应用数学和力学，第12卷第5期（1991年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非对称的Lax-Milgram引理对非关联塑性的一个应用*

岑燕明

（贵州民族学院，1989年9月19日收到）

摘　要

在塑性势和屈服面的广泛假设下，研究了非关联塑性的某些性质。对强化材料，通过使用非对称的Lax-Milgram引理，证明了当强化参数$A>\|\partial F/\partial\sigma\|\|\partial Q/\partial\sigma\|-\langle\partial F/\partial\sigma,\ \partial Q/\partial\sigma\rangle$时，应力位移增量分布的存在唯一性。

关键词　非对称性　非关联塑性　存在　唯一

通常在弹塑性的研究中，多采用关联塑性，也就是塑性势面和屈服面相一致。但是，在实际问题中，有很多材料并不遵循关联塑性的流动法则。例如，岩石、水泥发生塑性变形时的力学特性就必须用非关联的流动法则来进行描述。本文借助于非对称的Lax-Milgram引理，我们将详细地讨论非关联塑性的一系列的重要问题。

一、预备和符号

假设塑性势面和屈服面分别地表示为$Q(\sigma,\omega)$和$F(\sigma,\omega)$。$Q(\sigma,\omega)$和$F(\sigma,\omega)$都是应用空间中连续可微的函数。

文[1](p.486)给出了非关联的弹塑性矩阵：

$$[D_{ep}]=[D_e]-[D_e]\left\{\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\}^T[D_e]\Big/\left(A+\left\{\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\}^T[D_e]\left\{\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\}\right).$$

这里　$[D_e]=2G\left[I_6+\dfrac{2\nu}{1-2\nu}[l_3][l_3]^T\right]$为弹性矩阵，$[l_3]=[1,1,1,0,0,0]^T$，

$A=-\dfrac{\partial F}{\partial\omega}\{\sigma\}^T\left\{\dfrac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\}$为强化参数。

对强化材料：$A>0$。对理想塑性材料：$A=0$。在有关问题的讨论中，总是假定材料是各向同性，等向强化的。为方便起见，我们先列出下列引理：

引理1　设M_6是六维的实向量空间，$[D_e]$是弹性矩阵，$\forall\eta,\ \eta_1\in M_6$，定义内积：$\langle\eta,\eta_1\rangle=\eta^T[D_e]\eta_1$，则$M_6$是一实欧氏空间。

以下，将以$\|\cdot\|$表示由这内积导出的范数。以$|\cdot|$表示通常的欧氏范数。

* 杨桂通推荐。

引理 2　设V是一实的Hilber空间，$a(\cdot,\cdot)$是在乘积空间$V\times V$上定义的一泛函使得：(i) $a(x,y)$关于x和y是线性的．(ii) $|a(x,y)|\leqslant C_1\|x\|_V\|y\|_V$，对某$C_1>0$和一切的$x,y\in V$．(iii) $a(x,x)\geqslant C_2\|x\|_V^2$，对某$C_2>0$和一切的$x\in V$．则存在唯一确定的有界线性算子$S$，它具有一个有界线性逆$S^{-1}$，使得

$$\langle x,y\rangle_V=a(x,Sy);\quad \|S\|<1/C_2\quad 且\quad \langle x,S^{-1}y\rangle_V=a(x,y);\quad \|S^{-1}\|<C_1.$$

(参看[2]p.65—p.66)

显然，当V是一实欧氏空间时，引理2亦真。

二、某 些 重 要 结 果

引理 3　设屈服面和塑性势面具有如下的普遍形式：

$$(a)\quad \begin{cases} F(\sigma,\omega)=f(J_2',J_3')-K_1(\omega)=0 \\ Q(\sigma,\omega)=3\alpha\sigma_m+f(J_2',J_3')-K_2(\omega)=0, \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} F(\sigma,\omega)=3\alpha_1\sigma_m+f(J_2',J_3')-K_1(\omega)=0 \\ Q(\sigma,\omega)=3\alpha_2\sigma_m+f(J_2',J_3')-K_2(\omega)=0, \end{cases}$$

