应用数学和力学，第12卷第2期（1991年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Hertz接触问题的精确的积分方程*

云 天 铨

（华南理工大学工程力学系，1990年3月5日）

摘 要

本文给出Hertz接触问题的精确积分方程，也就是将压力作用下接触面中各点的水平位移也考虑在内而得到的积分方程.

关键词 弹性力学 接触问题 积分方程

一、概 述

Hertz接触问题是熟知的一个古典弹性力学问题，许多教科书，例如[1]，都有介绍. 1881年，H·Hertz首次解决两弹性球体受压接触面之间的压力分布问题. 其后，Hertz将类似方法推广到一般的弹性体接触情形. 在Hertz处理方法（或称Hertz理论）中用到的假设有：接触物体是均匀的各向同性的线弹性体；接触面的尺度远小于变形前物体的曲率半径；接触是光滑的，即接触面之间只存在有正应力. 根据这些假设，利用Boussinesq解答，也就是半空间表面受垂直集中力作用的解，Hertz从垂直位移的几何条件中导出了接触问题的积分方程，并且（用假设的方法）求出了问题的解. Hertz的工作引起力学和数学工作者的很大兴趣. 一百多年来，Hertz的理论有了许多进展，主要有如下几方面：一是更多类型的接触面或几何形状不同的物体的接触问题得到解决；二是接触面之间的应力类型更复杂些的接触问题，例如除正应力外还有切应力（摩擦接触），得到发展；三是接触物体的材料不限于各向同性弹性材料，例如接触物体之一为刚体（刚性冲头），或粒状材料等；四是与解决上述问题（包括二维情形）有密切联系的数学方法，如复变函数，奇异积分方程，积分变换等得到发展. 此外，弹性接触理论与流体动力学相组合等问题也有进展. 上述第一至第三项进展，文献[2]（1962年）的第42章有较详细的概括；上述第四项进展以及弹性接触问题1980年以前的进展可参阅文献[3]. 近年来，对弹性接触问题的探讨仍不断出现. 例如[4]（1987）给出任意形状的刚性冲头的无摩擦弹性接触问题的解法，等.

上述的许多进展，大多数是运用或者补充Hertz理论以解决更多的接触问题. 似乎未见到有文献去探讨Hertz接触问题积分方程的性质或其推导. 作者在文[5]中曾从解的数学意义指出Hertz积分方程的齐次部分的解可以有许多个. 本文则是探讨Hertz接触问题积分方

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊（Ⅰ）论文.
国家自然科学基金资助项目.

程的推导．在和Hertz所用的相同假设下，本文将在压力作用下引起接触面中各点的垂直以及水平位移一并考虑在内而导出与Hertz积分方程不同的新的积分方程．Hertz积分方程仅考虑在压力作用下引起接触面中各点的垂直位移而导出的，它的解并不满足本文的积分方程．由于Hertz积分方程忽略了水平位移的影响，因而它并非无摩擦接触的精确的积分方程．这样Hertz解是否就是无摩擦接触问题真正的解就成了疑问．寻求满足本文的精确的积分方程的解仍待探索．

二、二球体接触问题的精确的积分方程

采用与Hertz相同的假设，并用类似的方法，但考虑到接触面中各点的水平位移，就可导出与Hertz积分方程不同的新的精确的积分方程．

设R_1和R_2分别代表两个在O点相接触的球体变形前的半径，R为在压力P作用下两球体变形后的接触面基底（也就是接触面向O点的切平面的投影）的半径．根据接触面尺度远小于R_1和R_2的假设，我们可以用半空间的结果来代表局部变形的大曲率球体的结果，以及用二次式

$$z_1=r_1^2/(2R_1),\qquad z_2=r_2^2/(2R_2) \tag{2.1}$$

来足够准确地表示距离z_1、z_2轴线分别为r_1及r_2的球R_1和R_2的变形前的子午面上的M_1及M_2点的方程．

当用上述假设处理光滑接触问题，我们从应用半空间表面受垂直集中力作用的解（[1]的(315)式p.402）可知半空间表面上一点的位移的垂直和水平分量属于同一量级，即$O(r^{-1/2})$，也就是不能忽略水平位移的影响．现在，我们计及水平位移项来推导积分方程．

