应用数学和力学，第12卷第2期（1991年2月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

关于具有转点的常微分方程的边值问题*

江福汝

（上海工业大学，上海市应用数学和力学研究所，1990年2月24日收到）

摘要

本文研究下面形式的边值问题

$$\varepsilon y''-f(x,\varepsilon)y'+g(x,\varepsilon)y=0 \qquad (-a\leqslant x\leqslant b,\ 0<\varepsilon\ll 1)$$

$$y(-a)=\alpha,\ y(b)=\beta$$

其中$f(x,0)$在区间$[-a,b]$上具有多个和多重零点．给出了出现边界层和内部层的条件，并在相应的条件下，构造解的渐近展开式．

关键词 常微分方程 奇异摄动 转点问题

一、引言

关于具有转点的奇异摄动问题，近来越来越引起数学家和物理学家们的兴趣．这不仅因为它有着理论上的重要性，即关于具有某种奇性问题的研究[1]，并且还有着实际意义．至于本文所研究的边值问题：

$$\varepsilon y''-f(x,\varepsilon)y'+g(x,\varepsilon)y=0 \qquad (-a\leqslant x\leqslant b,\ 0<\varepsilon\ll 1) \tag{1.1}$$

$$y(-a)=\alpha,\ y(b)=\beta \tag{1.2}$$

其中$a>0$，$b>0$，α，β是常数，$f(x,0)$在区间$[-a,b]$上存在零点，称之为边值问题（1.1）～(1.2)的转点，则是来自流体力学中关于逆向旋转圆盘间的大雷诺数流的研究[2]．

关于$f(x,0)$在区间内部存在一个零点（不妨设是$x=0$）和成立$f_x(x,0)>0$的情形，Ackerberg和O'Malley[3]曾首先进行了系统的研究．他们发现边值问题的解当$\varepsilon\to 0$时，在一般情况下，在区间的内部是以零为极限，除非成立条件

$$g(0,0)/f_x(0,0)=N \qquad (N:\text{非负整数}) \tag{1.3}$$

如果其极限在区间的内部不是零，则称边值问题出现共振（Ackerberg-O'Malley共振）．以后O'Malley又在他的著作[4]中给出许多例子，用以说明解的极限的复杂性．甚至有这样的例子，它们的解的极限在区间内部的每一点都是无界．以后有很多工作讨论这类共振问题．1975年，Matkowsky[5]给出共振的必要条件：若方程(1.1)的系数在区间$(-a,b)$是全纯的，则要求解的外部展开式

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊（Ⅰ）论文．
国家自然科学基金资助项目．

$$Y_s(x)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i(x)\varepsilon^i \tag{1.4}$$

中的所有项$A_i(x)$是有界的，今称此为Matkowsky条件．1989年，江福汝[6]又用例子说明过去所有用方程系数给出的共振条件，都是不充分的；并导出用方程系数表示的共振必要条件序列．如果此序列满足，则出现共振．特别地，若$g(x,\varepsilon)\equiv 0$，或$f(x,\ \varepsilon)\equiv Ax$，$g(x,\varepsilon)\equiv B$，$A$和$B$是常数和$A>0$，且满足条件(1.3)，则此必要条件序列恒满足，都将出现共振．

但关于$f(x,0)$在$[-a,b]$上存在多个和多重零点的情形，Matkowsky 只在[5]中考察了一个例子；de Groen[7]只对$g(x,\varepsilon)\equiv 0$的情形，说明解的极限的某种形态．本文试图在一般情形下研究解的极限的性质．首先给出出现边界层和内部层的条件，然后就各种条件，构造解的展开式．