则

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\}^T[D_e]\left\{\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\}=\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle>0.$$

证明　只证(b)：据[1](p.490)，有：

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma}=\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma_m}M^0+\frac{\partial F}{\partial J_2'}M^{\mathrm{I}}+\frac{\partial F}{\partial J_3'}M^{\mathrm{II}}\right)\sigma=\left(3\alpha_1M^0+\frac{\partial f}{\partial J_2'}M^{\mathrm{I}}+\frac{\partial f}{\alpha J_3'}M^{\mathrm{II}}\right)\sigma.$$

$$\frac{\partial Q}{\partial\sigma}=\left(3\alpha_2M^0+\frac{\partial f}{\partial J_2'}M^{\mathrm{I}}+\frac{\partial f}{\alpha J_3'}M^{\mathrm{II}}\right)\sigma.$$

于此，$\sigma_m=(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)/3$，$J_2$和$J_3$分别是偏应力张量的第二、第三不变量。

$$M^0=\frac{1}{9\sigma_m}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 对 & & & 0 & 0 & 0 \\ & & 称 & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},\quad M^{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 对 & & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & 称 & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3}\sigma_x & \frac{1}{3}\sigma_z & \frac{1}{3}\sigma_y & -\frac{2}{3}\tau_{yz} & \frac{1}{3}\tau_{zx} & \frac{1}{3}\tau_{xy} \\ & \frac{1}{3}\sigma_y & \frac{1}{3}\sigma_x & \frac{1}{3}\tau_{yz} & -\frac{2}{3}\tau_{zx} & \frac{1}{3}\tau_{xy} \\ & & \frac{1}{3}\sigma_z & \frac{1}{3}\tau_{yz} & \frac{1}{3}\tau_{zx} & -\frac{2}{3}\tau_{xy} \\ 对 & & & -\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ & & 称 & & -\sigma_y & \tau_{yz} \\ & & & & & -\sigma_z \end{bmatrix}$$

$$+\sigma_m\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{对} & & 1 & 0 & 0 \\ & & & \text{称} & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

容易验证：

$$M^0[D_e]M^{\mathrm{I}}=M^{\mathrm{I}}[D_e]M^0=0;\quad M^0[D_e]M^{\mathrm{II}}=M^{\mathrm{II}}[D_e]M^0=0.$$

$$\therefore\quad \left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle=\langle 3\alpha_1M^0\sigma,\ 3\alpha_2M^0\sigma\rangle+\left\langle\left(\frac{\partial f}{\partial J_2'}M^{\mathrm{I}}+\frac{\partial f}{\partial J_3'}M^{\mathrm{II}}\right)\sigma,\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial f}{\partial J_2'}M^{\mathrm{I}}+\frac{\partial f}{\partial J_3'}M^{\mathrm{II}}\right)\sigma\right\rangle=9\alpha_1\alpha_2\|M^0\sigma\|^2+\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial J_2'}M^{\mathrm{I}}+\frac{\partial f}{\partial J_3'}M^{\mathrm{II}}\right)\sigma\right\|^2$$

$$=6\alpha_1\alpha_2G\cdot\frac{1+\nu}{1-2\nu}+\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial J_2'}M^{\mathrm{I}}+\frac{\partial f}{\partial J_3'}M^{\mathrm{II}}\right)\sigma\right\|^2>0.$$

特别，设 $\begin{cases}F(\sigma,\omega)=\sqrt{3}\,(J_2')^{1/2}-K_1(\omega)=0\\ Q(\sigma,\omega)=3\alpha\sigma_m+(J_2')^{1/2}-K_2(\omega)=0,\end{cases}$

则 $\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle=3G>0.$

于此，$\sqrt{3}\,(J_2')^{1/2}-K_1(\omega)=0$ 和 $3\alpha\sigma_m+(J_2')^{1/2}-K_2(\omega)=0$ 分别是主应力空间中具有共同轴线 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$ 的一个圆柱面和一个锥面，锥顶在该轴线上([1]p.491)．当产生塑性屈服时，应力不可能处于锥顶．否则，米塞斯圆的半径将变为零．因此，对产生塑性屈服的任何应力状态 $\{\sigma\}$，$F(\sigma,\omega)$ 和 $Q(\sigma,\omega)$ 都是连续可微的．