图1的R代表基底半径．基底内半径为r的M点代表球1上的M_1点和球2上的M_2点在变形后相重合点．变形前M_1点和M_2点的基底半径分别记为r_1及r_2，M_1点和M_2点的水平位移分别记为U_1及U_2．由水平位移的几何条件，可得：

$$r=r_1+U_1=r_2+U_2 \tag{2.2}$$

由垂直位移的几何条件，得

$$\alpha-(w_1+w_2)=z_1+z_2 \tag{2.3}$$

式中w_1和w_2分别代表M_1和M_2点的垂直位移，α代表z_1，z_2轴上距离较远的点之间的距离的缩减．

设接触面间的未知的压力分布为q，利用半空间表面受垂直集中力作用的解可以得到在全部压力分布q作用下引起的位移U_1，U_2，w_1，w_2的表达式，即

$$\left.\begin{aligned}U_1&=-\frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{2\pi E_1}\iint q\cdot\cos\psi d\psi ds\\ w_1&=\frac{(1-\nu_1^2)}{\pi E_1}\iint q\cdot d\psi ds\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

U_2，w_2类似上式，分别用ν_2代替ν_1，E_2代替E_1而得．式中E_1，E_2，ν_1，ν_2分别为球1和球2的弹性系数及泊松比．式中的s，ψ为以M点为原点的极坐标系（图2），(2.4)式中的积分限为半径为R的基底圆（为方便并与[1]一致，未标出）．

将(2.4)，(2.1)，(2.2)式代入(2.3)式，我们得：

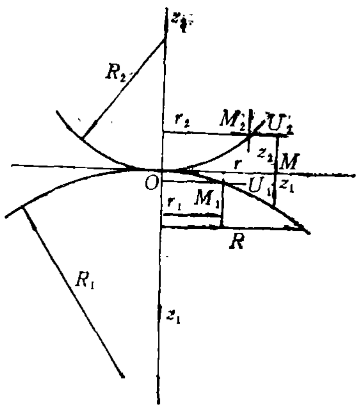

图 1

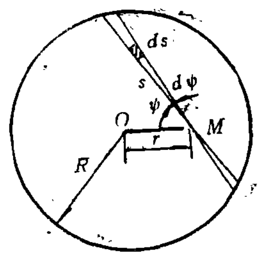

图 2

$$(k_1+k_2)\iint q\cdot d\psi ds+\gamma\cdot r\cdot\iint q\cdot\cos\psi d\psi ds+\delta\cdot\left(\iint q\cdot\cos\psi d\psi ds\right)^2 =\alpha-\beta r^2 \tag{2.5}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} &k_1=\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1},\qquad k_2=\frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2},\qquad \beta=\frac{1}{2R_1}+\frac{1}{2R_2}\\ &\gamma=\frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{2\pi E_1R_1}+\frac{(1-2\nu_2)(1+\nu_2)}{2\pi E_2R_2}\\ &\delta=\frac{1}{2R_1}\left[\frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{2\pi E_1}\right]^2+\frac{1}{2R_2}\left[\frac{(1-2\nu_2)(1+\nu_2)}{2\pi E_2}\right]^2 \end{aligned}\right\}; \tag{2.6}$$

(2.5)式就是无摩擦球体接触问题的精确的积分方程。这是一个带小参数的非线性积分方程，它是否有解，如何求解还有待进一步探讨。假若略去非线性项，(2.5)式变成：

$$\iint q\cdot ds[(k_1+k_2)-\gamma\cdot r\cdot\cos\psi]d\psi=\alpha-\beta r^2 \tag{2.7}$$

我们称(2.7)式为无摩擦球体接触问题的近似积分方程，式中交换了积分次序。

若再略去代表水平位移影响的项，得到Hertz积分方程

$$\iint q\cdot dsd\psi=(\alpha-\beta r^2)/(k_1+k_2) \tag{2.8}$$

由于目前还未求得(2.5)式和(2.7)式的解，因此，无法判断Hertz 积分方程(2.8)的解q_H

$$q_H=(q_0/R)\sqrt{R^2-r^2} \tag{2.9}$$

（式中q_0为常数）对于精确积分方程(2.5)或者近似积分方程(2.7)的精确的程度。

需要指出的是：一个带小参数的积分方程，如果略去带小参数的项所得到的解可能会有很大的误差。

有一点是可知的，q_H不满足(2.5)或(2.7)式。

三、一般情形的两弹性体接触问题的精确的积分方程

按照Hertz理论，一般情形的两弹性体在接触点O的邻域，其表面方程可近似地用二次项式子来表示（见[1]p.414），即

$$z_1=A_1x_1^2+A_2x_1y_1+A_3y_1^2,\qquad z_2=B_1x_2^2+B_2x_2y_2+B_3y_2^2 \tag{3.1}$$