二、出现边界层和内部层的条件

假设方程(1.1)的系数具有渐近展开式

$$f(x,\varepsilon)\sim f_0(x)+\varepsilon f_1(x)+\varepsilon^2 f_2(x)+\cdots$$

$$g(x,\ \varepsilon)\sim g_0(x)+\varepsilon g_1(x)+\varepsilon^2 g_2(x)+\cdots$$

及$f_i(x)$，$g_i(x)$($i=0$，1，2，…)在$(-a,\ b)$内是全纯的．

引入多重尺度度量

$$\xi=u(x)/\varepsilon,\quad \eta=x \tag{2.1}$$

其中$u(x)$是待定函数．在变量ξ，η下，方程(1.1)具有形式：

$$(K_0+\varepsilon K_1+\varepsilon^2 K_2+\cdots)y=0 \tag{2.2}$$

其中

$$K_0\equiv u_x^2(\eta)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-u_x(\eta)f_0(\eta)\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{2.3}$$

$$K_1\equiv 2u_x(\eta)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+u_{xx}(\eta)\frac{\partial}{\partial\xi}-u_x(\eta)f_1(\eta)\frac{\partial}{\partial\xi}-f_0(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}+g_0(\eta) \tag{2.4}$$

$$K_2\equiv -u_x(\eta)f_2(\eta)\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-f_1(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}+g_1(\eta) \tag{2.5}$$

$$K_i\equiv -u_x(\eta)f_i(\eta)\frac{\partial}{\partial\xi}-f_{i-1}(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}+g_{i-1}(\eta)\qquad (i=3,\ 4,\ \cdots) \tag{2.6}$$

假设边值问题(1.1)～(1.2)的解$y_s(x)$具有渐近展开式

$$y_s(x)=y_s(\xi,\ \eta)=y_0(\xi,\ \eta)+\varepsilon y_1(\xi,\ \eta)+\varepsilon^2 y_2(\xi,\ \eta)+\cdots \tag{2.7}$$

将(2.7)式代入方程(2.2)，并令ε的各次幂的系数为零，则得到确定$y_i(\xi,\ \eta)$ ($i=0$，1，2，…)的一列递推方程：

$$K_0y_0\equiv u_x^2(\eta)\frac{\partial^2 y_0}{\partial\xi^2}-u_x(\eta)f_0(\eta)\frac{\partial y_0}{\partial\xi}=0 \tag{2.8}$$

$$K_0y_1\equiv -K_1y_0 \tag{2.9}$$

$$K_0 y_i = -(K_1 y_{i-1} + K_2 y_{i-2} + \cdots + K_i y_0) \qquad (i=2,3,\cdots) \tag{2.10}$$

为了使算子K_0取最简单的形式，可以取待定函数$u(x)$为

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} -f_0(t)dt$$

其中x_0是待定的$[-a,b]$上的点．于是算子K_i $(i=0;\ 1;\ 2;\ \cdots)$化为

$$K_0 \equiv f_0^2(\eta)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

$$K_1 \equiv -2f_0(\eta)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} - f_0(\eta)\frac{\partial}{\partial\xi} + f_0(\eta)f_1(\eta)\frac{\partial}{\partial\xi} - f_0(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta} + g_0(\eta)$$

$$K_2 \equiv f_0(\eta)f_2(\eta)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - f_1(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta} + g_1(\eta)$$

$$K_i \equiv f_0(\eta)f_i(\eta)\frac{\partial}{\partial\xi} - f_{i-1}(\eta)\frac{\partial}{\partial\eta} + g_{i-1}(\eta) \qquad (i=3,\ 4,\ \cdots)$$

从递推方程(2.8)～(2.10)可以逐步地解得

$$y_i(\xi,\eta) = A_i(\eta) + B_i(\eta)e^{-\xi} = A_i(x) + B_i(x)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^{x} -f_0(t)dt\right) \equiv y_i(x)$$

$$(i=0,1,2,\cdots) \tag{2.11}$$

其中

$$A_0(x) = C_0\exp\left(\int_{x_1}^{x}\frac{g_0}{f_0}dt\right),\quad B_0(x) = \frac{D_0}{f_0(x)}\exp\left[\int_{x_2}^{x}\left(f_1 - \frac{g_0}{f_0}\right)dt\right] \tag{2.12}$$

$$A_i(x) = C_i\exp\left(\int_{x_1}^{x}\frac{g_0}{f_0}dt\right) + \int_{x_1}^{x}\frac{-F_i}{f_0(t)}\exp\left(\int_{x}^{t} - \frac{g_0}{f_0}ds\right)dt \tag{2.13}$$

$$B_i(x) = \frac{D_i}{f_0(x)}\exp\left[\int_{x_2}^{x}\left(f_1 - \frac{g_0}{f_0}\right)dt\right] + \int_{x_2}^{x}\frac{-G_i}{f_0(t)}\exp\left[-\int_{x}^{t}\left(f_1 - \frac{g_0}{f_0}\right)ds\right]dt \tag{2.14}$$

