应用数学和力学，第12卷第2期（1991年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

湍流拟序结构与动力系统*

李 家 春

（中国科学院力学研究所，非线性连续介质力学开放实验室，1990年3月12日收到）

摘 要

用动力系统描述湍流的主要困难是：如何建立无限维连续介质系统与低维动力系统的联系与确定湍流的空间结构．本文综述复杂系统低维描述的各种方法以及解决湍流问题的新途径．

关键词 湍流 拟序结构 动力系统 低维描述 Kanhunen-Loeve展开

湍流是流体力学中具有普遍意义的关键问题．从 Reynolds 开始百余年来，湍流研究已经取得一定进展．但是，能否在本世纪内在这一方面有所突研，仍然是今天对流体力学与应用数学工作者的挑战．70年代以来，人们用动力系统来描述湍流；在实验中，发现了剪切湍流的拟序结构，两个方面的研究平行地进行着．最近，人们找到了两者的联系，从中似乎看到湍流问题可能取得重大进展的一线曙光．

一、动力系统的低维描述[1~4]

在研究中，人们总是企图用尽量少的变量，或者说，在尽可能低维的子空间中来描述复杂的物理现象．这样做，不仅可以减少工作量，而且可以增强几何直观性．上世纪末，Poincarè 提出了相平面的概念．Andronov 毕生所从事的是二维相平面上的积分曲线的研究．从二维系统到三维系统经过了几十年艰苦的努力，因为三维系统与二维系统有着本质的区别．至于从有限维到无限维空间，许多结论不能直接推广，泛函分析就是研究无限维空间的数学分析的工具．流体力学问题与有限维空间动力系统的对应关系正是人们需要进行研究的重要问题．现在，我们来回顾一下现有的降维方法：直和分解法，中心流形定理和 Lyapunov-Schmidt 过程．

对于 n 维空间的线性动力系统：

$$d\boldsymbol{X}/dt=A\boldsymbol{X},\qquad \boldsymbol{X}|_{t=0}=\boldsymbol{X}_0 \tag{1.1}$$

其中A为$n\times n$阶矩阵，外文黑体表示向量．该系统的解可用矩阵函数来表达：

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_0\exp[At] \tag{1.2}$$

因为A必与某 Jordan 矩阵相似，即存在满秩矩阵S，使

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(Ⅰ)论文．
国家自然科学基金资助项目．

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_r \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

其中J_i ($i=1, 2, \cdots, r$) 为 Jordan 块，于是

$$\exp[At]=S^{-1}(\exp[J_1t]\oplus\exp[J_2t]\oplus\cdots\oplus\exp[J_rt])S \tag{1.4}$$

符号$\oplus$表示直和．因此，解流特性通过直和分解变成低维子空间问题来研究．

对于非线性系统，我们可在平衡点附近进行局部线性化．如果该点是双曲的，那么，Hartman-Grobman 定理保证了该系统是结构稳定的．也就是说，非线性流与线性流同胚，两个系统的稳定、不稳定流相切，且一一对应．为了研究非双曲点附近的解流的定性行为，我们利用中心流形定理来降维．

中心流形定理 设f为R^n中的C^r向量场，$f(0)=0$，$A=Df(0)$，将A的谱分为σ_s，σ_c，σ_u三部分，满足：

$$\mathrm{Re}\lambda\begin{cases} <0 & \lambda\in\sigma_s \\ =0 & \lambda\in\sigma_c \\ >0 & \lambda\in\sigma_u \end{cases} \tag{1.5}$$

与σ_s，σ_c，σ_u对应的本征空间分别为E_s，E_c，E_u．那么，在原点存在C^r类切于E^u，E^s的不变流形W^u，W^s和C^{r-1}类切于E^c的不变流形W^c．它们对于f的流是不变的．其中，稳定与不稳定流形是唯一的，中心流形不一定是唯一的．

