

两非均匀半平面粘结的非均匀平面的裂纹问题*

汤任基

(上海交通大学, 1990年3月21日收到)

摘要

本文对两个非均匀半平面粘结的非均匀平面的裂纹问题作了分析, 文中假定两种材料的泊松比 ν 相同, 但杨氏模量随坐标 x 按不同形式的指数函数变化. 本文使用非均匀平面问题的单裂纹解及富氏变换方法, 使问题归为一个柯西型奇异积分方程, 最后对应力强度因子的计算给出了若干数值例子.

关键词 非均匀平面 裂纹问题 奇异积分方程

一、引言

从实际的观点而言, 非均匀介质中的裂纹问题是颇有兴趣的, 实际上, 它在地球物理的近代非均匀固体中是经常遇见的. 最近, Delale和Erdogan^[1]解决了非均匀平面上的裂纹问题, 并得到了单裂纹解. 本文使用此解及富氏变换, 解决了更复杂的由两个非均匀半平面粘结的裂纹问题. 对于此种情形, 得到的应力是用定义在裂纹面上的未知位错密度表示的, 之后, 问题便归为解一个柯西型奇异积分方程, 由此可以证明, 裂纹端点的应力状态仍有均匀介质的平方根奇性. 最后对在粘结线附近的裂纹作了若干数值例子.

二、两个基本解

为了直接利用早先的结果, 研究由两个不同的非均匀半平面粘结而成的非均匀平面上的裂纹问题, 以下给出两个基本解.

若泊松比 ν = 常数, 而杨氏模量呈指数函数 $E(x) = E_0 \exp[\beta x]$, 其中 E_0 和 β 均为常数, 则非均匀弹性力学平面问题的应力函数 $F(x, y)$ 满足以下四阶偏微分方程

$$\nabla^4 F - 2\beta \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right) + \beta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \beta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

若问题与 Ox 轴对称, 则以上方程可使用富氏余弦变换求解, 可以指出, 它的通解为

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(I)论文.
国家自然科学基金资助项目.

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 B_j(a) \exp[n_j x] \cos ay da & x \geq 0 \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=3}^4 B_j(a) \exp[n_j x] \cos ay da & x \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

式中

$$n_{1,3} = n_{1,3}(\alpha, \beta) = (\beta \mp \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2 + 4\alpha\beta \sqrt{\nu}} i) / 2 \quad (2.3)$$

$$n_{2,4} = n_{2,4}(\alpha, \beta) = (\beta \mp \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha\beta \sqrt{\nu}} i) / 2 \quad (2.4)$$

而 $B_j(a)$ ($j=1, 2, 3, 4$) 均为未知函数, 它们可由问题的边界条件决定。

结果(2.2)称为富氏余弦变换解, 即第一个基本解。

若直裂纹(a, b)位于图1的实轴 Ox 上, 材料参数满足 $\delta = \beta$, 则方程(2.1)可用富氏变换求解, 它在上半平面的通解为:

$$F^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 A_j(\rho) \exp[-m_j y] \exp[-i\rho x] d\rho \quad (-\infty < x < \infty, y > 0) \quad (2.5)$$

在与 Ox 轴对称时, 未知函数 $A_j(\rho)$ 可表为:

$$A_1(\rho) = -\frac{m_2}{m_1} A_2(\rho) = \frac{E_0 m_1 m_2^2}{\rho^2 (m_1^2 - m_2^2) (\beta + i\rho)} \cdot \int_a^b g(t) \exp[(\beta + i\rho)t] dt \quad (2.6)$$

式中 $g(t)$ 为下式给出的裂纹(a, b)的位错函数:

$$g(t) = \partial v(t, +0) / \partial t \quad a < t < b \quad (2.7)$$

而

$$m_1 = m_1(\rho, \beta) = (\beta \sqrt{\nu} + \sqrt{\beta^2 \nu + 4\rho^2 - 4\rho\beta i}) / 2 = m_1(-\rho, \beta) \quad (2.8)$$

$$m_2 = m_2(\rho, \beta) = (-\beta \sqrt{\nu} + \sqrt{\beta^2 \nu + 4\rho^2 - 4\rho\beta i}) / 2 = m_2(-\rho, \beta) \quad (2.9)$$

