复合载荷下圆底扁球壳非线性稳定性*

叶开沅　　刘 平

（兰州大学）（扬州工学院）

摘　　要

本文采用半解析方法研究在中心分布载荷及中心集中力联合作用下，圆底扁球壳的非线性稳定性问题．避免了求近似解析解时繁重的人工计算，而p-W_m特征关系仍可由显式表达．

关键词　扁壳　屈曲　半解析法

一、引　　言

众所周知，采用摄动方法求解板壳几何非线性问题，其推导工作是十分冗长的，当载荷较为复杂时，计算量骤然增大，既使是二阶近似解亦不易得到．关于在中心集中力及全分布载荷作用下薄圆板的大挠度问题，文[5～9]曾采用不同方法讨论过，文[1～3]采用数值方法讨论了在单一轴对称载荷下，圆底扁球壳的失稳问题．由于数值方法的计算结果只能以图表方式给出，当影响参数较多时(如复合载荷)，给研究与使用都造成一些不便．另外由于得不到特征方程，不得不靠探索法（如载荷增量法）寻求临界点，每一次探索就要进行一次重分析，计算量相当大，很难在微机上实现．

本文将非线性微分方程边值问题化为积分方程后，依修正迭代格式求解时，完成参数分离，得到了显式表达的p-W_m特征关系，其相关系数采用高斯数值积分确定，避免了单纯解析法的繁重人工计算，同时又保留了特征方程的解析关系，临界点可以通过求极值直接得到．

二、基 本 方 程

在中心分布载荷及中心集中力同时作用下，圆底扁球薄壳轴对称非线性微分方程为

$$D\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dw}{dr}-N_r\left(\frac{dw}{dr}+\frac{r}{R}\right)=\frac{P}{2\pi r}+\frac{q}{2}\left[r-\{r-b\}^{0}\left(r-\frac{b^2}{r}\right)\right]$$

$$\frac{1}{Eh}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r^2N_r+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\frac{dw}{dr}\frac{r}{R}\right]=0\qquad(r\in[0,\ a])\qquad(2.1)$$

一般性边界条件为

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(Ⅰ)论文，1989年10月18日收到．

$$r=a:\ w=0,\quad \delta_1\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}=0,$$

$$\delta_2\frac{d}{dr}(rN_r)-N_r=0$$

$$r=0:\quad \frac{dw}{dr}=0,\ N_r\text{有限}\qquad(2.2)$$

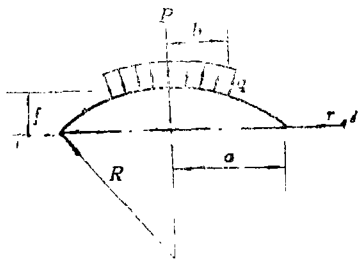

图 1

其中$\{\cdot\}^\circ$为Heaviside函数

$$\{r-b\}^\circ=\begin{cases}1 & (r\geqslant b)\\ 0 & (r<d)\end{cases}$$

w为薄壳挠度，N_r为径向薄膜力，r为径向坐标，a为球壳底半径，b为分布载荷作用半径，P为中心集中力，q为中心分布载荷，h为壳厚，$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$为抗弯刚度，$R=a^2/2f$为球壳中面半径，E和ν分别为杨氏弹性模量和泊松比，δ_1和δ_2是由边界条件决定的常数。几种常见的边界条件如下：

Ⅰ. 边缘简单支承：$\delta_1=\delta_2=\frac{1}{\nu}$

Ⅱ. 边缘铰链支承：$\delta_1=\frac{1}{\nu}$，$\delta_2=0$

Ⅲ. 边缘固定夹紧：$\delta_1=0$，$\delta_2=\frac{1}{\nu}$

Ⅳ. 边缘可移夹紧：$\delta_1=0$，$\delta_2=0$

为讨论方便引入下列无量纲量

$$x=\frac{r}{a},\quad x_b=\frac{b}{a},\quad s=\frac{12(1-\nu^2)a^3}{Ebh^2}\times N_r,\quad \varphi=\sqrt{12(1-\nu^2)}\ \frac{b}{h}\frac{dw}{dr}$$

$$W=\sqrt{12(1-\nu^2)}\ \frac{w}{h},\quad \alpha p=\frac{[12(1-\nu^2)]^{3/2}a^2P}{2\pi Eh^4}$$

$$\beta p=\frac{[12(1-\nu^2)]^{3/2}a^2b^2q}{2Eh^4},\quad \lambda=\sqrt{12(1-\nu^2)}\ \frac{a^2}{Rh}$$

