and it is difficult to find such a function for nonlinear nonautonomous systems. In the light of the principle of Liapunov's indirect method, which is an effective method to decide the stability of nonlinear systems in the Liapunov sense, the authors have achieved several important conclusions expressed in the form of theorems to determine the stability of nonlinear nonautonomous systems under the frequently-acting perturbation.

Key words nonautonomous system, frequently-acting perturbation, uniformly asymptotical stability, state transition matrix