C_i和D_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$是确定于边界条件(1.2)的常数；F_i和G_i $(i=1,\ 2,\ \cdots)$是只依赖于A_j和B_j $(j<i)$的有界函数；x_1和x_2是待定的边界点，经适当的选取以便于确定待定常数．

从上面所得出(2.11)～(2.14)式可以看出，$y_i(x)$ $(i\geqslant 0)$除去$f_0(x)$的零点外都有定义，并且解的极限性质完全依赖于积分

$$I(x,\ x_0) = \int_{x_0}^{x} -f_0(t)dt \tag{2.15}$$

的符号．如果边界层出现在左端点$x=-a$，则必须在$x=-a$的邻域成立$I(x,\ -a)>0$；如果出现在右端点$x=b$，则必须在$x=b$的邻域成立$I(x,b)>0$；如果内部层出现在区间内某点$x=p_0$，则必须在$x=p_0$的邻域成立$I(x,p_0)>0$，即必须是函数

$$I(x)=\int^{x} -f_0(t)dt$$

取到极小值的点。

通过第三节中形式解的构作，可以知道成立下面的判别法：

（i） 若$I(x, -a)>0$当$-a<x\leqslant b$，则在$x=-a$出现边界层（除掉α取特殊值）；

（ii） 若$I(x,b)>0$当$-a\leqslant x<b$，则在$x=b$出现边界层（除掉β取特殊值）；

（iii） 若$I(b,-a)=0$，且$I(x,-a)>0$当$-a<x<b$，则边界层出现在两个端点$x=-a$和$x=b$（除掉α和β取特殊值）。

三、解的渐近展开式

先考察$f_0(x)$的零点都落在区间内部的情形，并假设成立Matkowsky条件，即解的外部展开式中的各项都是有界函数。例如$g(x,\varepsilon)\equiv 0$就属于此情形。

（i） 若$I(x, -a)>0$，当$-a<x\leqslant b$。

在(2.11)式中取$x_0=-a$得

$$y_0(x)=C_0\exp\left(\int_{x_1}^{x}\frac{g_0}{f_0}dt\right)+H(x)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}-f_0(t)dt\right) \tag{3.1}$$

其中

$$H(x)=\begin{cases}\dfrac{D_0}{f_0(x)}\exp\left[\displaystyle\int_{x_2}^{x}\left(f_1-\frac{g_0}{f_0}\right)dt\right] & \text{当 } -a\leqslant x<-a+\dfrac{\delta}{2}\\ h(x) & \text{当} -a+\delta/2\leqslant x<-a+\delta\\ 0 & \text{当} -a+\delta\leqslant x\leqslant b\end{cases} \tag{3.2}$$

$\delta>0$是充分小的常数，选择得使在$[-a, -a+\delta]$上没有$f_0(x)$的零点，并使

$$\frac{1}{f_0(x)}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}-f_0(t)dt\right)=O(\varepsilon^N) \qquad \text{当 } x\in\left[-a+\frac{\delta}{2}, -a+\delta\right]$$

N是精确度所要求的正整数，$h(x)$是任意光滑的连接函数。

为了便于确定待定常数C_0和D_0，可在(3.1)式中取$x_1=b$，在(3.2)式中取$x_2=-a$，从边界条件(1.2)得

$$C_0=\beta, \ D_0=f_0(-a)\left[\alpha-\beta\exp\left(-\int_{-a}^{b}\frac{g_0}{f_0}dt\right)\right] \tag{3.3}$$

类似地，可以构作$y_i(x)(i=1,2, \cdots)$. 容易验证如此所作得的展开式渐近地满足方程(1.1)和边界条件(1.2)是边值问题的形式渐近解。

（ii） 若$I(x,b)>0$当$-a\leqslant x<b$。

在(2.11)式中取$x_0=b$得

$$y_0(x)=C_0\exp\left(\int_{x_1}^{x}\frac{g_0}{f_0}dt\right)+H(x)\exp\left(\frac{-1}{\varepsilon}\int_{b}^{x}-f_0(t)dt\right) \tag{3.4}$$