类似地，设 $\begin{cases}F(\sigma,\omega)=\alpha_1J_1+(J_2')^{1/2}-K_1(\omega)=0\\ Q(\sigma,\omega)=\alpha_2J_1+(J_2')^{1/2}-K_2(\omega)=0,\end{cases}$

则 $\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\sigma Q}{\partial\sigma}\right\rangle=6G\alpha_1\alpha_2\cdot\frac{1+\nu}{1-2\nu}+G>0.$

基于上述引理，在以下的讨论中，我们将总是假定 $\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle>0.$

定理 1 对强化材料，如果 $A>\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|-\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle$，则非关联的弹塑性矩阵是可逆的．

证明 $\forall\eta,\eta_1\in M_6,\ a(\eta,\eta_1)=\eta^T[D_{ep}]\eta_1$ 是在 $M_6\times M_6$ 上的一非对称的双线性形式，且

(ⅰ) $$|a(\eta,\eta_1)|=|\eta^T[D_{ep}]\eta_1|=\left|\langle\eta,\eta_1\rangle-\left\langle\eta,\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\eta_1\right\rangle\Big/\left(A+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)\right|$$

$$\leqslant\|\eta\|\|\eta_1\|+\|\eta\|\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|\|\eta_1\|\Big/\left(A+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)$$

$$=\left[1+\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|\Big/\left(A+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)\right]\|\eta\|\|\eta_1\|=C_1\|\eta\|\|\eta_1\|。$$

其中，$C_1=1+\dfrac{\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|}{A+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle}>0$且与塑性区每一点的应力状态有关.

(ii) $a(\eta,\eta)=\eta^T[D_{ep}]\eta=\|\eta\|^2-\left\langle\eta,\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\eta\right\rangle\Big/\left(A+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)$

$$\geqslant\|\eta\|^2-\|\eta\|\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|\|\eta\|\Big/\left(A+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)=C_2\|\eta\|^2.$$

$C_2=\left[A-\left(\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|-\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)\right]\Big/\left(A+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)>0$，亦与该点的应力状态有关.

由引理2知$[D_{ep}]^{-1}$存在.

事实上，由引理2知存在一唯一确定的矩阵S，它具有逆S^{-1}，使得$\forall\eta,\eta_1\in M_6$，

$\eta^T[D_e]\eta_1=\eta^T[D_{ep}](S\eta_1)=\eta^T([D_{ep}]\cdot S)\eta_1$.

$\therefore$ $[D_e]=[D_{ep}]\cdot S$，从而$[D_{ep}]=[D_e]\cdot S^{-1}$

但是，$[D_e]^{-1}$存在，而$(S^{-1})^{-1}=S$.

因此，$([D_e]\cdot S^{-1})^{-1}=S\cdot[D_e]^{-1}$，从而$[D_{ep}]^{-1}$存在且等于$S\cdot[D_e]^{-1}$.

定理2 对理想塑性材料，非关联的弹塑性矩阵是不可逆的.

证明 如果$A=0$，直接计算得：$[D_{ep}]\{\partial Q/\partial\sigma\}=0$.但是，当产生塑性应变时，$\{\partial Q/\partial\sigma\}\neq0$.

$\therefore$ $[D_{ep}]$有非零的核，即$[D_{ep}]$不可逆.