结果(2.5)称为单裂纹解, 即第二基本解, 它由 Delale 和 Erdogan 得到。

三、积 分 方 程

现在考虑图1所示由两个不同的非均匀半平面粘结而成的非均匀平面的裂纹问题, 假定两种不同材料具有相同的泊松比 $\nu = \text{常数}$, 但其杨氏模量在区域 Ω_1 和 Ω_2 取不同的指数函数:

$$E_1(x) = E_0 \exp[\beta x] \quad x \in \Omega_1 \quad (3.1)$$

$$E_2(x) = E_0 \exp[\delta x] \quad x \in \Omega_2 \quad (3.2)$$

裂纹面上作用有对称的压力 $p(x)$, 而位移越过

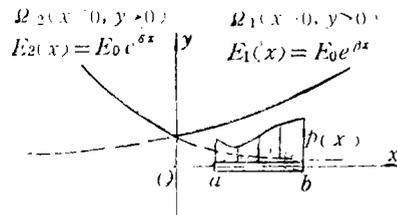


图 1

粘结线时保持连续。可以指出，这一问题可使用上面的两个基本解求解。根据对称性，这里只需分析上半平面。可以指出，区域 Ω_1 的应力函数 $F_1(x, y)$ 和区域 Ω_2 的应力函数 $F_2(x, y)$ 可表为以下一些形式：

$$F_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 A_j(\rho) \exp[-m_j y] \exp[-i\rho x] d\rho + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 B_j(a) \exp[n_j x] \cos ay da \quad (x, y) \in \Omega_1 \quad (3.3)$$

$$F_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 C_j(a) \exp[\lambda_j x] \cos ay da \quad (x, y) \in \Omega_2 \quad (3.4)$$

式中 m_j 和 n_j 由方程(2.3)，(2.4)及(2.8)，(2.9)给出，参数 $\lambda_j = \lambda_j(a, \delta) = n_{j+2}(a, \delta)$ ，未知函数 $B_j(a)$ 和 $C_j(a)$ 可用粘结线上的联结条件确定。

区域 Ω_1 中的应力和位移可用应力函数 $F_1(x, y)$ 按以下计算：

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 A_j(\rho) m_j^2 \exp[-m_j y] \exp[-i\rho x] d\rho - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 B_j(a) a^2 \exp[n_j x] \cos ay da \quad (3.5)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 A_j(\rho) \rho^2 \exp[-m_j y] \exp[-i\rho x] d\rho + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 B_j(a) n_j^2 \exp[n_j x] \cos ay da \quad (3.6)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial x \partial y} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 A_j(\rho) \rho m_j \exp[-m_j y] \exp[-i\rho x] d\rho + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 B_j(a) a n_j \exp[n_j x] \sin ay da \quad (3.7)$$

而

$$u_1(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{A_j(\rho) (m_j^2 + \nu \rho^2) \exp[-m_j y] \exp[-i\rho x]}{(\beta + i\rho) E_1(x)} d\rho - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{B_j(a) (a^2 + \nu n_j^2) \exp[n_j x] \cos ay}{(n_j - \beta) E_1(x)} da + D_1 \quad (3.8)$$

$$v_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{A_j(\rho)(\rho^2 + \nu m_j^2) \exp[-m_j y] \exp[-i\rho x]}{m_j E_1(x)} d\rho$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{B_j(\alpha)(n_j^2 + \nu \alpha^2) \exp[n_j x] \sin \alpha y}{\alpha E_1(x)} d\alpha \quad (3.9)$$

