应用数学和力学，第12卷第6期（1991年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

环形薄板的大幅度振动*

李　东

（上海工业大学，上海市应用数学和力学研究所，1990年4月10日到收）

摘　要

本文利用修正迭代法求出了环形薄板的轴对称大幅度自由振动的一种新的解析解，并由此导出了环板的振幅和振频的解析关系式．本文揭示了修正迭代法在板的大幅度振动问题研究中所潜在的很大的优越性．

关键词　环形板　大幅度　振动

一、前　言

环形薄板是广泛应用于机器制造工业和机械工程中的一类构件．近年来，许多新的数值分析方法及高级计算机的问世，使得很多冗繁的计算工作得以实现，因此促进了环板大幅度振动问题的研究工作的发展．在文[1]中，Nayfeh详细叙述了该项研究的进展及处理该问题的诸多数学方法，如摄动法、里兹法、伽辽金法，以及一些数值分析法、数值解析法等．该问题的主要困难源于描述环板振动的方程组所表现出的数学非线性，因此问题的关键是找到求解该方程组的一种既简捷又有效的数学方法．

在实际应用中最为常见的一种情形是环板的轴对称振动，这是由于大多数实际情况中环板的边界约束是轴对称的，再加之它本身几何结构上的轴对称性，使得轴对称振动易于实现．轴对称振动是一种基态振动，Sandman[2]，Huang[3,4]和Reddy[5]曾先后研究过这类振动，求出工程中所感兴趣的板的振动基频，不过，他们均采用了较多的数值分析技巧．在本文中，我们提出了该类问题的一种解析分析方法，该方法即是修正迭代法[6~10]的进一步推广，由此说明求解这类振动问题大可不必使用冗繁的数值分析．首先，我们用变分法导出了决定环板振动基频的非线性特征值方程组，然后使用修正迭代法求解该方程组．我们导出了环板振动的振幅和非线性振频的解析关系式，所得数值结果显示这一求解方法十分有效和可靠．我们期望将此方法进一步推广于层合板壳的大幅度振动问题的研究中去．

二、非线性特征值问题的建立

我们考虑一个外边缘夹紧、内边缘自由而具有均匀厚度 h 的环形薄板．这里，板的外边缘及内边缘半径为 a 和 b，径向坐标为 r，时间变量为 t，板的挠度为 w，杨氏模量为 E，泊

* 刘人怀推荐．

松比为 ν，板的径向及环向薄膜力为 N_r 和 N_θ，径向和环向薄膜应变为 ε_r 和 ε_θ，径向位移为 u。略去板的径向运动动能，则对于环板的轴对称运动情形，其哈密顿函数可表示为

$$H=\int_{t_1}^{t_2}(T-V)dt \tag{2.1}$$

这里 t_1，t_2 表示运动中两个不同时刻，T 是板的动能，V 是板的总势能，对自由振动而言，我们有

$$T=\int_b^a \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 2\pi r dr$$

$$V=\int_b^a \left\{\frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{2\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]+\frac{1}{2}(N_r\varepsilon_r+N_\theta\varepsilon_\theta)\right\}2\pi r dr$$

其中 m 是板单位面积的质量，D是板的抗弯刚度。板的几何方程和弹性方程是

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2=\frac{1}{Eh}(N_r-\nu N_\theta),\quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}=\frac{1}{Eh}(N_\theta-\nu N_r) \tag{2.2a,b}$$

根据哈密顿原理，我们有

$$\delta H=0 \tag{2.3}$$

这里 δ 表示变分。利用式(2.3)并考虑到如下的边界条件，即内边缘自由，外边缘夹紧：

$$\text{当 } r=b,\ w\text{有限},\ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}=0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r}=0,\ N_r=0 \tag{2.4a～d}$$

$$\text{当} r=a,\ w=0,\ \partial w/\partial r=0,\ u=0 \tag{2.5a～c}$$

这样可导出

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_b^a\left[m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rN_r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]\delta w r dr dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_b^a\left[N_\theta-\frac{\partial}{\partial r}(rN_r)\right]\delta u dr dt=0$$

这里δw和δu都是任意的独立的函数，因此上述方程可分别写作

$$N_\theta-\partial(rN_r)/\partial r=0 \tag{2.6}$$

以及

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_b^a\left[m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rN_r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]\delta w r dr dt=0 \tag{2.7}$$