利用Green函数法[10]可将上述非线性微分方程边值问题化为等价积分方程组

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x)&=-\int_0^1 G_1(x,\xi)S(\xi)[\varphi(\xi)+\lambda\xi]d\xi-pf_1(x)\\ S(x)&=\int_0^1 G_2(x,\xi)\varphi(\xi)\left[\frac{1}{2}\varphi(\xi)+\lambda\xi\right]d\xi\quad(x\in[0,1])\end{aligned}\right\}\qquad(2.3\text{a,b})$$

$$W(x)=\int_0^x\varphi(\xi)d\xi+W_m\qquad(2.4\text{a})$$

其中 G_1，G_2为核函数，W_m为中心折合挠度.

$$G_i(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(u_i\xi+\frac{1}{\xi}\right)x & (0\leqslant x<\xi)\\ \frac{1}{2}\left(u_ix+\frac{1}{x}\right)\xi & (\xi\leqslant x\leqslant 1)\end{cases}\qquad(i=1,2)$$

$$u_1=\frac{\delta_1-1}{\delta_1+1},\quad u_2=\frac{\delta_2+1}{\delta_2-1}$$

$$W_m=-\int_0^1\varphi(\xi)d\xi \tag{2.4b}$$

$$f_1(x)=\beta_1 f_{11}(x)+\beta_2 f_{12}(x)$$

$$f_{11}(x)=-\frac{x}{2}\left(\ln x-\frac{\delta_1}{\delta_1+1}\right)$$

$$f_{12}(x)=\frac{x}{8}\left[\ 2+\frac{\delta_1-1}{\delta_1+1}(2-u_b^2)\ -\frac{x^3}{8x_b^2}-\frac{x}{2}\ln x_b\right.$$

$$\left.-\{x-x_b\}^\circ\left[\frac{1}{8}\left(\frac{x_b^2}{x}-\frac{x^3}{x_b^2}\right)+\frac{x}{2}\ln(x/x_b)\right]\right] \tag{2.5}$$

将(2.3b)代入(2.3a)，得到

$$\varphi(x)=-\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)[\varphi(\xi)+\lambda\xi]\varphi(\eta)\left[\frac{1}{2}\varphi(\eta)+\lambda\eta\right]d\eta d\xi$$

$$-pf_1(x)\qquad (x\in[0,1]) \tag{2.6}$$

三、分离修正迭代解

取(2.6)的迭代格式为

$$\varphi_{n+1}(x)=-\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)[\varphi_n(\xi)+\lambda\xi]\varphi_n(\eta)\left[\frac{1}{2}\varphi_n(\eta)+\lambda\eta\right]d\eta d\xi$$

$$-p[\beta_1 f_{11}(x)+\beta_2 f_{12}(x)]\qquad (n=1,2,\cdots) \tag{3.1}$$

一阶近似为

$$\varphi_1(x)=-p[\beta_1 f_{11}(x)+\beta_2 f_{12}(x)] \tag{3.2}$$

此时中心折合挠度为

$$W_m=\frac{p}{a_1},\qquad a_1=\frac{1}{\beta_1 a_{11}+\beta_2 a_{12}} \tag{3.3}$$

$$a_{11}=\int_0^1 f_{11}(x)dx,\quad a_{12}=\int_0^1 f_{12}(x)dx$$

(3.3)代入(3.2)

$$\varphi_1(x)=-a_1W_m[\beta_1 f_{11}(x)+\beta_2 f_{12}(x)] \tag{3.4}$$

将(3.4)代入(3.1)，得二阶近似

$$\varphi_2(x)=W_m^3a_1^3\left\{\beta_1^3\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\frac{1}{2}f_{11}(\xi)f_{11}^2(\eta)d\eta d\xi\right.$$

$$+\beta_1^2\beta_2\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\frac{1}{2}[f_{12}(\xi)f_{11}^2(\eta)+2f_{11}(\xi)f_{11}(\eta)f_{12}(\eta)]d\eta d\xi$$