区域 Ω_2 中的应力和位移可使用应力函数 $F_2(x, y)$ 按以下计算:

$$\sigma_{zz}(x, y) = \frac{\partial^3 F_2(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 C_j(\alpha) \alpha^2 \exp[\lambda_j x] \cos \alpha y d\alpha \quad (3.10)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 C_j(\alpha) \lambda_j^2 \exp[\lambda_j x] \cos \alpha y d\alpha \quad (3.11)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 F_2(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 C_j(\alpha) \alpha \lambda_j \exp[\lambda_j x] \sin \alpha y d\alpha \quad (3.12)$$

而

$$u_2(x, y) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{C_j(\alpha)(\alpha^2 + \nu \lambda_j^2) \exp[\lambda_j x] \cos \alpha y}{(\lambda_j - \delta) E_2(x)} d\alpha + D_2 \quad (3.13)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^2 \frac{C_j(\alpha)(\lambda_j^2 + \nu \alpha^2) \exp[\lambda_j x] \sin \alpha y}{\alpha E_2(x)} d\alpha \quad (3.14)$$

方程(3.8)和(3.13)中的常数 D_1 和 D_2 是一种刚体位移, 它们可使用求导将其除去。

利用由图1所示粘结线上的如下联结条件

$$\sigma_{zx}(+0, y) = \sigma_{zx}(-0, y), \quad \tau_{xy}(+0, y) = \tau_{xy}(-0, y) \quad (3.15)$$

$$u_1(+0, y) = u_2(-0, y), \quad v_1(+0, y) = v_2(-0, y) \quad (3.16)$$

则未知函数 $B_j(\alpha)$ 和 $C_j(\alpha)$ 即可决定下来, 将它回代入方程(3.5~3.7)及(3.10~3.12), 则有用的应力便获得, 其中只含有一个还未确定的位错函数 $g(t)$ 。进而将区域 Ω_1 中的应力 $\sigma_{yy}(x, y)$ 满足裂纹面 (a, b) 上的受载条件, 即

$$\lim_{y \rightarrow +0} \sigma_{yy}(x, y) = -p(x) \quad a < x < b \quad (3.17)$$

则上述裂纹问题的积分方程获得如下:

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b \left[\frac{1}{t-x} + \mathcal{K}_1(x, 0, t) + \mathcal{K}_2(x, 0, t) \right] g(t) \exp[\beta t] dt = -\frac{1+x}{4\mu_0} p(x) \quad (3.18)$$

式中平面应变 $\kappa = 3 - 4\nu$, 对平面应力 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, μ_0 为剪切模量, 积分核由以下有界的无穷积分表示:

$$\mathcal{K}_1(x, 0, t) = \int_0^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \frac{m_1 m_2 \exp[i\rho(t-x)]}{(m_1 + m_2)(\beta + i\rho)} - \sin \alpha(t-x) \right] d\rho \quad (3.19)$$

$$\mathcal{K}_2(x, 0, t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty K_2(x, 0, t; \alpha, \rho) d\rho d\alpha \quad (3.20)$$

而

$$K_2(x, 0, t; \alpha, \rho) = \sum_{j=1}^4 K_{2j}(x, t; \alpha, \rho) \quad (3.21)$$

式中

$$K_{21}(x, t; \alpha, \rho) = \frac{(n_2^2 + \nu\alpha^2)n_1^2 \exp[n_1 x] - (n_1^2 + \nu\alpha^2)n_2^2 \exp[n_2 x]}{n_2^2 - n_1^2} \\ \cdot \frac{m_1^2 m_2^2 \exp[i\rho t]}{\pi\rho^2(\beta + i\rho)(m_1^2 + \alpha^2)(m_2^2 + \alpha^2)}$$

$$K_{22}(x, t; \alpha, \rho) = \frac{(-n_1^2 \exp[n_1 x] + n_2^2 \exp[n_2 x])\alpha^2}{n_2^2 - n_1^2} \\ \cdot \frac{[(m_2^2 + m_1^2)\rho^2 + m_1^2 m_2^2 \nu + \alpha^2 \rho^2] \exp[i\rho t]}{\pi\rho^2(\beta + i\rho)(m_1^2 + \alpha^2)(m_2^2 + \alpha^2)}$$