再利用方程(2.2a，b)和(2.6)可导出如下的协调方程

$$r\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rN_r)+\frac{\partial}{\partial r}(rN_r)-N_r=-\frac{1}{2}Eh\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \tag{2.8}$$

考虑到(2.2b)和(2.6)，可将条件(2.5c)写作

$$\text{当 } r=a,\ \partial(rN_r)/\partial r-\nu N_r=0 \tag{2.9}$$

为简化以下的推导，我们引入下列无量纲量

$$\overline{w}=\frac{w}{h},\ \overline{N}_r=-\frac{a}{D}rN_r,\ \beta=6(1-\nu^2),\ \alpha=\frac{b}{a},\ \ x=\frac{r}{a},\ \tau=t\left(\frac{D}{ma^4}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

利用上述无量纲量，则方程(2.7)，(2.8)和边界条件(2.4a～d)，(2.5a，b)和(2.9)转化为如下无量纲形式

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_{\alpha}^{1}\left[\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial x^4}+\frac{2}{x}\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial x^3}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}+\frac{1}{x^3}\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{N}_r\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)\right]\delta\overline{w}xdxd\tau=0 \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^2\overline{N}_r}{\partial x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial\overline{N}_r}{\partial x}-\frac{\overline{N}_r}{x^2}-\frac{\beta}{x}\left(\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\right)^2=0 \tag{2.12}$$

当$x=\alpha$，$\overline{w}$ 有限，$\dfrac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}+\dfrac{\nu}{x}\dfrac{\partial\overline{w}}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial^3\overline{w}}{\partial x^3}+\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial\overline{w}}{\partial x}=0$，$\overline{N}_r=0$

(2.13a～d)

当$x=1$，$\overline{w}=0$，$\partial\overline{w}/\partial x=0$，$\partial\overline{N}_r/\partial x-\nu\overline{N}_r=0$ (2.14a～c)

现在，我们来寻求方程(2.11)～(2.12)的近似解，假定

$$\overline{w}=W(x)\cos\omega\tau \tag{2.15}$$

这样，由方程(2.12)我们有

$$\overline{N}_r=N(x)\cos^2\omega\tau \tag{2.16}$$

其中$W(x)$和$N(x)$是待定函数，ω是无量纲化后的非线性振频

$$\omega=\omega^*(ma^4/D)^{\frac{1}{2}} \tag{2.17}$$

这里的ω^*即是有量纲的振动频率。

将(2.15)和(2.16)代入(2.11)，在区间$[0,2\pi/\omega]$上对此方程积分可得

$$\int_{\alpha}^{1}\left[L(W)-\omega^2W+\frac{3}{4}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(N\frac{dW}{dx}\right)\right]\delta Wxdx=0$$

这里L是如下定义的微分算子

$$L(\cdot\cdot)=\frac{d^4(\cdot\cdot)}{dx^4}+\frac{2}{x}\frac{d^3(\cdot\cdot)}{dx^3}-\frac{1}{x^2}\frac{d^2(\cdot\cdot)}{dx^2}+\frac{1}{x^3}\frac{d(\cdot\cdot)}{dx}$$

由于δW的任意性，所以我们有

$$L(W)-\omega^2W+\frac{3}{4}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(N\frac{dW}{dx}\right)=0 \tag{2.18}$$

再将(2.15)和(2.16)代入(2.12)～(2.14)就可得到

$$L^*(N)-(\beta/x)(dW/dx)^2=0 \tag{2.19}$$

以及

当 $x=\alpha$，$W=W_m$，$\dfrac{d^2W}{dx^2}+\dfrac{\nu}{x}\dfrac{dW}{dx}=0$，$\dfrac{d^3W}{dx^3}+\dfrac{1}{x}\dfrac{d^2W}{dx^2}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{dW}{dx}=0$，$N=0$

(2.20a～d)

当$x=1$，$W=0$，$dW/dx=0$，$dN/dx-\nu N=0$ (2.21a～c)

此处L^*是一微分算子

$$L^*(\cdot\cdot)=\frac{d^2(\cdot\cdot)}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d(\cdot\cdot)}{dx}-\frac{1}{x^2}(\cdot\cdot)$$

而W_m是环板内边缘的无量纲振幅。

这样，环板大幅振动问题就归结于求解在边界条件(2.20)和(2.21)下的无量纲非线性特

征值方程组(2.18)～(2.19).