$$+\beta_1\beta_2^2\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\frac{1}{2}[f_{11}(\xi)f_{12}^2(\eta)+2f_{12}(\xi)f_{11}(\eta)f_{12}(\eta)]d\eta d\xi$$

$$\left.+\beta_2^3\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\frac{1}{2}f_{12}(\xi)f_{12}^2(\eta)d\eta d\xi\right\}$$

$$+W_m^2a_1^2\lambda\left\{\beta_1^2\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\left[\eta f_{11}(\eta)f_{11}(\xi)+\frac{1}{2}\xi f_{11}^2(\eta)\right]d\eta d\xi\right.$$

$$+\beta_1\beta_2\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)[\eta(f_{11}(\eta)f_{12}(\xi)+f_{11}(\xi)f_{12}(\eta))+\xi f_{11}(\eta)f_{12}(\eta)]d\eta d\xi$$

$$+\beta_2^2\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\left[\eta f_{12}(\eta)f_{12}(\xi)+\frac{1}{2}\xi f_{12}^2(\eta)\right]d\eta d\xi\ \Big\}$$

$$+W_m a_1\lambda^2\Big[\beta_1\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\eta\xi f_{11}(\eta)d\eta d\xi$$

$$+\beta_2\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\eta\xi f_{12}(\eta)d\eta d\xi\Big]$$

$$-p[\beta_1 f_{11}(x)+\beta_2 f_{12}(x)] \tag{3.5}$$

此时中心折合挠度为

$$W_m=-\int_0^1\varphi_2(x)dx$$

$$=-W_m^3a_1^3\sum_{i=0}^{3}a_{23}^{(i)}\beta_1^{3-i}\beta_2^i+W_m^2a_1^2\lambda\sum_{i=0}^{2}a_{22}^{(i)}\beta_1^{2-i}\beta_2^i$$

$$-W_m a_1\lambda^2\left(a_{21}^{(1)}\beta_1+a_{21}^{(2)}\beta_2\right)+\frac{p}{a_1} \tag{3.6}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
a_{23}^{(0)}&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\ \frac{1}{2}f_{11}^2(\eta)f_{11}(\xi)d\eta d\xi\\
a_{23}^{(1)}&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\ \frac{1}{2}[f_{12}(\xi)f_{11}^2(\eta)+2f_{11}(\xi)f_{12}(\eta)]d\eta d\xi\\
a_{23}^{(2)}&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\ \frac{1}{2}[f_{11}(\xi)f_{12}^2(\eta)+2f_{12}(\eta)f_{11}(\eta)f_{12}(\xi)]d\eta d\xi\\
a_{23}^{(3)}&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\ \frac{1}{2}f_{12}(\xi)f_{12}^2(\eta)d\eta d\xi\\
a_{22}^{(0)}&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\left[\eta f_{11}(\eta)f_{11}(\xi)+\frac{1}{2}\xi f_{11}^2(\eta)\right]d\eta d\xi\\
a_{22}^{(1)}&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)[\eta(f_{11}(\eta)f_{12}(\xi)\\
&\qquad+f_{11}(\xi)f_{12}(\eta)+\xi f_{11}(\eta)f_{12}(\eta)]d\eta d\xi\\
a_{22}^{(2)}&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\left[\eta f_{12}(\xi)f_{12}(\eta)+\frac{1}{2}\xi f_{12}^2(\eta)\right]d\eta d\xi\\
a_{21}^{(1)}&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\eta\xi f_{11}(\eta)d\eta d\xi\\
a_{21}^{(2)}&=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 G_1(x,\xi)G_2(\xi,\eta)\eta\xi f_{12}(\eta)d\eta d\xi
\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

于是，得到二阶近似时的p-W_m特征方程

$$p=(\beta_1a_{11}+\beta_2a_{12})^{-1}\Big[W_m^3(\beta_1a_{11}+\beta_2a_{12})^{-3}\sum_{i=0}^{3}a_{23}^{(i)}\beta_1^{3-i}\beta_2^i$$

$$-W_m^2\lambda(\beta_1 a_{11}+\beta_2 a_{12})^{-2}\sum_{i=0}^{2} a_{22}^{(i)}\beta_1^{2-i}\beta_2^i$$

$$+W_m(1+\lambda^2(\beta_1 a_{11}+\beta_2 a_{12})^{-1}(a_{21}^{(1)}\beta_1+a_{21}^{(2)}\beta_2))] \tag{3.8}$$