其中

$$H(x)=\begin{cases}0 & \text{当} -a\leqslant x<b-\delta\\ h(x) & \text{当} b-\delta\leqslant x<b-\delta/2\\ \dfrac{D_0}{f_0(x)}\exp\left[\int_{x_2}^{x}\left(f_1-\dfrac{g_0}{f_0}\right)dt\right] & \text{当} b-\dfrac{\delta}{2}\leqslant x\leqslant b\end{cases} \tag{3.5}$$

$\delta>0$是充分小的常数，选择得使在$[b-\delta,b]$上没有$f_0(x)$的零点，并使

$$\frac{1}{f_0(x)}\exp\left(\frac{-1}{\varepsilon}\int_b^x -f_0(t)dt\right)=O(\varepsilon^N)\qquad \text{当} x\in\left[b-\delta,\ b-\frac{\delta}{2}\right]$$

N和$h(x)$的意义同情形(i)。

为了便于确定待定常数，可在(3.4)式中取 $x_1=-a$，在 (3.5) 式中 取 $x_2=b$，从边界条件(1.2)得

$$C_0=\alpha,\ D_0=f_0(b)\left[\beta-\alpha\exp\left(\int_{-a}^{b}\frac{g_0}{f_0}dt\right)\right] \tag{3.6}$$

类似地可以构作$y_i(x)(i=1,\ 2,\ \cdots)$。容易验证如此作得的展开式是边值问题的形式渐近解。

(iii) 若$I(b,\ -a)=0$，且$I(x,\ -a)>0$当$-a<x<b$。

因$I(x,\ b)=I(x,-a)$，所以也成立$I(x,b)>0$当$-a<x<b$，在区间的两端点都可能出现边界层。在(2.11)式中取$x_0=-a$(或$x_0=b$)得

$$y_0(x)=C_0\exp\left(\int_{-a}^{x}\frac{g_0}{f_0}dt\right)+H(x)\exp\left(\frac{-1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}-f_0(t)dt\right)\qquad -a\leqslant x\leqslant b \tag{3.7}$$

其中

$$H(x)=\begin{cases}\dfrac{D_0}{f_0(x)}\exp\left[\int_{-a}^{x}\left(f_1-\dfrac{g_0}{f_0}\right)dt\right] & \text{当} -a\leqslant x<-a+\dfrac{\delta}{2}\\ h_1(x) & \text{当} -a+\delta/2\leqslant x<-a+\delta\\ 0 & \text{当} -a+\delta\leqslant x<b-\delta\\ h_2(x) & \text{当} b-\delta\leqslant x<b-\delta/2\\ \dfrac{D_0}{f_0(x)}\exp\left[\int_{-a}^{x}\left(f_1-\dfrac{g_0}{f_0}\right)dt\right] & \text{当} b-\dfrac{\delta}{2}\leqslant x\leqslant b\end{cases} \tag{3.8}$$

$\delta>0$是充分小的常数，选择得使在$[-a,\ -a+\delta]$和$[b-\delta,\ b]$上没有$f_0(x)$的零点，并使

$$\frac{1}{f_0(x)}\exp\left(\frac{-1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}-f_0(t)dt\right)=O(\varepsilon^N)\qquad \text{当} x\in\left[-a+\frac{\delta}{2},\ -a+\delta\right]$$

和使

$$\frac{1}{f_0(x)}\exp\left(\frac{-1}{\varepsilon}\int_b^x -f_0(t)dt\right)=O(\varepsilon^N)\qquad \text{当} x\in\left[b-\delta,b-\frac{\delta}{2}\right]$$

