应用数学和力学，第12卷第1期（1991年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

动态规划中提出的一类泛函方程组公共解和重合解的存在性定理*

张石生

（四川大学，1989年12月5日收到）

摘　要

本文讨论了动态规划中提出的一类更一般的泛函方程组公共解和重合解的存在性问题．本文的结果不仅包含引文[6,7]中相应结果为特例，而且也对引文[2～5]在讨论动态规划的原理和模型时所提出的一类新型的泛函方程给出解的存在性条件．

关键词　动态规划　泛函方程组　公共解和重合解

一、引　言

动态规划方法是一种重要的最优化方法．在运筹学中这种方法主要用于研究多阶段决策过程的最优化问题．

正如 Bellman，Lee[1]所指出的，动态规划最优化原理的泛函方程的基本形式是

$$f(x)=\sup_{y}\ \{H(x,y,f(T(x,y))\} \tag{1.1}$$

其中 x，y 分别表示状态和决策向量，T表过程的变换，$f(x)$ 表具初始状态 x 的最优返回函数．

关于方程（1.1）的求解问题 Bhakta 和 Baskaran 等分别在［6,7］中讨论过，最近 Wang[2~5]在研究动态规划的原理和模型时又引出下面一类更为一般的泛函方程：

$$f(x)=\sup_{y}\ \{H(x,y,g(T(x,y))\} \tag{1.2}$$

其中 g不必恒等于f，甚至与f完全不同，由于方程(1.2)刚被提出，因此这类方程还未被人讨论过．

本文的目的是研究动态规划中提出的一类形式更为一般的泛函方程组

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=\sup_{y}\{u(x,y)+G(x,y,g(T(x,y)))\}\\g(x)&=\sup_{y}\{u(x,y)+F(x,y,f(T(x,y)))\}\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

的公共解和重合解的存在性问题，本文的结果不仅包含［6,7］中相应结果为特例，而且也对

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(Ⅰ)论文．国家自然科学基金资助课题．

泛函方程(1.2)给出解的存在性条件.

这里我们称f_*, g_*为方程(1.3)的重合解，如果

$$f_*(x)=\sup_y\{u(x,y)+G(x,y,g_*(T(x,y)))\},$$

$$g_*(x)=\sup_y\{u(x,y)+F(x,y,f_*(T(x,y)))\};$$

称f_*为方程(1.3)的公解，如果

$$f_*(x)=\sup_y\{u(x,y)+G(x,y,f_*(T(x,y)))\},$$

$$f_*(x)=\sup_y\{u(x,y)+F(x,y,f_*(T(x,y)))\}.$$

二、一个公共不动点定理

我们称函数 $\varphi(t)$: $[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足条件 (Φ)，如果它是不减的，上半连续的，且 $\varphi(t)<t$, $\forall t>0$.

引理2.1 ([9,10]). 设$\varphi(t)$: $[0,\infty)\to[0,\infty)$满足条件(Φ)，则

(i) 对一切$t\geqslant0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(t)=0$ ($\varphi^n(t)$表$\varphi(t)$的n次迭代)；

(ii) 对任一满足条件$t_{n+1}\leqslant\varphi(t_n)(n=1,2,\cdots)$的非负实数序列$\{t_n\}$，有 $t_n\to0$；特别当 $t\leqslant\varphi(t)$, $t\geqslant0$时，则$t=0$.

定理2.1 设 (X,d) 是一完备的度量空间，设函数 $\Phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$: $[0,\infty)^5\to[0,\infty)$对每一变量不减，关于$t_5$是上半连续的，而且存在满足条件($\Phi$)的函数 $\varphi(t)$: $[0,\infty)\to[0,\infty)$，使得

$$\Phi(t,t,t,at,bt)\leqslant\varphi(t) \qquad (\forall t\geqslant0,\ a+b=2,\ a,\ b=0,1,2).$$

再设 A, T: $X\to X$满足条件：对任意的$x,y\in X$

$$d(Ax,Ty)\leqslant\Phi(d(x,y),\ d(x,Ax),\ d(y,Ty),\ d(x,Ty),d(y,Tx)) \tag{2.1}$$

则A, T在X中存在唯一的公共不动点.

证 (一). 先证公共不动点的唯一性.

设 x_*, $y_*\in X$是A, T的两个公共不动点，于是由(2.1)得

$$\begin{aligned}d(x_*,y_*)&=d(Ax_*,Ty_*)\leqslant\Phi(d(x_*,y_*),\ 0,\ 0,\ d(x_*,y_*),\ d(x_*,y_*))\\&\leqslant\varphi(d(x_*,y_*))\end{aligned}$$

引用引理2.1(ii)，即得$x_*=y_*$.

(二) 下证公共不动点的存在性.

