应用数学和力学，第12卷第6期（1991年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非定常修正下平面Poiseuille流动的线性稳定性性质*

周 哲 玮

（上海工业大学，上海市应用数学和力学研究所，1990年6月10日收到）

摘 要

本文在文[1]的基础上，用多重尺度法进一步研究了在非定常修正剖面作用下平面Poiseuille流动的线性稳定性性质，发现文[1]所给出的修正剖面在扰动发展的初期，在一定条件下会促进扰动的发展，从而增大流动失稳的可能性．

关键词 流体流动 稳定性 非定常 平面Poiseuille流 多重尺度法

一、引 言

作者在文[1]中提出了一种经过修正的层流流动的流动稳定性理论，并给出了平行剪切流中平均速度的一类修正剖面．利用这种理论并引进这类剖面，作者对平行剪切流，尤其是平面 Couette 流和圆管 Poiseuille 流的稳定性特性作了一些探索性研究，得到了一些有趣的结果[1],[2]．

作者所给出的修正剖面是随时间而衰减的，并能与基本层流流动同时存在于流场之中．分析这种复合流动的稳定性性质时，可以得到系数中包含时间因子$\exp[\eta t]$的偏微分方程，这里η是小于零的实数．这种微分方程的求解带来了数学上的困难，因此在以前的研究中，往往先略去时间因子，在分析结果时，再考虑略去时间因子所包含的物理意义．

在平面 Couette 流和圆管 Poiseuille 流中，只有引入了这种修正剖面之后，才可能在线性稳定性分析中得到临界雷诺数，从而可以较为方便地进一步进行非线性稳定性分析．因此这种修正剖面对流动稳定性的影响是需要仔细研究清楚的．本文采用多重尺度方法，分析了在包含时间因子$\exp[\eta t]$的修正剖面作用下，平面Poiseuille 流动的线性稳定性性质．

二、基本方程与解法

本文研究的基本层流流动是平面 Poiseuille 流动，其速度剖面是

---

* 钱伟长推荐．
国家自然科学基金和上海工业大学科学基金资助．

$$\bar{u}=1-y^2 \qquad -1\leqslant y\leqslant 1 \tag{2.1}$$

受到背景干扰后，迭加了一修正剖面，流动成为

$$u=\bar{u}+\boldsymbol{\delta} u_l(y)\exp[-\mu t] \tag{2.2}$$

其中μ为大于零的实数，δ为修正剖面的最大幅值，$u_l(y)$的形状见文[1]。

引进流函数ψ，满足

$$u=\partial\psi/\partial y,\ v=-\partial\psi/\partial x \tag{2.3}$$

其中u为流向速度，v为横向速度。

设　　$$\psi=\bar{\psi}+\varepsilon\psi' \tag{2.4}$$

其中$\bar{\psi}$为层流流动的流函数，ψ'为扰动流函数。

由文[1]可知，研究扰动发展的线性化基本方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi'+u\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi'-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial\psi'}{\partial x}-\frac{1}{R}\nabla^4\psi'=0 \tag{2.5}$$

$$\partial\psi'/\partial x=\partial\psi'/\partial y=0 \qquad y=\pm 1 \tag{2.6}$$

其中　　$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\quad \nabla^4=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

从(2.2)式可知，偏微分方程(2.5)的系数中不显含x，因此可设

$$\psi'=\phi(y,t)\exp[i\alpha x]+\mathrm{C.C.} \tag{2.7}$$

其中α为实数，C.C.为复共轭项。关于ϕ的方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi+i\alpha\bar{u}\nabla^2\phi-i\alpha\bar{u}''\phi-\frac{1}{R}\nabla^4\phi+\boldsymbol{\delta}\exp[-\mu t]i\alpha(u_l\nabla^2\phi-u_l''\phi)=0 \tag{2.8}$$

$$\phi(\pm 1,\ t)=\phi'(\pm 1,t)=0 \tag{2.9}$$

“′”为y的导数。

由文[1]知μ在雷诺数较大时是一小量，因此可令

$$\varepsilon=\mu \tag{2.10}$$

可知现在方程中带有包含时间尺度εt的系数。我们用推广的两变量展开法来求解这个问题。

为了确定出一个一致有效的展开式，我们设

$$\xi=\varepsilon t,\ \eta=(1-\omega_2(\xi)\varepsilon^2+\omega_3(\xi)\varepsilon^3+\cdots)t \tag{2.11}$$