N与$h_1(x)$和$h_2(x)$的意义同情形(i)和(ii)。

根据边界条件(1.2)可以确定出

$$C_0=\frac{\beta f_0(b)-\alpha f_0(-a)\exp\left[\int_{-a}^{b}\left(f_1-\frac{g_0}{f_0}\right)dt\right]}{f_0(b)\exp\left(\int_{-a}^{b}\frac{g_0}{f_0}dt\right)-f_0(-a)\exp\left[\int_{-a}^{b}\left(f_1-\frac{g_0}{f_0}\right)dt\right]} \tag{3.9}$$

以及

$$D_0=\frac{f_0(-a)f_0(b)\left[\alpha\exp\left(\int_{-a}^{b}\frac{g_0}{f_0}dt\right)-\beta\right]}{f_0(b)\exp\left(\int_{-a}^{b}\frac{g_0}{f_0}dt\right)-f_0(-a)\exp\left[\int_{-a}^{b}\left(f_1-\frac{g_0}{f_0}\right)dt\right]} \tag{3.10}$$

类似地可以构作$y_i(x)(i=1,\ 2,\ \cdots)$。容易验证如此作得的展开式是边值问题的渐近解。

从上面的结果，我们很容易推出 Skinner[8] 所得出的结论：即若$f(x,\ 0)$只有一个转点（设是$x=0$），并且成立$f_x(x,0)>0$当$x\in[-a,b]$，则当 $x=b$ 点从原点向右移动时，边界层从左端移向区间的右端，即边界层出现在哪个端点，与端点的位置有关。这是因为：当$b<a$时，则$I(x,-a)>0$当$-a<x\leqslant b$，所以边界层出现在左端$x=-a$；当$b>a$时，则$I(x,b)>0$当$-a\leqslant x<b$，所以边界层出现在右端$x=b$；当$b=a$时，则$I(b,\ -a)=0$和$I(x,\ -a)>0$当$-a<x<b$，所以边界层将出现在左、右两端点。又以本文的结果可以推知Skinner 的结论，对于$x=0$是多重转点时也成立，只要转点重数n为奇数，和$\partial^n f(x,0)/\partial x^n>0$当$x\in[-a,\ b]$。

例 1 考察Matkowsky在[5]中所讨论的边值问题：

$$\varepsilon y''-x^3(x^2-1)(x-2)^2y'=0 \qquad (-2\leqslant x\leqslant b,\ b>1,\ b\neq 2) \tag{3.11}$$

$$y(-2)=\alpha,\ y(b)=\beta \tag{3.12}$$

的解的极限性态。

在此例中$f_0(x)=x^3(x^2-1)(x-2)^2$，具有零点$x=0$，$x=\pm 1$和二重零点$x=2$。令以b_0表示$I(x,-2)$改变符号的点。

若$b<b_0$，则$I(x,\ -2)>0$当$-2<x\leqslant b$，边界层出现在端点 $x=-2$。从 (3.1)～(3.3) 式有

$$y_0(x)=\beta+H(x)\ \exp\left\{\frac{-1}{280\varepsilon}[\rho(-2)-\rho(x)]\right\} \qquad -2\leqslant x\leqslant b \tag{3.13}$$

其中

$$\rho(x)=35x^8-160x^7+140x^6+224x^5-280x^4 \tag{3.14}$$

和

$$H(x)=\begin{cases}(\alpha-\beta)f_0(-2)/x^3(x^2-1)(x-2)^2 & 当-2\leqslant x<-2+\delta/2\\ h(x) & 当-2+\delta/2\leqslant x<-2+\delta\\ 0 & 当-2+\delta\leqslant x\leqslant b\end{cases} \tag{3.15}$$

$\delta>0$和$h(x)$的意义见情形(i)。

若$b>b_0$，则$I(x,b)>0$当$-2\leqslant x<b$，边界层出现在端点$x=b$和属于情形(ii)，

$$y_0(x)=\alpha+\ H(x)\exp\left\{\frac{-1}{280\varepsilon}[\rho(b)-\rho(x)]\right\} \qquad -2\leqslant x\leqslant b \tag{3.16}$$

其中$\rho(x)$由(3.14)给出，和

$$H(x)=\begin{cases}0 & 当-2\leqslant x<b-\delta\\ h(x) & 当b-\delta\leqslant x<b-\delta/2\\ (\beta-\alpha)f_0(b)/x^3(x^2-1)(x-2)^2 & 当b-\delta/2\leqslant x\leqslant b\end{cases}\tag{3.17}$$