$$K_{23}(x, t; \alpha, \rho) = \frac{(n_1 - \beta)(\alpha^2 + \nu n_2^2)n_1^2 \exp[n_1 x] - (n_2 - \beta)(\alpha^2 + \nu n_1^2)n_2^2 \exp[n_2 x]}{(n_1 - n_2)[(n_1 + n_2)\alpha^2 - \beta\alpha^2 + n_1 n_2 \nu \beta]} \\ \cdot \frac{m_1^2 m_2^2 \exp[i\rho t]}{\pi i \rho(\beta + i\rho)(m_1^2 + \alpha^2)(m_2^2 + \alpha^2)}$$

$$K_{24}(x, t; \alpha, \rho) = \frac{[(n_1 - \beta)(n_2 - \beta)](n_2 n_1^2 \exp[n_1 x] - n_1 n_2^2 \exp[n_2 x])}{(n_1 - n_2)[(n_1 + n_2)\alpha^2 - \beta\alpha^2 + n_1 n_2 \nu \beta]} \\ \cdot \frac{m_1^2 m_2^2 (\alpha^2 - \nu\rho^2) \exp[i\rho t]}{\pi\rho^2(\beta + i\rho)(m_1^2 + \alpha^2)(m_2^2 + \alpha^2)}$$

应该指出，在内裂纹情形，未知位错函数必须满足以下位移单值的条件：

$$\int_a^b g(t) dt = 0 \quad (3.22)$$

显然，方程(3.18)是关于未知位错函数 $g(t)$ 的柯西型奇异积分方程，它可使用文[2]的奇异积分方程的数值法求解。在由(3.18)求得函数 $g(t)$ 后，则原来的问题便获得解决。

四、应力强度因子

解以上积分方程(3.18)，可得解 $g(t)$ ，再将它代入方程(3.6)，则区域 Ω_1 中的应力 $\sigma_{yy}(x, y)$ 即可找出，在内裂纹情形，这一应力在裂纹端点邻域中的主部为：

$$\sigma_{yy}(x, 0) = \frac{4\mu_0}{\pi(1+\nu)} \int_a^b \frac{g(t) \exp[\beta t]}{t-x} dt \quad (4.1)$$

所以，I型应力强度因子可按熟知的方法决定如下：

$$k(a) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2(a-x)} \sigma_{yyl}(x, +0) = \frac{4\mu_0}{1+x} \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2(x-a)} g(x) \exp[\beta x] \quad (4.2)$$

$$k(b) = \lim_{x \rightarrow b} \sqrt{2(x-b)} \sigma_{yyl}(x, +0) = -\frac{4\mu_0}{1+x} \lim_{x \rightarrow b} \sqrt{2(b-x)} g(x) \exp[\beta x] \quad (4.3)$$

五、数值结果

为了验证方法，并解释它的应用，计算应力强度因子给出了一些数值例子。首先考虑裂纹半长 $c = (b-a)/2$ ，材料参数 (δ, β) 为常数，但裂纹中心坐标 $d = (b+a)/2$ 及其它参数为变化的情形，则在裂纹面的压力 p_0 为常数时的应力强度因子列于表1和表2：

表1 应力强度因子随参数 d 和 β 的变化， $d = (a+b)/2$ ， $c = (b-a)/2 = 1$ ， $\delta = 0$

d	1		3		5		$\rightarrow \infty [1]$	
	$k(a)/p_0\sqrt{c}$	$k(b)/p_0\sqrt{c}$	$k(a)/p_0\sqrt{c}$	$k(b)/p_0\sqrt{c}$	$k(a)/p_0\sqrt{c}$	$k(b)/p_0\sqrt{c}$	$k(a)/p_0\sqrt{c}$	$k(b)/p_0\sqrt{c}$
1.0	0.703	1.172	0.735	1.194	0.737	1.196	0.740	1.209
0.5	0.817	1.089	0.856	1.107	0.859	1.109	0.861	1.113
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.5	1.182	0.899	1.133	0.871	1.118	0.864	1.113	0.861
-1.0	1.412	0.788	1.223	0.743	1.200	0.738	1.197	0.738