其中ω_i在分析过程中定出，因此

$$\partial/\partial t=\varepsilon\partial/\partial\xi+(1+\omega_2'\varepsilon^2+\omega_3'\varepsilon^3+\cdots)\partial/\partial\eta \tag{2.12}$$

假定ϕ具有形为

$$\phi=\phi_0(\xi,\eta,y)+\varepsilon\phi_1(\xi,\eta,y)+\varepsilon^2\phi_2(\xi,\eta,y)+\cdots \tag{2.13}$$

的一致有效展开式。

方程中除出现ε这个小量外，还有一个小量$\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{\delta}$是修正剖面的最大幅值，它的变化是与ε无关的，但量级相差不多。为了更便于分析$\boldsymbol{\delta}$独立变化所带来的影响，我们将$\boldsymbol{\delta}$写成

$$\boldsymbol{\delta}=\delta\varepsilon \tag{2.14}$$

将(2.11)～(2.14)代入方程(2.8)，并令ε的同次幂的系数相等，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\nabla^2\phi_0+L\phi_0=0 \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\nabla^2\phi_1+L\phi_1=-\delta\exp[-\xi]M\phi_0-\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla^2\phi_0 \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\nabla^2\phi_2+L\phi_2=-\delta\exp[-\xi]M\phi_1-\frac{\partial}{\partial\xi}\nabla^2\phi_1-\omega_2'\frac{\partial}{\partial\eta}\nabla^2\phi_0 \tag{2.17}$$

……

其中 ′ 为对ξ求导.

$$L=i\alpha(\bar{u}\nabla^2-\partial^2\bar{u}/\partial y^2)-\nabla^4/R \tag{2.18}$$

$$M=i\alpha(u_t\nabla^2-\partial^2u_t/\partial y^2) \tag{2.19}$$

方程(2.15)的解为

$$\phi_0=A_0(\xi)\gamma_0(y)\exp[-i\alpha c\eta]+\text{C.C.} \tag{2.20}$$

$\gamma_0(y)$ 和 $c=c_r+ic_i$ 是用数值方法得到的特征函数和特征值, C. C. 为复共轭项. $A_0(\xi)$ 和 ω_i将在下面逐级解出. 我们可以看到 (2.20) 是振幅和频率按慢变尺度ξ变化的 Tollmien-Schlichting 波.

我们注意到关于 ε 不同幂次的一系列方程左边的算子都是相同的, 因此各阶非齐次方程的右端项必须与γ_0^*正交才能求解, 即可解性条件. γ_0^*是γ_0的伴随函数.

由(2.16)式右端, 利用可解性条件, 我们可得到方程

$$(dA_0/d\xi)D_0=-\delta\exp[-\xi]A_0M_0 \tag{2.21}$$

其中
$$D_0=\int_{-1}^{1}\nabla^2\gamma_0\cdot\gamma_0^*dy,\quad M_0=\int_{-1}^{1}M\gamma_0\cdot\gamma_0^*dy \tag{2.22}$$

在实际求解时, 我们不是先求出伴随函数γ_0^*再按(2.22)式得到 D_0, M_0. 而是按实际解方程所需的可解性条件, 用消元法来求得D_0, M_0 和以后各阶方程中的这类常数的. 经验证明, 这种方法数值误差更小.