定理3 设a) 屈服面和塑性势面分别具有如下的形式：$F(\sigma,\omega)=f(J_2',J_3')-K_1(\omega)=0$；$Q(\sigma,\omega)=g(J_2',J_3')-K_2(\omega)=0$或$Q(\sigma,\omega)=aJ_1+q(J_2',J_3')-K_2(\omega)=0$，且$Q(\sigma,\omega)$是应力空间中一连续可微的齐次函数. b) $A>\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|-\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle$. 如果弹塑性体中的塑性变形仅处于强化阶段，则存在与应力状态无关的正的常数C_1'和C_2'，使得对塑性区的一切点以及$\forall\eta,\eta_1\in M_6$

$$|\eta^T[D_{ep}]\eta_1|\leqslant C_1'\|\eta\|\|\eta_1\|,$$
$$\eta^T[D_{ep}]\eta\geqslant C_2'\|\eta\|^2.$$

证明 (i)设K_1^B和K_1^E分别是该强化材料的初始屈服值和最终屈服值. 如果塑性变形仅处于强化阶段，则对弹塑性体中塑性区域的任何点，偏应力的值必属于π平面的下述有界闭区域：

$$E=\{\{\sigma_{ij}'\}\mid K_1^B\leqslant f(J_2',J_3')\leqslant K_1^E\}.$$

但是，$\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}=\dfrac{\partial f}{\partial J_2'}\sigma_{ij}'+\dfrac{\partial f}{\partial J_3'}t_{ij}'$；$\dfrac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}}=\dfrac{\partial q}{\partial J_2'}\sigma_{ij}'+\dfrac{\partial q}{\partial J_3'}t_{ij}'$；

或 $\dfrac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}}=a\delta_{ij}+\dfrac{\partial q}{\partial J_2'}\sigma_{ij}'+\dfrac{\partial q}{\partial J_3'}t_{ij}'$.

这里 σ_{ij}'是偏应力张量的分量，

$$t'_{ij}=\sigma'_{ik}\sigma'_{kj}-\frac{2}{3}J'_2\delta_{ij},\quad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j).\end{cases}$$

由此，$\dfrac{\partial F}{\partial\sigma_{ij}}$和$\dfrac{\partial Q}{\partial\sigma_{ij}}$仅仅是偏应力张量分量的函数，从而$\left\|\dfrac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|$和$\left\|\dfrac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|$都是定义在有界闭区域$E$上的连续函数。所以，存在正常数$M_1$，$M_2$和$M'_1$，$M'_2$使得

$$M_2\geqslant\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|\geqslant M_1>0;\qquad M'_2\geqslant\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|\geqslant M'_1>0.$$

(ii)设对应于最终屈服值的ω值为ω_E。因为$K_1(\omega)$和$K_2(\omega)$都是$[0,\omega_E]$上严格单调增加连续可微的正函数，而由塑性势$Q(\sigma,\omega)$是应力空间的n次$(n\geqslant1)$的齐次函数，所以

$$A+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle=-\frac{\partial F}{\partial\omega}\{\sigma\}^T\left\{\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\}+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle$$

$$=nK'_1(\omega)K_2(\omega)+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle$$

且

$$A-\left(\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|-\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)=nK'_1(\omega)K_2(\omega)$$

$$-\left(\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|-\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)$$

都是定义在$[0,\omega_E]\times E$上的连续正函数。因此，存在正数M_3，M_4和M'_3，M'_4使得

$$M_4\geqslant A+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\geqslant M_3>0.$$

$$M'_4\geqslant A-\left(\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|-\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)\geqslant M'_3>0.$$

由(i)，(ii)和定理1，有

$$1+\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|\Big/\left(A+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)\leqslant1+M_2M'_2/M_3,$$

$$\left[A-\left(\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|-\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)\right]\Big/\left(A+\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle\right)$$

$$\geqslant M'_3/M_4>0.$$

只需取 $C'_1=1+M_2M'_2/M_3$和$C'_2=M'_3/M_4$.