根据上述定理，我们便可在中心流形上来研究非线性方程的局部分叉，从而使问题简化．

为了研究 Banach 空间的情况，可以采用 Lyapunov-Schmidt 过程来降维．譬如说，我们讨论非线性本征值问题：

$$Au-\lambda u=0 \tag{1.6}$$

其中A为$B\to B$的非线性算子，$A(0)=0$，其分叉点λ^0必为线性化方程的谱点

$$Lu-\lambda u=0 \tag{1.7}$$

其中$L=A'(0)$．对应λ^0的本征函数 span$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k\}$形成算子$L-\lambda^0 I$的零空间．方程(1.6)等价于

$$Lu-\lambda^0u=\delta u-Ru \tag{1.8}$$

其中$\delta=\lambda-\lambda^0$，$R=A-L$．若把解u分解成两部分的直和

$$u=\sum_{j=1}^{k}C_j\phi_j+w \tag{1.9}$$

根据可解性条件

$$\left\langle(\delta I-R)\left(w+\sum_{j=1}^{k}C_j\phi_j\right),\ \phi_i^*\right\rangle=0 \qquad (i=1, 2, \cdots, k) \tag{1.10}$$

于是

$$w=T(\delta I-R)\left(\sum_{j=1}^{k}C_j\phi_j+w\right) \tag{1.11}$$

这里T为对应$L-\lambda^0 I$的伪逆算子1)．将方程(1.11)的解代入(1.10)，即 $w=w(\delta, C_1, C_2, \cdots, C_k)$，便可建立分叉方程．

二、湍流拟序结构[5~8]

1967年，Kline 等发现湍流边界层底层充满着流向涡．1971 年，Brown Roshko 发现混合层并非是毫无结构的湍流楔．他们的实验结果启发人们用新的观点来研究湍流．

所谓“湍流拟序结构”是剪切湍流中一团相位相关的湍涡，是一种能够识别的，长久维持的流动图案．湍流拟序结构的重要性在于：至少在发展阶段，它对于质量、动量、能量的输运过程起主导作用，也对湍流混合，卷挟，噪声等有重要影响．通过研究拟序结构，人们提出了加筋，开槽等方法来控制湍流．

同 Reynolds 平均法相比较，它保留了更多的相位信息．若定义系综平均量为：

$$\langle f(x,y,z,\phi)\rangle=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}f_i(x,y,z,\phi+\phi_i(t)) \tag{2.1}$$

显然它不同于时间平均量

$$\bar{f}(x, y, z)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(x, y, z, t')dt' \tag{2.2}$$

若将物理量分解成平均部分，相干部分，随机部分之和

$$f(x, y, z, t)=F(x,y,z)+f_c(x,y,z,t)+f_r(x,y,z,t) \tag{2.3}$$

那么

$$\bar{f}=F,\ \langle f\rangle=F+f_c \tag{2.4}$$

因此，在系综平均后，仍能观察到流动结构．

同湍流统计理论相比较，拟序结构说明在随机行为中还隐含着确定性行为，这是无序中的有序．拟序结构无形中说明系统存在着一种尺度，只有在比该结构更小的尺度上，随机行为才会起支配作用，耗散的小尺度运动在流动发展的动力学行为中不起重要作用，即湍流的能量平衡只是一种约束，而不是一种湍流输运的驱动机制．

典型的湍流拟序结构有：管流中的湍流栓；边界层中的发卡涡；湍流斑；旋转圆筒间的 Taylor 涡；混合层中的涡对；卡门涡街；湍射流涡环等．可以想象，剪切湍流是由这些准确定性的结构为基元组成的，研究这些基元的空间，时间发展似乎比时均法与统计理论更要简单些．

三、湍流研究的新途径——Karhunen-Loeve展开

为了用低维的力学系统来研究湍流，必须回答以下几个问题：湍流是否能用低维系统来

1) 若有$(L-\lambda^0 I)u=f$，Z为$L-\lambda^0 I$ 的零空间，R为其值域，则非齐次方程有解的条件是 $f\perp Z^*$，Z^*为$L-\lambda^0 I$共轭算子之零空间，定义伪逆算子

$$Tf=\begin{cases}0 & f\in R^{\perp}\\ w & f\in R\end{cases}$$

该w在$Z^{\perp}$空间中是唯一的．

描述？如何最有效地进行低维描述？衡量低维描述近似程度的准则是什么？

我们首先来看一下实验事实[10]：粘性流体绕圆球的流动，可以观察到一系列分叉现象.