任取$x_0\in X$，定义序列$\{x_n\}$如下：

$$x_{2n+1}=Ax_{2n},\ x_{2n+2}=Tx_{2n+1} \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{2.2}$$

现证$\{x_n\}$是X中的Cauchy列. 事实上，

(1) 当n是奇数时有

$$\begin{aligned}d(x_n,\ x_{n+1})&=d(Ax_{n-1},\ Tx_n)\\&\leqslant\Phi(d(x_{n-1},\ x_n),\ d(x_{n-1},\ x_n),\ d(x_n,x_{n+1}),\ d(x_{n-1},x_{n+1}),0)\end{aligned} \tag{2.3}$$

由上式易知$d(x_n,\ x_{n+1})\leqslant d(x_{n-1},x_n)$，代入(2.3)化简得

$$d(x_n,x_{n+1})\leqslant\Phi(d(x_{n-1},x_n),\ d(x_{n-1},x_n),\ d(x_{n-1},x_n),\ 2d(x_{n-1},x_n),\ 0)\leqslant\varphi(d(x_{n-1},x_n)) \tag{2.4}$$

（2） 当n是偶数时，一样可证

$$d(x_n,x_{n+1})\leqslant\varphi(d(x_{n-1},x_n)) \tag{2.5}$$

因而对一切$n(n=1,2,\cdots)$都有$d(x_n,x_{n+1})\leqslant\varphi(d(x_{n-1},x_n))$. 于是由引理2.1得知

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1})=0 \tag{2.6}$$

由(2.6)仿[9]中定理1，可证$\{x_n\}$是X中的 Cauchy 列．因X完备，不妨设$x_n\to x_*\in X$.

现证x_*是A，T的公共不动点，事实上，如果$x_*\neq Tx_*$，于是由(2.1)有

$$\begin{aligned}d(x_*,Tx_*)&\leqslant d(x_*,x_{2n+1})+d(Ax_{2n},\ Tx_*)\\&\leqslant d(x_*,\ x_{2n+1})+\Phi(d(x_{2n},\ x_*),\ d(x_{2n},\ x_{2n+1}),\ d(x_*,Tx_*),\\&\qquad d(x_{2n},x_*)+d(x_*,Tx_*),\ d(x_*,x_{2n+1}))\end{aligned} \tag{2.7}$$

因$x_n\to x_*$，故存在正整数n_0，当$n>n_0$时有

$$\max\{d(x_{2n},x_*),\ d(x_{2n},x_{2n+1})\}<d(x_*,Tx_*)$$

于是当$n>n_0$时，由(2.7)得

$$d(x_*,Tx_*)\leqslant d(x_*,x_{2n+1})+\Phi(d(x_*,Tx_*),\ d(x_*,Tx_*),d(x_*,Tx_*),\ 2d(x_*,Tx_*),\ d(x_*,x_{2n+1})).$$

由假定Φ关于第5变量上半连续，于上式右端让$n\to\infty$取上极限即得

$$d(x_*,Tx_*)\leqslant\Phi(d(x_*,Tx_*),\ d(x_*,Tx_*),\ d(x_*,Tx_*),\ 2d(x_*,Tx_*),0)\leqslant\varphi(d(x_*,Tx_*)).$$

由引理2.1得$x_*=Tx_*$. 矛盾，由此矛盾知$x_*=Tx_*$.

同理可证$x_*=Ax_*$. 证毕.

注 若$\Phi=\Phi\left(t_1,\ t_2,\ t_3,\ \frac{t_4+t_5}{2}\right)$时，则定理2.1中$\Phi$关于$t_5$的上半连续性可去掉.

三、公共解的存在性定理

在本节和下节我们处处假定X，Y是 Banach 空间，$R=(-\infty,+\infty)$; $S\subset X$，$D\subset Y$分别是状态空间和决策空间；设$B(S)$是定义在S上的一切实值有界函数全体的集合，在$B(S)$上赋以距离

$$d(h,k)=\sup_{x\in S}|h(x)-k(x)| \tag{3.1}$$

则$(B(S),\ d)$是一完备的度量空间，再设T：$S\times D\to S$表过程的变换，而u：$S\times D\to R,G,F$：$S\times D\times R\to R$是三个给定的函数，在本节我们将讨论泛函方程组

$$\left.\begin{aligned}f(x)&=\sup_{y\in D}\{u(x,y)+G(x,y,g(T(x,y)))\}\\g(x)&=\sup_{y\in D}\{u(x,y)+F(x,y,f(T(x,y)))\}\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

在$B(S)$中公共解的存在性．关于方程组(3.2)在$B(S)$中重合解的存在性，我们将在下节讨论.