三、修正迭代解

我们利用修正迭代法[9,10]求解上述方程组. 这里, 我们以下标 1, 2 表示迭代的阶数, 在第一阶迭代中, 我们有如下线性特征值问题

$$L(W_1)-\omega_0^2W_1=0 \tag{3.1}$$

$$L^*(N_1)-(\beta/x)(dW_1/dx)^2=0 \tag{3.2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{当}x=a,\ W_1=W_m,\ \frac{d^2W_1}{dx^2}+\frac{\nu}{x}\frac{dW_1}{dx}=0\\&\frac{d^3W_1}{dx^3}+\frac{1}{x}\frac{d^2W_1}{dx^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dW_1}{dx}=0,\ N_1=0\end{aligned}\right\} \tag{3.3a～d}$$

$$\text{当}x=1,\ W_1=0,\ dW_1/dx=0,\ dN_1/dx-\nu N_1=0 \tag{3.4a～c}$$

这里的 ω_0 是环板作线振动时的振频.

方程(3.1)的精确解是

$$W_1=W_m\Big[\mu_1\sum_{j=0}^{\infty}A_jx^{4j}+\mu_2\sum_{j=0}^{\infty}(B_jx^{4j}+A_jx^{4j}\ln x)+\mu_3\sum_{j=0}^{\infty}C_jx^{4j+2}+\mu_4\sum_{j=0}^{\infty}(D_jx^{4j+2}+C_jx^{4j+2}\ln x)\Big] \tag{3.5}$$

这里 μ_1, μ_2, μ_3及μ_4是待定系数

$$A_0=B_0=C_0=D_0=1$$

$$A_{j+1}=\frac{\omega_0^2}{(4j+4)^2(4j+2)^2}A_j$$

$$B_{j+1}=\frac{\omega_0^2}{(4j+4)^2(4j+2)^2}B_j-\frac{4(4j+3)\omega_0^2}{(4j+4)^3(4j+2)^3}A_j$$

$$C_{j+1}=\frac{\omega_0^2}{(4j+6)^2(4j+4)^2}C_j$$

$$D_{j+1}=\frac{\omega_0^2}{(4j+6)^2(4j+4)^2}D_j-\frac{4(4j+5)\omega_0^2}{(4j+6)^3(4j+4)^3}C_j$$

将解(3.5)代入边界条件(3.3a～c)和(3.4a,b), 则可得到

$$\tilde{A}\tilde{\mu}=0 \tag{3.6}$$

这里$\tilde{\mu}$是向量

$$\tilde{\mu}=[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,1]^T$$

而$\tilde{A}$是一(5×5)矩阵

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}a_{01}&a_{02}&a_{03}&a_{04}&-1\\a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&0\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}&0\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}&0\end{bmatrix}$$

上述矩阵中的矩阵元素a_{lm}($l=0,1,2,3,4$；$m=1,2,3,4$)为

$$a_{01}=\sum_{j=0}^{\infty}A_j\alpha^{4j},\qquad a_{02}=\sum_{j=0}^{\infty}(B_j\alpha^{4j}+A_j\alpha^{4j}\ln\alpha)$$

$$a_{03}=\sum_{j=0}^{\infty}C_j\alpha^{4j+2},\qquad a_{04}=\sum_{j=0}^{\infty}(D_j\alpha^{4j+2}+C_j\alpha^{4j+2}\ln\alpha)$$

$$a_{11}=\sum_{j=0}^{\infty}A_j,\qquad a_{12}=\sum_{j=0}^{\infty}B_j,\qquad a_{13}=\sum_{j=0}^{\infty}C_j,\qquad a_{14}=\sum_{j=0}^{\infty}D_j$$

$$a_{21}=\sum_{j=0}^{\infty}4jA_j,\qquad a_{22}=\sum_{j=0}^{\infty}(4jB_j+A_j)$$

$$a_{23}=\sum_{j=0}^{\infty}(4j+2)C_j,\qquad a_{24}=\sum_{j=0}^{\infty}[(4j+2)D_j+C_j]$$