$Re=36$ 涡脱落开始 $f_1=590\text{Hz}$

$Re=54$ 出现第二频率f_2

$Re=66\sim71$ 浑沌（Ruelle-Takens-Newhouse Mode）

$Re=76$ 有三个频率的准周期运动

$Re=81\sim88$ 浑沌

$Re=90$ 有四个频率的准周期运动

$Re=140\sim143$ 浑沌

在上述实验中，人们发现流体运动与低维动力学系统有类似的特性：有序运动与浑沌交替出现．而且，确实测到了有三个、四个频率的准周期运动出现，这一情况有点象Landau最初的猜想，Ruelle-Takens理论不能包括所有情况．人们还发现涡脱落频率一般随Re数连续变化，但在通过浑沌窗时有间断．同样地，根据实验结果还计算了维数．有序时，维数与独立的频率数相同，但在浑沌窗内，维数跃迁到某一分数值，譬如：$Re=66\sim71$，$\nu=4.4$；$Re=81\sim88$，$\nu=4.8$．当Re数增高到10^4时，维数ν不超过20，这个实验事实确实支持了流体系统可以用低维动力系统来描述的论点．

从图象识别的原理，我们亦可以得到一些启示．虽然每一幅图象可以根据许多象素(pixel)上的信息来识别，或者可以展开双重Fourier级数来表达，但这样做并非是最有效的．实际上，人的大脑可以贮存许许多多图象，而且识别是瞬时的．这就说明，人只要根据少量信息便可作判断．以识别人为例，这是因为在大脑中事先存贮了大量的平均脸型：欧洲人，非洲人，亚洲人，在中国人中又分南方人，北方人等等，在此基础上，我们只要根据个别人颧骨，眼睛，嘴唇等少数特征，便可加以辨认．所以对图象完全可以进行低维描述．同样地，对于湍流有所谓拟序结构．因此，也可以对它进行低维描述．当然，这种描述必须在最佳选择的Hilbert空间中来进行．

考虑如下的方程[11]

$$\partial \boldsymbol{u}/dt=G(\boldsymbol{u},R) \tag{3.1}$$

这里，R为控制参数（如：雷诺数Re），$\boldsymbol{u}$还要满足一些附加条件（如：$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$，边界条件，等）．选择正交组$\{\psi^{(n)}\}$要满足上述附加条件．显然可以将正交组作正交变换至$\{\Phi^{(n)}\}$，使之优化．于是

$$\boldsymbol{u}=\sum A_n\Phi^{(n)} \tag{3.2}$$

定义两点相干

$$K_{\mu\nu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\langle \boldsymbol{u}_\mu(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u}_\nu^*(\boldsymbol{y})\rangle=\sum_k \lambda_k\Phi_\mu^{(k)}(\boldsymbol{x})\Phi_\nu^{(k)*}(\boldsymbol{y}) \tag{3.3}$$

即要求

$$\langle A_n,\ A_m^*\rangle=\lambda_n\delta_{nm}$$

其中δ_{nm}为Kronecker记号，即当$n=m$时为1，否则等于零．于是

$$K\Phi^{(n)}=\lambda_n\Phi^{(n)} \tag{3.4}$$

可见$\Phi^{(n)}$选为相干矩阵函数的本征函数便可以达到目的．

取近似表达式

$$u \sim u_N = \sum_1^N A_n \Phi^{(n)} \tag{3.5}$$

采用 Galerkin 方法

$$\left(\Phi^{(j)},\ \frac{\partial}{\partial t}u_N - G(u_N,\ R)\right) = 0 \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{3.6}$$

便可导出与连续系统相对应的低维动力学系统．误差的标准可要求 u_N 包含系统的大部分能量，也就是说，能量比率

$$E = \sum_1^N \lambda_n \Big/ \sum_1^\infty \lambda_n \approx 1 \tag{3.7}$$

应该十分接近于1（譬如：95%以上）．这样做便可解决不同模数定性结果不一致时，如何确定截断项数的问题[9]．

这种展开法来源于图象识别，称为 Karhunen-Loève 展开．它的优点是能够描述流动的几何结构．而且这种展开所需模数最少，因此，是最优的．

四、应 用 实 例

1. Ginzburg-Landau 方程[11]

$$i\partial A/\partial t + q^2(1-ic_0)\partial^2 A/\partial x^2 - i\rho A + (1+i\rho)|A|^2 A = 0 \tag{4.1}$$