$\delta>0$和$h(x)$的意义见情形(ii)。

若$b=b_0$，则$I(b,-2)=0$，和$I(x,-2)>0$当$-2<x<b$，边界层出现在左、右两端点。从(3.7)～(3.10)式有

$$y_0(x)=C_0+H(x)\exp\left\{\frac{-1}{280\varepsilon}[\rho(-2)-\rho(x)]\right\}\tag{3.18}$$

其中

$$H(x)=\begin{cases}D_0/x^3(x^2-1)(x-2)^2 & 当-2\leqslant x<-2+\delta/2\\ h_1(x) & 当-2+\delta/2\leqslant x<-2+\delta\\ 0 & 当-2+\delta\leqslant x<b-\delta\\ h_2(x) & 当b-\delta\leqslant x<b-\delta/2\\ D_0/x^3(x^2-1)(x-2)^2 & 当b-\delta/2\leqslant x\leqslant b\end{cases}\tag{3.19}$$

和

$$C_0=\frac{\beta f_0(b)-\alpha f_0(-2)}{f_0(b)-f_0(-2)},\quad D_0=\frac{(\alpha-\beta)f_0(-2)f_0(b)}{f_0(b)-f_0(-2)}\tag{3.20}$$

$\delta>0$和$h_1(x)$，$h_2(x)$的意义同情形(iii)。与Matkowsky应用组合法求得的结果相同。

下面再考察在区间$(-a,b)$内，在$f_0(x)$的某个零点$x=x_0$的邻域内成立$I(x,x_0)>0$的情形。由于$f_0(x_0)=0$，从(2.11)式可以看出在该点不存在由(2.11)式表示的指数函数形式的内部层。但在某些情形，可存在由代数函数表达的内部层。考察下面的例子。

例 2　试求边值问题：

$$L_\varepsilon y\equiv\varepsilon y''+px^{2n+1}y'=0\qquad(-1\leqslant x\leqslant 1,\ 0<\varepsilon\ll 1)$$
$$y(-1)=\alpha,\ y(1)=\beta$$

的解的渐近展开式，其中$p>0$是常数，n为正整数。

此时$I(x,\pm1)<0$当$-1<x<1$，所以在端点$x=\pm1$不存在边界层。但在零点的邻域成立$I(x,0)>0$，所以在$x=0$点可能存在内部层。今定义

$$y(x,\varepsilon)=\begin{cases}\alpha & 当-1\leqslant x<-\varepsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}\\ h(x,\varepsilon) & 当-\varepsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}\leqslant x<\varepsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}\\ \beta & 当\varepsilon^{\frac{1}{2(n+1)}}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

其中$h(x,\varepsilon)$是充分光滑的连接函数。容易验证

$$L_\varepsilon y(x,\varepsilon)=O\left(\varepsilon^{\frac{n}{n+1}}\right)$$
$$y(-1,\ \varepsilon)=\alpha,\ y(1,\ \varepsilon)=\beta$$

所以$y(x,\varepsilon)$是边值问题的准确到$O(\varepsilon^{\frac{n}{n+1}})$的渐近解，以$h(x,\varepsilon)$为其代数形式的边界层。

如果不成立Matkowsky条件，即在(1.4)中至少有一项$A_i(x)$为无界，则其外部只可能是零。如果再成立条件：在端点$x=-a$和$x=b$的邻域分别成立$I(x,-a)>0$和$I(x,b)>0$，