$$a_{31}=\sum_{j=0}^{\infty}4j(\nu+4j-1)A_j\alpha^{4j-1}$$

$$a_{32}=\sum_{j=0}^{\infty}[4j(\nu+4j-1)B_j+(\nu+8j-1)A_j]\alpha^{4j-1}$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}4j(\nu+4j-1)A_j\alpha^{4j-1}\ln\alpha$$

$$a_{33}=\sum_{j=0}^{\infty}(4j+2)(\nu+4j+1)C_j\alpha^{4j+1}$$

$$a_{34}=\sum_{j=0}^{\infty}[(4j+2)(\nu+4j+1)D_j+(\nu+8j+3)C_j]\alpha^{4j+1}$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}(4j+2)(\nu+4j+1)C_j\alpha^{4j+1}\ln\alpha$$

$$a_{41}=\sum_{j=0}^{\infty}(4j)^2(4j-2)A_j\alpha^{4j-1}$$

$$a_{42}=\sum_{j=0}^{\infty}[(4j)^2(4j-2)B_j+16j(3j-1)A_j]\alpha^{4j-1}$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}(4j)^2(4j-2)A_j\alpha^{4j-1}\ln\alpha$$

$$a_{43}=\sum_{j=0}^{\infty}(4j+2)^2 4jC_j\alpha^{4j+1}$$

$$a_{44}=\sum_{j=0}^{\infty}[(4j+2)^2 4jD_j+4(2j+1)(6j+1)C_j]\alpha^{4j+1}$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}(4j+2)^2 4jC_j\alpha^{4j+1}\ln\alpha$$

由于$\bar{\mu}$是非零向量，所以$\bar{A}$的行列式为零

$$\det\bar{A}=0 \tag{3.7}$$

由(3.7)所得出的代数方程式可求出ω_0的值，于是可确定A_j，B_j，C_j和D_j的值，从而得到矩阵元素a_{ml}的值．最后，由方程(3.6)定出待定系数μ_1，μ_2，μ_3和μ_4的值．

我们将(3.5)写成如下更为简洁的形式

$$W_1=W_m\left(\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(1)}x^{2j}+\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(2)}x^{2j}\ln x\right) \tag{3.8}$$

这里

$$A_{2k}^{(1)}=\mu_1A_k+\mu_2B_k,\quad A_{2k+1}^{(1)}=\mu_3C_k+\mu_4D_k$$

$$A_{2k}^{(2)}=\mu_2A_k,\quad A_{2k+1}^{(2)}=\mu_4C_k \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

将(3.8)代入方程(3.2)，直接积分方程可得

$$N_1=W_m^2\left(B_0^{(1)}x^{-1}+B_1^{(1)}x+\sum_{j=2}^{\infty}B_j^{(1)}x^{2j-1}+\sum_{j=0}^{\infty}B_j^{(2)}x^{2j-1}\ln x\right.$$

$$\left.+\sum_{j=0}^{\infty}B_j^{(3)}x^{2j-1}\ln^2 x\right) \tag{3.9}$$

其中

$$B_0^{(2)}=-(\beta/2)(A_0^{(2)})^2,\quad B_1^{(2)}=2\beta A_1^{(1)}A_0^{(2)},\quad B_0^{(3)}=0,\ B_1^{(3)}=\beta A_0^{(2)}A_1^{(2)}$$

当$j\geqslant 2$，

$$B_j^{(1)}=\frac{\beta(3j^2-3j+1)\sum_{i=0}^{j}i(j-i)A_i^{(2)}A_{j-i}^{(2)}}{2j^3(j-1)^3}$$

$$-\frac{\beta(2j-1)\sum_{i=0}^{j}(2iA_i^{(1)}+A_i^{(2)})(j-i)A_{j-i}^{(2)}}{2j^2(j-1)^2}$$

$$-\frac{\beta\sum_{i=0}^{j}(2iA_i^{(1)}+A_i^{(2)})[2(j-i)A_{j-i}^{(1)}+A_{j-i}^{(2)}]}{4j(j-1)}$$

$$B_j^{(2)}=-\frac{\beta(2j-1)\sum_{i=0}^{j}i(j-i)A_i^{(2)}A_{j-i}^{(2)}}{j^2(j-1)^2}$$