将(3.8)代入(3.5)后再代入(3.1)，便可得到三阶近似解．依此类推，可得任意高阶近似．大量研究表明，对于大多数工程问题，取二阶近似即可满足其精度要求．

特征方程求得后，便可很方便地求出临界点．由(3.8)的极值条件

$$\frac{dp}{dW_m}=0 \tag{3.9}$$

立刻得出

$$\left.\begin{aligned} W_m^* &= \frac{a_1^2A_{22}\lambda-\sqrt{\lambda^2(a_1^2A_{22}^2-3a_1^4A_{23}A_{21})-3a_1^3A_{23}}}{3a_1^3A_{23}} \\ W_m^{**} &= \frac{a_1^2A_{22}\lambda+\sqrt{\lambda^2(a_1^4A_{22}^2-3a_1^4A_{23}A_{21})-3a_1^3A_{23}}}{3a_1^3A_{23}} \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

式中 $A_{23}=\sum_{i=0}^{3} a_{23}^{(i)}\beta_1^{3-i}\beta_2^i$， $A_{22}=\sum_{i=0}^{2} a_{22}^{(i)}\beta_1^{2-i}\beta_2^i$， $A_{21}=a_{21}^{(1)}\beta_1+a_{21}^{(2)}\beta_2$

由(3.8)式，取$W_m=W_m^*$时，即得到下临界载荷p^*，取$W_m=W_m^{**}$时，便得到上临界载荷p^{**}．

令：

$$\lambda_0=\sqrt{\frac{3a_1^{-1}A_{23}}{A_{22}^2-3A_{23}A_{21}}} \tag{3.11}$$

由(3.10)知，仅当$\lambda\geqslant\lambda_0$时，壳体才会发生失稳．

几何参数λ_0及临界载荷p^*，p^{**}是壳体稳定性设计中的重要参数，我们在这里给出了显式表达式，这是通常的数值方法难以办到的．

四、数值结果及若干特例

为方便工程设计，表1给出了四种常见边界条件下，p-W_m特征方程的相关系数采用高斯数值积分，ν均取为0.3．

下面，我们考察几个特例：

特例1．考察中心集中力P作用下的圆板大挠度问题，边界条件为固定夹紧．由本文方法得到的特征方程为（取$\beta_1=1$，$\beta_2=0$，$\nu=0.3$，$\lambda=0$）

$$p=8(8^3\times 7.963\times 10^{-5}W_m^3+W_m)$$

文[5]采用摄动法的结果为

$$p=8(8^3\times 7.958\times 10^{-5}W_m^3+W_m)$$

相对系数误差仅0.062%．

特例2 考察均匀全分布载荷q作用下的圆板大挠度问题，边缘固定夹紧．由本文方法得到的特征方程为（取$\beta_1=0$，$\beta_2=1$，$\nu=0.3$，$\lambda=0$）

$$p=32(32^3\times 1.526W_m^3+W_m)$$

文[5]的摄动法结果为

$$p=32(32^3\times 1.525\times 10^{-6}W_m^3+W_m)$$

相对系数误差仅0.066%．

特例3 考察均匀全分布载荷q作用下的圆底扁球壳，边缘固定夹紧．由本文方法得到的特征方程为（取$\beta_1=0$，$\beta_2=1$，$\nu=0.3$）

$$p=32[32^3\times1.526\times10^{-6}W_m^3-32^2\times6.538\times10^{-5}\lambda W_m+W_m(1+\lambda^2\times32\times6.146\times10^{-4})]$$

文[4]采用修正迭代法得到的结果为

$$p=32[32^3\times1.525\times10^{-6}W_m^3-32^2\times6.536\times10^{-5}\lambda W_m+W_m(1+\lambda^2\times32\times6.144\times10^{-4})]$$