从上面的证明可看出：证明的一个关键是阐明$\left\|\dfrac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|$，$\left\|\dfrac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|$和$\left\langle\dfrac{\partial F}{\partial\sigma},\dfrac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\rangle$仅是偏应力张量诸分量的一个连续正函数，而偏应力的值属于有界闭区域E。通常这些条件是满足的。例如，无论对Mises准则还是Drucker-Prager准则，这些量都是常数。它们与偏应力无关。在上述条件下，如果用$F(\sigma,\omega)=\alpha'J_1+f(J'_2,J'_3)-K_1(\omega)=0$来代替该定理中的屈服面，则定理仍真。

三、存在和唯一性

对于应力、位移增量分布的存在唯一性，我们可以考虑和关联塑性完全同样形式的边值问题。但是，在关联塑性中，$[D_{ep}]$是对称的；在非关联塑性中，$[D_{ep}]$是非对称的。因此，必需引用如下的非对称的Lax-Milgram引理。

引理 4 设V一是Hilber空间，$a(\cdot,\cdot):V\times V\to R$是一$V$-椭圆非对称的双线性形式，

而$f:V\to R$是一连续线性形式。则存在唯一的$u_0\in V$使得

$$a(u_0,v)=f(v)\qquad(\forall v\in V)$$

（参看[5]p.7—p.9）

下面，我们将对强化材料讨论位移增量的分布。

考虑问题：

$$\begin{cases} B^T\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)[D]B\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)[dU]+[dF]=0 \\ dU|_{\partial\Omega u}=0 \\ B^T(\cos(n,x),\cos(n,y),\cos(n,z))[B]\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)[dU]_{\partial\Omega\sigma}=[dT] \end{cases}$$

这里

$$[D]=\begin{cases}[D_e] & \text{弹性区（包括卸载）}\\ [D_{ep}] & \text{塑性区}\end{cases}$$

$[D_{ep}]$是非关联的弹塑性矩阵。

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}^T$$

设V是如下的Hilbert空间：

$$V=\left\{dU=\begin{Bmatrix}du_1\\du_2\\du_3\end{Bmatrix},\ du_i\in H_1(\Omega),\ i=1,2,3,dU|_{\partial\Omega u}=0\right\}$$

虚功方程：

$$D(dU,\ \Phi)=F(\Phi)\qquad(\forall\Phi\in V).$$

$$D(dU,\Phi)\equiv\iiint_\Omega\left[B\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi\right]^T[D]B\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)[dU]d\Omega$$

$$F(\Phi)\equiv\iiint_\Omega[\Phi]^T[dF]\,d\Omega+\iint_{\partial\Omega u}[\Phi]^T[dT]dS.$$

在V上的内积：

$$\langle dU,\Phi\rangle_V=\langle du_1,\varphi_1\rangle_{H1}+\langle du_2,\varphi_2\rangle_{H1}+\langle du_3,\varphi_3\rangle_{H1}.$$

定理 4 对强化材料，如果定理 3 的条件满足且塑性变形仅处于强化阶段，则满足上述虚功方程的非关联弹塑性位移增量的解存在唯一。

证明 由定义在有限维空间上的任一范数等价于欧氏范数以及定理 3 知，存在一个与应力状态无关的正的常数C_1''，使得对弹塑性体中的一切点以及$\forall\eta,\eta_1\in M_6$，

$$|\eta^T[D]\eta_1|\leqslant C_1''|\eta||\eta_1|.\ \therefore|D(dU,\Phi)|\leqslant\iiint_\Omega\left|\left[B\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi\right]^T\right.$$

$$\cdot[D]B\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)[dU]\Big|d\Omega\leqslant C_1''\iiint_\Omega\Big|B\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi\Big|$$

$$\cdot\Big|B\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)[dU]\Big|d\Omega\leqslant 5C_1''\|\Phi\|_V\|dU\|_V.$$

由此，$D(dU,\Phi):V\times V\to R$是一连续的非对称的双线性形式。显然，$F(\Phi)$是$V$上的连续线性形式。

类似地，存在与应力状态无关的正的常数C_2''，使得

$$\forall\eta\in M_6,\quad \eta^T[D]\eta\geqslant C_2''|\eta|^2.$$

从而，$D(dU,\ dU)\geqslant C_2''\iiint_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}d\varepsilon_{ij}^2 d\Omega$.