$$+\frac{\beta\sum_{i=0}^{j}(2iA_i^{(1)}+A_i^{(2)})(j-i)A_{j-i}^{(2)}}{j(j-1)}$$

$$B_j^{(3)}=\frac{\beta\sum_{i=0}^{j}i(j-i)A_i^{(2)}A_{j-i}^{(2)}}{j(j-1)}$$

而系数 $B_0^{(1)}$和 $B_1^{(1)}$可由边界条件(3.3d)和(3.4c)定出,

$$B_0^{(1)}=[1+\alpha^2+\nu(\alpha^2-1)]^{-1}\Big\{\sum_{j=2}^{\infty}(2j-1-\nu)B_j^{(1)}\alpha^2+\sum_{j=0}^{\infty}B_j^{(2)}\alpha^2$$

$$+(\nu-1)\Big(\sum_{j=2}^{\infty}B_j^{(1)}\alpha^{2j}+\sum_{j=0}^{\infty}B_j^{(2)}\alpha^{2j}\ln\alpha+\sum_{j=0}^{\infty}B_j^{(3)}\alpha^{2j}\ln^2\alpha\Big)\Big\}$$

$$B_1^{(1)}=[\nu(1-\alpha^2)-(1+\alpha^2)]^{-1}\Big\{\sum_{j=2}^{\infty}(2j-1-\nu)B_j^{(1)}+\sum_{j=0}^{\infty}B_j^{(2)}$$

$$+(1+\nu)\Big(\sum_{j=2}^{\infty}B_j^{(1)}\alpha^{2j}+\sum_{j=0}^{\infty}B_j^{(2)}\alpha^{2j}\ln\alpha+\sum_{j=0}^{\infty}B_j^{(3)}\alpha^{2j}\ln^2\alpha\Big)\Big\}$$

在第二阶迭代中,我们有如下修正特征值方程

$$L(W_2)-\omega^2W_2+\frac{3}{4}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\Big(N_1\frac{dW_1}{dx}\Big)=0 \tag{3.10}$$

以及相应边界条件

当 $x=\alpha$, $W_2=W_m$, $\frac{d^2W_2}{dx^2}+\frac{\nu}{x}\frac{dW_2}{dx}=0$, $\frac{d^3W_2}{dx^3}+\frac{1}{x}\frac{d^2W_2}{dx^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dW_2}{dx}=0$

(3.11a~c)

当$x=1$, $W_2=0$, $dW_2/dx=0$ (3.12a,b)

这里的ω即是线振动振频加以修正后的非线性振频.

将前面求出的一阶解(3.8)和(3.9)代入方程(3.10)并积分方程,可将(3.10)的解表示为

$$W_2=W_m\Big[\xi_1\sum_{j=0}^{\infty}A_j^{(0)}x^{4j}+\xi_2\sum_{j=0}^{\infty}(B_j^{(0)}x^{4j}+A_j^{(0)}x^{4j}\ln x)$$

$$+\xi_3\sum_{j=0}^{\infty}C_j^{(0)}x^{4j+2}+\xi_4\sum_{j=0}^{\infty}(D_j^{(0)}x^{4j+2}+C_j^{(0)}x^{4j+2}\ln x)\Big]$$

$$+W_m^3\Big(\sum_{j=0}^{\infty}E_j^{(0)}x^{2j-4}+\sum_{j=0}^{\infty}F_j^{(0)}x^{2j-4}\ln x+\sum_{j=0}^{\infty}G_j^{(0)}x^{2j-4}\ln^2x$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}H_j^{(0)}x^{2j-4}\ln^3x\Big) \tag{3.13}$$

这里的ξ_1, ξ_2, ξ_3和ξ_4是待定系数,

$$A_0^{(0)}=B_0^{(0)}=C_0^{(0)}=D_0^{(0)}=1,\ A_{j+1}^{(0)}=\frac{\omega^2}{(4j+4)^2(4j+2)^2}A_j^{(0)}$$

$$B_{j+1}^{(0)}=\frac{\omega^2}{(4j+4)^2(4j+2)^2}B_j^{(0)}-\frac{4(4j+3)\omega^2}{(4j+4)^3(4j+2)^3}A_j^{(0)}$$

$$C_{j+1}^{(0)}=\frac{\omega^2}{(4j+6)^2(4j+4)^2}C_j^{(0)}$$

$$D_{j+1}^{(0)}=\frac{\omega^2}{(4j+6)^2(4j+4)^2}D_j^{(0)}-\frac{4(4j+5)\omega^2}{(4j+6)^3(4j+4)^3}C_j^{(0)}$$