由(2.21)可解得

$$A_0=a_0\exp[\delta(M_0/D_0)(\exp[-\xi]-1)]=a_0\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)] \tag{2.23}$$

a_0为$\phi_0(\xi,\ \eta,\ y)$的初始幅值, $S=S_r+iS_i$为复常数.

$$\therefore\quad \phi_0=a_0\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]\gamma_0(y)\exp[-i\alpha c\eta]+\text{C.C.} \tag{2.24}$$

进而求解(2.16)式, 可以得到

$$\phi_1=a_1\exp[-\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]\gamma_1(y)\exp[-i\alpha c\eta]+\text{C.C.} \tag{2.25}$$

将(2.24), (2.25)代入(2.17)式, 利用可解性条件, 有

$$\begin{aligned}&a_1[\exp[-\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]\\&\quad+\delta S\exp[-2\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]]D_1\\&\quad-\delta a_1\exp[-2\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]M_1+i\alpha c\omega_2'D_0=0\end{aligned} \tag{2.26}$$

其中
$$D_1=\int_{-1}^{1}\nabla^2\gamma_1\cdot\gamma_0^*dy,\quad M_1=\int_{-1}^{1}M\gamma_1\cdot\gamma_0^*dy \tag{2.27}$$

可知, 要满足可解性条件, 必须有

$$i\alpha c\omega_{21}'D_0+a_1\exp[-\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]D_1=0 \tag{2.28}$$

和
$$\begin{aligned}&i\alpha c\omega_{22}'D_0+a_1\delta S\exp[-2\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]D_1\\&\quad-\delta a_1\exp[-2\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]M_1=0\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\therefore\quad \omega_{21}'=\Omega_1\exp[-\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)] \tag{2.30}$$

$$\omega_{22}'=\Omega_2\exp[-2\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)] \tag{2.31}$$

其中Ω_1，Ω_2为复常数。

积分可得

$$\omega_{21}=-\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]/\delta S \tag{2.32}$$

$$\omega_{22}=(1/\delta S-\exp[-\xi])\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]/\delta S \tag{2.33}$$

进而求解(2.17)式，可得

$$\phi_2=a_{21}\exp[-\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]\gamma_{21}(y)\exp[-iac\eta]+a_{22}\exp[-2\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]\gamma_{22}(y)\exp[-iac\eta]+\mathrm{C.C.} \tag{2.34}$$

继续照此做下去，可得到各阶特征函数$\gamma_{ij}(y)$。由于左端算子相同，$\exp[-iac\eta]$是相同的，但反映振幅和频率按时间尺度ξ变化的函数$A_i(\xi)$和$\omega_i'(\xi)$有以下形式

$$A_3,\omega_3'\sim\exp[-\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)],\ \exp[-2\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)],\ \exp[-3\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)]$$

……

$$A_n,\omega_n'\sim\exp[-\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)],\ \exp[-2\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)],\ \cdots,\ \exp[-n\xi]\exp[\delta S(\exp[-\xi]-1)] \tag{2.35}$$

可知，当$\xi\to\infty$，$\phi_n/\phi_{n-1}<+\infty$，所得到的展开式是一致有效的。

这种扰动的首两项近似为

$$\phi=[E_0(\xi)\gamma_0(y)+\varepsilon(E_{11}(\xi)\gamma_{11}(y)+E_{12}(\xi)\gamma_{12}(y))]\exp[i(\alpha x-\theta)]+\mathrm{C.C.}+O(\varepsilon^2) \tag{2.36}$$

其中

$$E_0(\xi)=a_0\exp[\delta S_r(\exp[-\xi]-1)+\alpha c_i t+\alpha(c_i\omega_{2r}+c_r\omega_{2i})\varepsilon^2 t] \tag{2.37}$$

$$E_{11}(\xi)=a_{11}\exp[\delta S_r(\exp[-\xi]-1)-\xi+\alpha c_i t+\alpha(c_i\omega_{2r}+c_r\omega_{2i})\varepsilon^2 t] \tag{2.38}$$

$$E_{12}(\xi)=a_{12}\exp[\delta S_r(\exp[-\xi]-1)-2\xi+\alpha c_i t+\alpha(c_i\omega_{2r}+c_r\omega_{2i})\varepsilon^2 t] \tag{2.39}$$

$$\theta(\xi)=\delta S_i(\exp[-\xi]-1)-\alpha c_r t+\alpha(c_i\omega_{2i}-c_r\omega_{2r})\varepsilon^2 t \tag{2.40}$$