由 Korn 不等式：

$$\iiint_\Omega(|(dU)_x|^2+|(dU)_y|^2+|(dU)_z|^2)\ d\Omega\leqslant C_3''\iiint_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}d\varepsilon_{ij}^2 d\Omega.$$

考虑关于dU的线性泛函：

$$l(dU)=\iint_{\partial\Omega_u}(dU)dS.$$

对于任何非零常数（即非零零次多项式），它不为零。由迹定理知：

$$|l(dU)|\leqslant\iint_{\partial\Omega_u}|dU|dS\leqslant C_4\|dU\|_{\partial\Omega}\leqslant C_4\|dU\|_V.$$

即$l(dU)$是V上的有界线性泛函。

由等价模定理有：

$$\|dU\|_V^2\leqslant M(|dU|_V^2+|l(dU)|^2).$$

这里，$|\cdot|$是V上的半模。

但是，当$dU\in V$时，$dU|_{\partial\Omega_u}=0$，故$l(dU)=0$。于是，$\|dU\|_V^2\leqslant M|dU|_V^2$.

即
$$\|dU\|_V^2\leqslant M\iiint_\Omega(|(dU)_x|^2+|(dU)_y|^2+|(dU)_z|^2)d\Omega.$$

$$\therefore\qquad D(dU,dU)\geqslant\gamma_0\|dU\|_V^2.$$

借助于非对称的Lax-Milgram引理，位移增量的广义解存在唯一。

从该定理，利用$d\varepsilon_{ij}=(du_{i,j}+du_{j,i})/2$，则$d\varepsilon_{ij}$是唯一确定的。进一步，由定理1知$[D_{ep}]$可逆。从而$[D]$也可逆。由此，应力增量的分布存在唯一。

推论1 取$F(\sigma,\omega)=\sqrt{3}(J_2')^{1/2}-K_1(\omega)=0$，而$Q(\sigma,\ \omega)=aJ_1+(J_2')^{1/2}-K_2(\omega)=0$，则当

$$A>\sqrt{3}G\left(\sqrt{1+6\alpha^2\cdot\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)}}-\sqrt{3}\right)$$时，定理1，定理2和定理3真。

推论2 设$F(\sigma,\omega)=\alpha_1J_1+(J_2')^{1/2}-K_1(\omega)=0$ 且$Q(\sigma,\omega)=\alpha_2J_1+(J_2')^{1/2}-K_2(\omega)=0$，则当

$$A>G\left[\sqrt{\left(1+6\alpha_1^2\cdot\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)\left(1+6\alpha_2^2\cdot\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)}-\left(1+6\alpha_1\alpha_2\cdot\frac{1+\nu}{1-2\nu}\right)\right]$$

时，定理1，定理2，定理3真．

证明 对上面的两个推论，只需对给定的塑性势面和屈服面分别地计算

$\left\|\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right\|\left\|\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right\|-\left\langle\frac{\partial F}{\partial\sigma},\ \frac{\partial\theta}{\partial\sigma}\right\rangle$即可．

参 考 文 献

[1] 监凯维奇，O.C.，《有限元法》（下册）（尹泽勇、柴家振译），科学出版社，北京（1985）．

[2] Curtain, Ruth F. and A. J. Pritchard, *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*, Academic Press London, New York, San Francisco (1977).

[3] Hill, R.，《塑性数学理论》（王仁等译），科学出版社，北京（1966）．

[4] Lions, J. L and G. Stampacchia, Variational inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 (1967), 493—519.

[5] Ciarlat, Philippe G., *The Finite Element Method for Elliptic Problem*, 4 (1978).

An Application of Nonsymmetric Lax-Milgram Lemma to Nonassociated Plasticity

Cen Yan-ming

(*Guizhou Institute for Nationalities, Guiyang*)

Abstract

Usually, in the study of elasto-plasticity, the assoiated plasticity, i. e. the plastic potential surface coincides with yield surface, is often used. However, in practical problems, there are many materials which do not obey the associated plastic flow rule. For instance, the mechanical behavior of rock, concrete, etc. must be described by the nonassociated flow rule when deformation occur. In this paper, by means of the nonsymmetric Lax-Milgram lemma, we shall discuss a series of important questions of the nonassociated plasticity in detail.

Key words nonsymmetry, nonassociated plasticity, existence, uniqueness