我们有下面的结果

定理3.1 设u,G,F满足条件：

（i） u，G，F是有界的；

（ii） 对任意的$(x,y)\in S\times D$和任意的h，$k\in B(S)$，

$$|G(x,y,h(x))-F(x,y,k(x))|$$
$$\leqslant\Phi(d(h,k),\ d(h,Ah),\ d(k,Pk),\ d(h,Pk),\ d(k,Ah)) \tag{3.3}$$

其中 Ah，Pk由下面的式子定义：

$$Ah(x)=\sup_{y\in D}\{u(x,y)+G(x,y,h(T(x,y)))\}\qquad(x\in S) \tag{3.4}$$

$$Pk(x)=\sup_{y\in D}\{u(x,y)+F(x,y,k(T(x,y)))\}\qquad(x\in S) \tag{3.5}$$

而Φ满足定理2.1中所述条件.

则方程组(3.2)在$B(S)$中有唯一的公解.

证 首先我们指出，由假定，u，G和F有界，故由(3.4)和(3.5)定义的A，P是$B(S)$上的自映象. 任取h，$k\in B(S)$，令

$$\psi_1(x)=Ah(x),\ \psi_2(x)=Pk(x)\qquad(x\in S) \tag{3.6}$$

于是对任给的$x\in S$和$\eta>0$，存在y_1，$y_2\in D$，使得

$$\psi_1(x)<u(x,y_1)+G(x,y_1,\ h(T(x,y_1)))+\eta \tag{3.7}$$

$$\psi_2(x)<u(x,y_2)+F(x,y_2,k(T(x,y_2)))+\eta \tag{3.8}$$

但因

$$\psi_1(x)\geqslant u(x,y_2)+G(x,y_2,h(T(x,y_2))) \tag{3.9}$$

$$\psi_2(x)\geqslant u(x,y_1)+F(x,y_1,k(T(x,y_1))) \tag{3.10}$$

于是由(3.7)和(3.10)得

$$\psi_1(x)-\psi_2(x)<G(x,y_1,h(T(x,y_1))-F(x,y_1,k(T(x,y_1)))+\eta$$
$$\leqslant\Phi(d(h,k),\ d(h,Ah),\ d(k,Pk),\ d(h,Pk),\ d(k,Ah))+\eta \tag{3.11}$$

另由(3.8)和(3.9)得

$$\psi_1(x)-\psi_2(x)>G(x,y_2,h(T(x,y_2)))-F(x,y_2,k(T(x,y_2)))-\eta$$
$$\geqslant-\Phi(d(h,k),d(h,Ah),\ d(k,Pk),\ d(h,Pk),\ d(k,Ah))-\eta \tag{3.12}$$

由(3.11)和(3.12)即得

$$d(Ah,Pk)=d(\psi_1,\psi_2)=\sup_{x\in S}|\psi_1(x)-\psi_2(x)|$$
$$\leqslant\Phi(d(h,k),d(h,Ah),\ d(k,Pk),\ d(h,Pk),d(k,Ah))+\eta.$$

由于$\eta>0$的任意性，即知

$$d(Ah,Pk)\leqslant\Phi(d(h,k),\ d(h,Ah),\ d(k,Pk),\ d(h,Pk),\ d(k,Ah))\qquad(\forall h,k\in B(S))$$

于是由定理2.1知A，P在$B(S)$中存在唯一公共不动点，即存在$f_*\in B(S)$，使得

$$f_*(x)=\sup_{y\in D}\{u(x,y)+G(x,y,f_*(T(x,y)))\}\qquad(x\in S)$$

$$f_*(x)=\sup_{y\in D}\{u(x,y)+F(x,y,f_*(T(x,y)))\}\qquad(x\in S)$$

定理证毕.

注 当$G\equiv F$时，定理3.1给出泛函方程(1.1)之一存在性定理. 另外当$G\equiv F$时，定理3.1也改进了[6]中的主要结果.

四、重合解的存在性定理

在本节中我们将讨论泛函方程组(3.2)在$B(S)$中重合解的存在性，这里有关X，Y,S,D，T，u、G，F和$B(S)$的意义和所满足的条件与第三节中的相同。

我们有下面的结果。

定理4.1 设 u，F，G是非负的且满足下列条件：

(i) $\|T(x,y)\|\leqslant\varphi(\|x\|)$，$\forall x,y\in S\times D$．其中$\varphi$：$[0,\infty)\to[0,\infty)$不减，而且对每一$t>0$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varphi^n(t)<\infty$；

(ii) $0\leqslant u(x,y)\leqslant\|x\|(\forall x,y\in S\times D)$；

(iii) $0\leqslant\{G(x,y,z),\ F(x,y,z)\}\leqslant|z|\qquad(\forall(x,y,z)\in S\times D\times R)$；