则可定义

$$
y_0(x)=\begin{cases}
\dfrac{D_0}{f_0(x)}\exp\left[\int_{-a}^{x}\left(f_1-\dfrac{g_0}{f_0}\right)dt\right]\exp\left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}-f_0(t)dt\right) & \text{当 } -a\leqslant x<-a+\delta/2\\
h_1(x)\exp\left(\dfrac{-1}{\varepsilon}\int_{-a}^{x}-f_0(t)dt\right) & \text{当 } -a+\dfrac{\delta}{2}\leqslant x<-a+\delta\\
0 & \text{当 } -a+\delta\leqslant x<b-\delta\\
h_2(x)\exp\left(\dfrac{-1}{\varepsilon}\int_{b}^{x}-f_0(t)dt\right) & \text{当 } b-\delta\leqslant x<b-\dfrac{\delta}{2}\\
\dfrac{D_1}{f_0(x)}\exp\left[\int_{b}^{x}\left(f_1-\dfrac{g_0}{f_0}\right)dt\right]\exp\left(\dfrac{-1}{\varepsilon}\int_{b}^{x}-f_0(t)dt\right) & \text{当 } b-\delta/2\leqslant x\leqslant b
\end{cases}
$$

$\delta>0$和$h_1(x)$，$h_2(x)$的意义同情形(iii)，D_0和D_1是由边界条件确定的常数.

四、边 界 转 点

容易看出以上所给出的边界层和内部层存在的判别法，对于$f_0(x)$的零点落在区间端点的情形也成立．我们称这些零点为边值问题的边界转点．如果在边界转点上不出现边界层，则可应用以上的结果，写出边值问题的渐近解．

例 3 再考察例1中的边值问题，只是取$b=0$:

$$\varepsilon y''-x^3(x^2-1)(x-2)^2y'=0 \qquad (-2\leqslant x\leqslant 0,\ 0<\varepsilon\ll 1)$$

$$y(-2)=\alpha,\ y(0)=\beta$$

试作出它的渐近解.

此例以$x=0$为边界转点．但$I(x,-2)>0$当$-2<x\leqslant 0$，边界层出现在左端点$x=-2$.由(3.1)～(3.3)式得

$$y_0(x)=\beta+H(x)\exp\left\{\frac{-1}{280\varepsilon}[\rho(-2)-\rho(x)]\right\} \qquad (-2\leqslant x\leqslant 0)$$

其中

$$
H(x)=\begin{cases}
(\alpha-\beta)f_0(-2)/x^3(x^2-1)(x-2)^2 & \text{当 } -2\leqslant x<-2+\delta/2\\
h(x) & \text{当 } -2+\delta/2\leqslant x<-2+\delta\\
0 & \text{当 } -2+\delta\leqslant x\leqslant 0
\end{cases}
$$

$\delta>0$和$h(x)$的意义同情形(i).

若边界层出现在边界转点上，则本文给出的方法失效.

参 考 文 献

[1] Wasow, W., *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Wiley (Interscience), New York (1965).

[2] Watts, A. M., A singular perturbation problem with a turning point, *Bull. Australian Math. Soc.*, 5 (1971), 61—73.

[3] Ackerberg, R.C. and R. E. O'Malley, Jr., Boundary layer problems exhibiting resonance, *Stud. Appl. Math.*, 49 (1970), 277—295.

[4] O'Malley, R. E., Jr., *Introduction to Singular Perturbations*, Academic Press, New York (1974).

[5] Matkowsky, B. J., On boundary layer problem exhibiting resonance, *SIAM Rev.*, 17 (1975), 82—100.

[6] 江福汝, 关于常微分方程转点问题共振的必要条件，应用数学和力学, 10, 4 (1989), 277—284.

[7] De Groen, P. P. N., The singularly perturbed turning point problem: a spectral approach, *Singular Perturbation and Asymptotic*, Academic Press, New York (1980), 149—172.

[8] Skinner, L. A., Uniform solution of boundary layer problems exhibiting resonance, *SIAM J. Appl. Math.*, 47, 2 (1987), 225—231.

On the Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with Turning Points

Jiang Fu-ru

(Shanghai University of Technology, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

In this paper, we consider the boundary value problems of the form

$$\varepsilon y''-f(x,\varepsilon)y'+g(x,\varepsilon)y=0 \qquad (-a\leqslant x\leqslant b,\ 0<\varepsilon\ll 1)$$

$$y(-a)=\alpha,\ y(b)=\beta$$

where $f(x,0)$ has several and multiple zeros on the interval $[-a,b]$. The conditions for exhibiting boundary and interior layers are given, and the corresponding asymptotic expansions of solutions are constructed.

Key words ordinary differential equation, singular perturbation, turning point problem