以及

$$E_0^{(0)}=E_1^{(0)}=E_2^{(0)}=E_3^{(0)}=F_0^{(0)}=F_1^{(0)}=F_2^{(0)}=F_3^{(0)}$$
$$=G_0^{(0)}=G_1^{(0)}=H_0^{(0)}=H_1^{(0)}=0$$

$$G_2^{(0)}=\frac{1}{8}(E_0+F_0),\quad G_3^{(0)}=\frac{1}{8}(E_1-F_1),\quad H_2^{(0)}=\frac{1}{24}F_0,\quad H_3^{(0)}=\frac{1}{24}F_1$$

$$H_{j+2}^{(0)}=\frac{H_j+\omega^2H_j^{(0)}}{(2j)^2(2j-2)^2}\qquad (j\geqslant 2)$$

$$G_{j+2}^{(0)}=\frac{G_j-48j(2j-1)(j-1)H_{j+2}^{(0)}+\omega^2G_j^{(0)}}{(2j)^2(2j-2)^2}\qquad (j\geqslant 2)$$

$$F_{j+2}^{(0)}=\frac{F_j-24(6j^2-6j+1)H_{j+2}^{(0)}+32j(2j-1)(j-1)G_{j+2}^{(0)}+\omega^2F_j^{(0)}}{(2j)^2(2j-2)^2}\qquad (j\geqslant 2)$$

$$E_{j+2}^{(0)}=\frac{\begin{array}{c}E_j-24(2j-1)H_{j+2}^{(0)}-8(6j^2-6j+1)G_{j+2}^{(0)}\\-16j(2j-1)(j-1)F_{j+2}^{(0)}+\omega^2E_j^{(0)}\end{array}}{(2j)^2(2j-2)^2}\qquad (j\geqslant 2)$$

这里的E_j，F_j，G_j 和H_j是如下定义的系数

$$E_j=-\frac{3}{4}\Big\{2(j-1)\sum_{i=0}^{j}\Big(A_i^{(2)}+2iA_i^{(1)}\Big)B_{j-i}^{(1)}+\sum_{i=0}^{j}[2iA_i^{(2)}B_{j-i}^{(1)}$$
$$+(A_i^{(2)}+2iA_i^{(1)})B_{j-i}^{(2)}]\Big\}$$

$$F_j=-\frac{3}{2}\Big\{(j-1)\sum_{i=0}^{j}[2iA_i^{(2)}B_{j-i}^{(1)}+(A_i^{(2)}+2iA_i^{(1)})B_{j-i}^{(2)}]$$
$$+\sum_{i=0}^{j}[2iA_i^{(2)}B_{j-i}^{(2)}+(A_i^{(2)}+2iA_i^{(1)})B_{j-i}^{(3)}]\Big\}$$

$$G_j=-\frac{3}{2}\Big\{(j-1)\sum_{i=0}^{j}[2iA_i^{(2)}B_{j-i}^{(2)}+(A_i^{(2)}+2iA_i^{(1)})B_{j-i}^{(3)}]$$
$$+3\sum_{i=0}^{j}iA_i^{(2)}B_{j-i}^{(3)}\Big\}$$

$$H_j=-3(j-1)\sum_{i=0}^{j} iA_i^{(2)}B_{j-i}^{(3)}$$

将修正迭代解(3.13)代入边界条件(3.11a～c)和(3.12a, b)，我们有

$$\tilde{B}\tilde{\xi}=0 \tag{3.14}$$

这里$\tilde{\xi}$是一向量

$$\tilde{\xi}=[\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,1]^T$$

而$\tilde{B}$是(5×5)矩阵

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} b_{01} & b_{02} & b_{03} & b_{04} & (W_m^2f_0-1) \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & (W_m^2f_1) \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & (W_m^2f_2) \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & (W_m^2f_3) \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & (W_m^2f_4) \end{bmatrix}.$$

矩阵元素b_{lm}和f_l($l=0$, 1, 2, 3, 4; $m=1$, 2, 3, 4)都表示为ω的无穷幂级数，这里不一一列举于此。

由于$\tilde{\xi}$是非零向量，所以矩阵$\tilde{B}$的行列式为零

$$\det\tilde{B}=0$$

上述行列式可转化为下述代数方程

$$W_m^2=\sum_{j=0}^{\infty}\zeta_j\omega^{2j}\Big/\sum_{j=0}^{\infty}\eta_j\omega^{2j} \tag{3.15}$$