从(2.37)～(2.39)可以看出，如有不稳定情况发生，必是$E_0(\xi)$的增长率最大。

令 $$E_0(\xi)=a_0\exp[f(t)] \tag{2.41}$$

当$f'(t)>0$，E_0是随时间增长的；当$f'(t)<0$，E_0是随时间衰减的。

$$f'(t)=-\delta S_r\varepsilon\exp[-\varepsilon t]+\alpha c_i+\alpha(c_i\omega_{2r}'+c_r\omega_{2i}')\varepsilon^2 t+\alpha(c_i\omega_{2r}+c_r\omega_{2i})\varepsilon^2 \tag{2.42}$$

略去ε^2项 $$f'(t)=-\delta S_r\exp[-\varepsilon t]+\alpha c_i \tag{2.43}$$

令$f'(t)=0$，有

$$\exp[-\varepsilon t]=\alpha c_i/\delta S_r \tag{2.44}$$

当方程右边大于零且小于等于1时有解

$$t_0=-(1/\varepsilon)\ln(\alpha c_i/\delta S_r) \tag{2.45}$$

因此扰动随时间的发展可能有下列几种情况：

i) $c_i>0$，无论δS_r为何值，扰动最后一定会增长起来；

ii) $c_i<0$，并且当$\delta S_r<0$，则当$t<t_0$时扰动是增长的；

iii) $c_i<0$，$\delta S_r>0$，则扰动会衰减下去；

iv) $c_i=0$，扰动的性质由δS_r的符号决定。

由以上分析，修正剖面的存在可能在一段时期内改变流动的稳定性性质，所谓中性情况仅对某一时刻而言是存在的，随着时间的发展，性质将发生变化。

三、数 值 结 果

根据上节的分析，我们只要计算出ac_i和S_r，就可以知道流动在一段时间内的稳定性性质，并可以分析由于δ的变化带来的影响。

在文[1]中，我们为避免数学上的困难而略去了时间因子$\exp[-\mu t]$，而在解释稳定性分析的结果时，作了两种物理假定：其一认为扰动的增长率超过修正剖面的衰减率时，流动失稳，此时的修正剖面的幅值认为达到阈值δ_1；其二是认为背景干扰一直存在，因此可以不考虑修正剖面衰减的影响，只要扰动的增长率大于零，就认为修正剖面的幅值达到阈值δ_2，从本文的观点来看，这是$t=0$时的情况。

下面计算两个算例，并与文[1]的结果进行比较。

例1 $\alpha=1.5$, $R=2900$, $\sqrt{\mu R}=10.9041$

由文[1]的方法计算，可知当$\delta>0$时，有

$$\delta_1=0.0263, \quad \delta_2=0.0115$$

而当$\delta<0$时，有

$$\delta_1=-0.0333, \quad \delta_2=-0.0244$$

由本文的方法计算，可得

$$\varepsilon=\mu=0.0410, \quad ac_i=-0.0398, \quad S_r=-3.422$$

因此，由第二节的分析可知，只要$\delta>0$，流动有可能失稳。我们首先计算当$t=0$时，扰动为中性所需要的修正剖面幅值δ^*。

$$ac_i-\delta^* S_r=0, \quad \delta^*=ac_i/S_r=0.0116$$

这个结果和文[1]方法当$\delta>0$时的$\bar{\delta}_2$的值极其相近。

再来计算δ_1的值所相应的$t=0$时的增长率

$$ac_i-\delta_1 S_r=0.0502$$

以及其相应的增长维持时间

$$t_{01}=\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{\delta_1 S_r}{ac_i}=\frac{1}{0.0410}\ln\frac{0.0263\times 3.422}{0.0398}=19.9$$