该方程来自许多物理问题，立方 Schrödinger 方程只是它的特例．c_0，ρ 为实参数，附加条件是$A(x+2\pi,\ t)=A(x,\ t)$．我们考虑q在0.6 与 1.3 间的情况，$q=0.95$ 是浑沌解，Lyapunov 指数为 3.05．根据这个解获得相干函数，其头三个本征值为$\lambda_1=0.5328$，$\lambda_2=0.0855$，$\lambda_3=0.0013$，$\lambda^k<10^{-k}$，所以这三个模占总能量的 99.9%．准确解与近似解的结果令人满意地一致．

2. 热对流[11]．取$Pr=0.72$，$Ra=46000$时，用谱方法进行数值计算，获得本征值，本征函数，得到低维动力系统．试验结果表明，106 项，占总能量80%；285 项占总能量90%；596项占总能量95%；1276 项占总能量 98%．即便是这一不太理想的结果，比流场记录$(32)^3\times4$个数据还要节省存贮量，即前者仅为后者的1/100．

3. 图象识别[12]．取115张样本的信息，通过消除误差的处理与归一化，获得相干与本征函数．一般说来，本征图在100以下便可以得到满意结果．这就是说，可以从 2^{14} 维降为100维．全脸的图象取40项，误差为7.8%．局部化可使误差下降．即使样本是男性的，对女性脸型仍使用同一本征图，40项的误差仅为 3.9%（另一次为 2.4%）．这个例子说明方法是非常成功的．

参 考 文 献

[1] Guckenheimer, J. and P. Holmes, Nonlinear oscillation, dynamical systems and bifurcation of vector fields, *Applied Mathematical Sciences*, 42, Springer-Verlag, New York (1983).

[2] 张筑生，《微分动力系统原理》，科学出版社，北京（1987）．

[3] Stakgold, I., Branching of solutions of nonlinear equations, *SIAM Review*, **13**, 3 (1971), 289—332.

[4] 李家春,分叉与转捩,《非线性力学的新发展》, 钱伟长主编,华中工学院出版社,武汉 (1988), 79—112.

[5] Cole, J. D., Prospects for useful research on coherent structure in turbulent shear flows, *Surveys in Fluid Mechanics*, Ed., D. Narashimha, S.M. Deshpande, Macmillan India Press, Bangalore (1982), 17—34.

[6] Hussain, A. K. M. F., Role of coherent structures in turbulent shear flows, ibid. (1982), 35—82.

[7] Laufer, J., Deterministic and stochastic aspects of turbulence, *J. Appl. Mech.*, **50**, 4 (1983), 1079—1085.

[8] 蔡树棠等, 湍流研究最近半世纪的一些发展, 力学进展, **10**, 1 (1980), 16—36.

[9] Zhong, W. Y. and P. C. Yang, The transition of a multi-dimensional Lorenz system, *Advances in Atmospheric Sciences*, **3**, 3 (1986), 289—301.

[10] Screenivasan, K. R., Transition and turbulence in fluid flows and low dimensional chaos, *Frontiers in Fluid Mechanics*, Ed., S. H. Davis, J. L. Lumley, Springer-Verlag (1985), 41—67.

[11] Sirovich, L., Low dimensional description of complicated phenomena, *Proceedings of ICFM*, Science Press, Beijing (1987), 1247—1252.

[12] Sirovich, L., Low-dimensional procedure for the characterization of human faces, *J. Opt. Soc. Ame. A.*, 4 (1987), 519—524.

Turbulent Coherent Structure and Dynamic System

Li Jia-chun

(*LNM, Institute of Mechanics, CAS, Beijing*)

Abstract

The main difficulties in the study of turbulence via dynamic system lie in how to relate continuum systems of infinite dimension with dynamic system in low dimension space and how to depict its spacial structure. In this paper, we'll give a comprehensive review on various methods to describe complex systems in low dimension space and new approaches to the resolution of turbulence problems.

Key words turbulence, coherent structure, dynamic system, low dimension formulation, Karhunen-Loeve expansion