为简计，这里不一一列举ζ_j，η_j的表达式。在上式中令$W_m\to 0$，则（3.15）退化到线性情形(3.7)，并由此得到$\omega=\omega_0$。

式(3.15)即是所求出的环板振动的振幅和振频的解析关系式。利用此式可对一定的幅值W_m求出ω值，然后由前面的递推公式求出$A_j^{(0)}$，$B_j^{(0)}$，$C_j^{(0)}$，$D_j^{(0)}$，$E_j^{(0)}$，$F_j^{(0)}$，$G_j^{(0)}$和$H_j^{(0)}$，这样矩阵$\tilde{B}$的元素b_{lm}和f_l就定出了，从而由方程(3.14)定出系数ξ_1，ξ_2，ξ_3和ξ_4。至此，问题(2.18)～(2.21)的二阶修正迭代解就完全确定了。

利用式（3.15)，我们考虑文[5]曾用有限元法所考虑过的一种情形，由此所得的数值结果(W_m～ω_0/ω)绘于图1中。由图知我们的结果与文[5]结果十分一致，而且其范围更大些。由于本文解析法的直接和简捷性较以往的数值方法优越，值得将此方法向扁壳体大幅度振动问题的研究中推广。

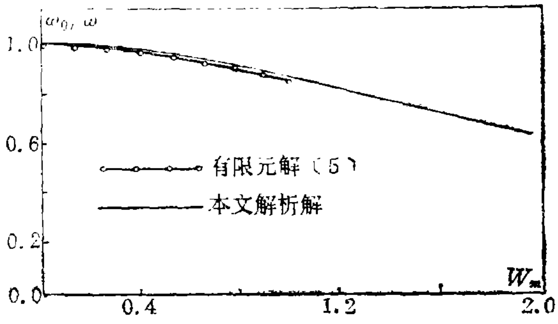

图1 理论结果的比较（$a=0.1$, $\nu=0.3$）

致谢　作者对导师刘人怀教授在本文工作中给予的热心关怀表示感谢.

参 考 文 献

[1] Nayfeh, A. H. and D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, Inc., New York (1979).

[2] Sandman, B. E. and C. L. Huang, Finite amplitude oscillations of a thin elastic annulus, *Dev. Mech.*, **6** (1971), 921—934.

[3] Huang, C. L., Nonlinear oscillations of an annulus with variable thickness, *Dev. Theor. Appl. Mech.*, **7** (1974), 271—284.

[4] Huang, C. L. and H. K. Woo, et al., Nonlinear flexural oscillations of a partially tapered annular plate, *Inter. J. Non-Linear Mech.*, **11** (1976), 89—97.

[5] Reddy, J. N. and C. L. Huang, Large amplitude free vibrations of annular plates of variable thickness, *J. Sound Vib.*, **79** (1981), 387—396.

[6] 刘人怀, 夹层圆板的非线性弯曲, 应用数学和力学, **2**, 2 (1981), 173—190.

[7] Liu Ren-huai, Nonlinear thermal stability of bimetallic shallow shells of revolution, *Inter. J. Non-Linear Mech.*, **18** (1983), 409—429.

[8] 刘人怀、李东, 均布载荷作用下开顶扁球壳的非线性稳定问题, 应用数学和力学, **9**, 3 (1988), 205—218.

[9] Li Dong and Liu Ren-huai, Nonlinear free vibration of thin circular plates, *Adv. Appl. Math. Mech. China*, Edited by Chien Wei-zang, **3** (1989).

[10] 李东、刘人怀, 修正迭代法在波纹圆板非线性振动问题中的应用, 应用数学和力学, **11**, 1 (1990), 13—22.

Large Amplitude Vibration of Thin Annular Plates

Li Dong

(*Shanghai University of Technology; Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai*)

Abstract

A pure analytic solution of the axisymmetric large amplitude free vibration of thin annular plates is presented in this paper. By using the modified iteration method, we derive an analytic relation for the amplitudes vs. frequencies of vibrations. The present paper shows the great potentiality of this method to tackle the large amplitude vibration problems of plates.

Key words annular plate, large amplitude, vibration