设$L=2\text{cm}$, $\nu=14.8\times 10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$，此时有量纲的实际时间为

$$T=(L^2/R\nu)t_{01}=0.19\text{秒}$$

例2 $\alpha=1.2$, $R=2900$, $\sqrt{\mu R}=14.0662$

由文[1]的方法计算，可知当$\delta>0$时，有

$$\delta_1=0.0355, \quad \bar{\delta}_2=0.0178$$

而当$\delta<0$时，有

$$\bar{\delta}_1=-0.0652, \quad \bar{\delta}_2=-0.00479$$

由本文的方法计算，可得

$$\varepsilon=\mu=0.0682, \quad ac_i=-0.0107, \quad S_r=2.517$$

由第二节的分析可知，只要$\delta<0$，流动有可能失稳。同样首先计算当$t=0$时，扰动为中性所需要的修正剖面幅值$\bar{\delta}^*$。

$$ac_i-\delta^* S_r=0, \quad \delta^*=-0.0043$$

这个数值也与文[1]方法所得当$\delta<0$时的δ_1相当接近。

再来计算$\bar{\delta}_1$值所相应的$t=0$时的增长率

$$\alpha c_i-\bar{\delta}_1 S_r=0.1534$$

及其相应的增长维持时间

$$t_{01}=\frac{1}{2}\ln\frac{\bar{\delta}_1 S_r}{\alpha c_i}=\frac{1}{0.0682}\ln\frac{0.0652\times 2.517}{0.0107}=40.03$$

有量纲的实际时间为

$$T=(L^2/R\nu)t_{01}=0.37\text{秒}$$

从例 1 和例 2 可以看到，用多重尺度法分析的结果与文[1]数值计算的结果是完全相符的，而且由于不再省略时间因子 $\exp[-\mu t]$，可以更清楚地分析在一段时间过程中，修正剖面和扰动的相互作用。

需要指出的是，用文[1]的方法，无论$\delta>0$还是$\delta<0$，只要大到一定程度扰动都有可能增长。而按本文的分析，$\bar{\delta}$只在某一符号下才会引起失稳，但是本文分析所给出的δ^*总是和文[1]方法中较小的δ_1值相符合的。有可能δ在另一种符号下所引起的失稳，由于修正程度较强，更主要地通过对特征函数$\gamma_{ij}(y)$的改变来起作用，而从(2.28)、(2.29)式中可看出，本文的分析中特征函数的改变只在ε^2项中起作用。这是可以继续研究的问题。

四、结 论

本文成功地把多重尺度法应用于求解带有时间因子$\exp[-\mu t]$的偏微分方程、得到了扰动函数的一致有效展开式。本文分析了非定常修正剖面作用下平面 Poiseuille 流动的线性稳定性性质。分析和计算的结果证明了文[1]的假定是合理的，并进一步揭示了在一段时间过程中修正剖面和扰动之间的相互作用，即修正剖面的存在能在初始一段时间内，使本来会是衰减的扰动具有较强的增长率，这种作用随着δ的增大而维持得更长久。

作者在本文写作过程中，与孙其仁讲师进行了有益的讨论、特此致谢。

参 考 文 献

[1] 周哲玮，经过修正的层流流动的流动稳定性问题(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)，应用数学和力学，**10**，2，3，4 (1989).

[2] 周哲玮，经过修正的平面 Couette 流的性非线稳定性研究，应用数学和力学，**12**，5 (1991).

The Linear Stability of Plane Poiseuille Flow under Unsteady Distortion

Zhou Zhe-wei

(*Shanghai University of Technology, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

Abstract

This paper investigates the linear stability behaviour of plane Poiseuille flow under unsteady distortion by multiscale perturbation method and discusses further the problem proposed by paper [1]. The results show that in the initial period of disturbance development, the distortion profiles presented by paper [1] will make the disturbances grow up, thus augmenting the possibility of instability.

Key words fluid flow, stability, unsteady, plane Poiseuille flow, multiple scale method