相对系数误差仅0.066%．

表 1

边界条件 / 系数	简单支承 $\delta_1=\delta_2=\frac{1}{\nu}$	铰链支承 $\delta_1=\frac{1}{\nu},\delta_2=0$	固定夹紧 $\delta_1=0,\delta_2=\frac{1}{\nu}$	可移夹紧 $\delta_1=\delta_2=0$
a_{11}	0.3173	0.3173	0.1250	0.1250
a_{12}	0.1274	0.1274	3.125×10^{-2}	3.125×10^{-2}
$a_{23}^{(0)}$	4.181×10^{-3}	7.968×10^{-4}	7.963×10^{-5}	3.602×10^{-5}
$a_{23}^{(1)}$	5.488×10^{-3}	9.626×10^{-4}	6.143×10^{-5}	2.508×10^{-5}
$a_{23}^{(2)}$	2.421×10^{-3}	3.937×10^{-4}	1.647×10^{-5}	6.103×10^{-6}
$a_{23}^{(3)}$	3.591×10^{-4}	5.441×10^{-5}	1.526×10^{-6}	5.161×10^{-7}
$a_{22}^{(0)}$	2.241×10^{-2}	3.615×10^{-3}	8.017×10^{-4}	2.783×10^{-4}
$a_{22}^{(1)}$	1.990×10^{-2}	2.982×10^{-3}	4.510×10^{-4}	1.408×10^{-4}
$a_{22}^{(2)}$	4.452×10^{-3}	6.234×10^{-4}	6.538×10^{-5}	1.855×10^{-5}
$a_{21}^{(1)}$	2.692×10^{-2}	3.737×10^{-3}	1.922×10^{-3}	5.249×10^{-4}
$a_{21}^{(2)}$	1.223×10^{-2}	1.588×10^{-3}	6.146×10^{-4}	1.493×10^{-4}

五、结 语

1． 本文首次给出了在中心分布载荷及中心集中力联合作用下，圆底扁球壳轴对称非线性稳定性特征方程，可直接用于工程设计．

2． 本文的计算量远小于传统的数值方法，可直接在微机上实现．本文全部数值计算均在IBM/PC机上完成．

3． 数值积分过程稳定，精度与摄动法基本相同，手工计算量则大大减少．

4． 欲求更高阶近似，可采用插值方法，这样可以减少求数值积分的机时，

参 考 文 献

[1] Stephens, W. B.R. and E. Fulton, Axisymmetric static and dynamic buckling of spherical caps due to centrally distributed pressure, *AIAA J.*, 7, 11 (1969), 2120—2126.

[2] J. R. Fich, B. Budiansky, Buckling and postbuckling behavior of spherical caps under axisymmetric load, *AIAA J.*, **8**, 4 (1970), 686—693.

[3] 叶开沅、宋卫平，中心分布压力下圆底扁球壳的变形和稳定性，应用数学和力学，**9**,10 (1988), 857—864.

[4] 叶开沅、顾淑贤，均布载荷作用下圆底扁球壳的非线性稳定性，1980 年全国计算力学 会议论文集，北京大学出版社 (1981), 280—287.

[5] 钱伟长、叶开沅，圆薄板的大挠度问题，物理学报，**10**, 3 (1954), 209—236.

[6] 胡海昌，球面扁薄壳的跳跃问题，物理学报，**10**, 4 (1954), 383—394.

[7] 黄黔，复合载荷下圆薄板的大挠度问题，应用数学和力学，**4**, 5 (1983), 711—720.

[8] 郑晓静、周又和，复合载荷下圆薄板大挠度问题的精确解，中国科学(A辑), 10 (1986), 1045—1056.

[9] 夏永旭，复合载荷作用下圆板大挠度弯曲的伽辽金法，计算结构力学及其应用，**6**,1 (1989),109—111.

[10] L. G. Chambers, *Integral Equation*, Int. Text. Comp. (1976).

Nonlinear Stability of Spherical Shallow Shell under Compound Loads

Yeh Kai-yuan

(*Lanzhou University, Lanzhou*)

Liu Ping

(*Yangzhou Institute of Technology, Yangzhou*)

Abstract

Using a semi-analytical method, the nonlinear stability of a spherical shallow shell under centrally distributed and concentrated loads is investigated in this paper. The longer manual calculation has been avoided when finding the approximate solution, and the p-W_m characteristic relation can be given analytically.

Key words shallow shell, buckling, semi-analytic method