表2 应力强度因子随参数 d 和 δ 的变化， $d = (a+b)/2$ ， $c = (b-a)/2 = 1$ ， $\beta = 0$

d	1		3		5		$\rightarrow \infty [1]$	
	$k(a)/p_0\sqrt{c}$	$k(b)/p_0\sqrt{c}$	$k(a)/p_0\sqrt{c}$	$k(b)/p_0\sqrt{c}$	$k(a)/p_0\sqrt{c}$	$k(b)/p_0\sqrt{c}$	$k(a)/p_0\sqrt{c}$	$k(b)/p_0\sqrt{c}$
1.0	1.110	1.062	1.017	1.013	1.007	1.006	1.000	1.000
0.5	1.048	1.035	1.011	1.009	1.005	1.005	1.000	1.000
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
-0.5	0.913	0.967	0.988	0.991	0.995	0.996	1.000	1.000
-1.0	0.868	0.948	0.983	0.987	0.993	0.994	1.000	1.000

其次，我们考虑裂纹坐标 a 和 b 为常数，但 δ 和 β 为变数的情形，则均匀压力 p_0 时的应力强度因子列于表3：

表3 应力强度因子随材料参数 (δ, β) 的变化， $a=2$ ， $b=4$

δc	βc	$k(a)/p_0\sqrt{c}$	$k(b)/p_0\sqrt{c}$	δc	βc	$k(a)/p_0\sqrt{c}$	$k(b)/p_0\sqrt{c}$
1.00	1.00	0.7354	1.1947	-1.00	1.00	0.7334	1.1918
0.75	0.75	0.7934	1.1537	-0.75	0.75	0.7899	1.1493
0.50	0.50	0.8585	1.1088	-0.50	0.50	0.8531	1.1028
0.25	0.25	0.9289	1.0584	-0.25	0.25	0.9224	1.0522
0.10	0.10	0.9717	1.0244	-0.10	0.10	0.9671	1.0204
0.00	0.00	1.0000	1.0000	0.00	0.00	1.0000	1.0000
-0.10	-0.10	1.0239	0.9722	0.10	-0.10	1.0305	0.9760
-0.25	-0.25	1.0581	0.9296	0.25	-0.25	1.0521	0.9156
-0.50	-0.50	1.1093	0.8598	0.50	-0.50	1.0367	0.8016
-0.75	-0.75	1.1551	0.7953	0.75	-0.75	1.0199	0.7250
-1.00	-1.00	1.1970	0.7377	1.00	-1.00	1.0283	0.6786

参 考 文 献

- [1] Delate, F. and F. Erdogan, The crack problem for a nonhomogeneous plane, Lehigh University, Bethlehem, Pa., June (1982).
- [2] Erdogan, F., Mixed boundary value problem, *Mechanics Today*, S. Nemat-Nasser, Ed., 4 (1978).

Crack Problem for an Inhomogeneous Plane Bonded by Two Different Inhomogeneous Half-Planes

Tang Ren-ji

(*Shanghai Jiaotong University, Shanghai*)

Abstract

In this paper, the crack problem for two bonded inhomogeneous half-planes is considered. It is assumed that the different materials have the same Poisson ratio ν , but generally speaking, both Young's moduli vary exponentially with the coordinate x in different form. Using single crack solution of the inhomogeneous plane problem and Fourier transform technique, the problem is reduced to a Cauchy-type singular integral equation. Several numerical examples to calculate the stress intensity factors are carried out.

Key words inhomogeneous plane, crack problem, singular integral equation