式中坐标x，y，z的下标1，2分别表示所属的弹性体。A_1，A_2，A_3，B_1，B_2，B_3为常数。

记基底上点$M(x, y)$为弹性体1的表面上的点$M_1(x_1, y_1, z_1)$和弹性体2的表面上的点$M_2(x_2, y_2, z_2)$在变形后相重合的点。设u_1，v_1和u_2，v_2分别代表点M_1和M_2沿x，y方向的位移。于是，由水平位移的几何条件，得：

$$x=x_1+u_1=x_2+u_2,\quad y=y_1+v_1=y_2+v_2 \tag{3.2}$$

由垂直位移的几何条件，得：

$$w_1+w_2=\alpha-(z_1+z_2) \tag{3.3}$$

式中α的意义如上节，w_1，w_2分别代表M_1和M_2点的垂直位移。

设接触面间的未知的压力分布为q，利用半空间表面受垂直集中力作用的解可以得到在全部压力分布q作用下引起的位移u_1，v_1，w_1和u_2，v_2，w_2，即：

$$\left.\begin{aligned}
u_1&=-\frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{2\pi E_1}\iint\frac{q\cdot(x-x')}{r^2}\,dx'dy'\\
v_1&=-\frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{2\pi E_1}\iint\frac{q\cdot(y-y')}{r^2}\,dx'dy'\\
w_1&=\frac{(1-\nu_1^2)}{\pi E_1}\iint\frac{q}{r}\,dx'dy'
\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

式中$r^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2$，x'，y'为压力作用点的坐标，积分遍及基底上所有点。u_2,v_2,w_2的公式类似，用下标2替换下标1即可得。

将(3.4)，(3.2)，(3.1)式代入(3.3)式，便可得无摩擦的一般弹性体接触问题的精确积分方程式：

$$\begin{aligned}
(k_1+k_2)\iint\frac{q\cdot dA}{r}&=\alpha-(A_1+B_1)x^2-(A_3+B_3)y^2\\
&-(A_2+B_2)xy+x\Big[(2A_1c_1+2B_1c_2)\iint\frac{q\cdot(x'-x)}{r^2}dA\\
&+(A_2c_1+B_2c_2)\iint\frac{q\cdot(y'-y)}{r^2}dA\Big]+y\Big[(2A_3c_1+2B_3c_2)\\
&\cdot\iint\frac{q\cdot(y'-y)}{r^2}dA+(A_2c_1+B_2c_2)\iint\frac{q\cdot(x'-x)}{r^2}dA\Big]\\
&-[A_1c_1^2+B_1c_2^2]\Big[\iint\frac{q\cdot(x'-x)}{r^2}dA\Big]^2-[A_2c_1^2+B_2c_2^2]\iint\frac{q\cdot(x'-x)}{r^2}dA\\
&\cdot\iint\frac{q\cdot(y'-y)}{r^2}dA-[A_3c_1^2+B_3c_2^2]\Big[\iint\frac{q\cdot(y'-y)}{r^2}dA\Big]^2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

式中k_1，k_2的意义同(2.6)式的，

$$c_1=\frac{(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{2\pi E_1},\qquad c_2=\frac{(1-2\nu_2)(1+\nu_2)}{2\pi E_2},\quad dA=dx'dy'$$

这个精确的积分方程(3.5)是否有解，如何求解还有待探讨。同样，相应的，不考虑水平位移的Hertz积分方程

$$(k_1+k_2)\iint\frac{q\cdot dA}{r}=\alpha-Ax^2-By^2 \tag{3.6}$$

的解并不满足(3.5)式。

参 考 文 献

[1] Timoshenko, S.P.and J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd Ed., McGraw-Hill Book Co., Inc. New York (1970), 409—416.

[2] Flugge, W., *Handbook of Engineering Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York (1962).

[3] Gladwell, G.M.L., *Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity*, Sijthoff & Noordhoff Alpben aan den Rijn, The Netherlands (1980).

[4] Fabrikant, V.I., Frictionless elastic contact problem for a curved rigid punch of arbitrary shape, *Acta Mechanica*, 67 (1987), 1—25.

[5] 云天铨，论Hertz接触问题的解的不唯一性，应用力学学报，7，3 (1990).

The Exact Integral Equation of Hertz's Contact Problem

Yun Tian-quan

(South China University of Technology, Guangzhou)

Abstract

This paper presents the exact integral equation of Hertz's contact problem, which is obtained by taking into account the horizontal displacement of points in the contacted surfaces due to pressure.

Key words elasticity, contact problem, integral equations