(iv) 对固定的$(x,y)\in S\times D$，$G(x,y,\cdot)$和$F(x,y,\cdot)$是不减的和连续的。

则泛函方程组(3.2)有重合解。

证 取$g_0(x)=\sup\limits_{y\in D}\{u(x,y)\}$，并定义序列$\{g_{2n}\}$和$\{f_{2n+1}\}$如下：

$$g_{2n}(x)=\sup_{y\ D}\{u(x,y)+F(x,y,f_{2n-1}(T(x,y)))\}\qquad(n\geqslant1)\tag{4.1}$$

$$f_{2n+1}(x)=\sup_{y\cdot D}\{u(x,y)+G(x,y,g_{2n}(T(x,y)))\}\qquad(n\geqslant0)\tag{4.2}$$

由定理的假设条件易知对每一$x\in S$

$$g_0(x)\leqslant g_2(x)\leqslant\cdots\leqslant g_{2(n-1)}(x)\leqslant g_{2n}(x)\leqslant\cdots\tag{4.3}$$

$$f_1(x)\leqslant f_3(x)\leqslant\cdots\leqslant f_{2(n-1)+1}(x)\leqslant f_{2n+1}(x)\leqslant\cdots\tag{4.4}$$

下证对任一$x\in S$，序列$\{g_{2n}(x)\}$和$\{f_{2n+1}(x)\}$都是有界的。

事实上，对任给的$x\in S$，$\|x\|\leqslant a$．由条件(ii)知

$$0\leqslant g_0(x)\leqslant\|x\|\tag{4.5}$$

另因

$$\begin{aligned}0&\leqslant u(x,y)+G(x,y,g_0(T(x,y)))\leqslant\|x\|+g_0(T(x,y))\\&\leqslant\|x\|+\|T(x,y)\|\leqslant\|x\|+\varphi(\|x\|).\end{aligned}$$

故得

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant\sum_{i=0}^{1}\varphi^i(\|x\|)\tag{4.6}$$

又因

$$0\leqslant u(x,y)+F(x,y,f_1(T(x,y)))\leqslant\|x\|+f_1(T(x,y))$$

$$(\text{由 }(4.6))\leqslant\|x\|+\sum_{i=0}^{1}\varphi^i(\|T(x,y)\|)\leqslant\sum_{i=0}^{2}\varphi^i(\|x\|),$$

故得

$$0\leqslant g_2(x)\leqslant\sum_{i=0}^{2}\varphi^i(\|x\|)\tag{4.7}$$

由归纳法一般可证下列两式成立：

$$0\leqslant f_{2n+1}(x)\leqslant \sum_{i=0}^{2n+1}\varphi^i(\|x\|),$$

$$0\leqslant g_{2n}(x)\leqslant \sum_{i=0}^{2n}\varphi^i(\|x\|).$$

由条件(i)得证对每一$x\in S$，$\{g_{2n}(x)\}$和$\{f_{2n+1}(x)\}$都是有界的，于是由(4.3)和(4.4)不妨设

$$f_{2n+1}(x)\to f^*(x)\in B(S),\quad g_{2n}(x)\to g^*(x)\in B(S).$$

下证f^*和g^*是(3.2)的重合解，事实上，因

$$u(x,y)+G(x,y,g_{2n}(T(x,y)))\leqslant f_{2n+1}(x)\leqslant f^*(x) \tag{4.8}$$

$$u(x,y)+F(x,y,f_{2n-1}(T(x,y)))\leqslant g_{2n}(x)\leqslant g^*(x) \tag{4.9}$$

于上两式中让$n\to\infty$，引用条件(iv)即得

$$u(x,y)+G(x,y,g^*(T(x,y)))\leqslant f^*(x)\qquad (x\in S) \tag{4.10}$$

$$u(x,y)+F(x,y,f^*(T(x,y)))\leqslant g^*(x)\qquad (x\in S) \tag{4.11}$$

令

$$M(x)=\sup_{y\in D}\{u(x,y)+G(x,y,g^*(T(x,y)))\},$$

$$N(x)=\sup_{y\in D}\{u(x,y)+F(x,y,f^*(T(x,y)))\}.$$

由(4.10)和(4.11)得

$$M(x)\leqslant f^*(x),\ N(x)\leqslant g^*(x)\qquad (x\in S) \tag{4.12}$$

另对任给的$x\in S$，及任意的正整数n和任意的$y\in D$，有

$$\begin{aligned}&u(x,y)+G(x,y,g_{2n}(T(x,y)))\\&\qquad\leqslant u(x,y)+G(x,y,g^*(T(x,y)))\leqslant M(x),\\&u(x,y)+F(x,y,f_{2n-1}(T(x,y)))\leqslant u(x,y)+F(x,y,f^*(T(x,y)))\\&\qquad\leqslant N(x).\end{aligned}$$

由上二式即得

$$f_{2n+1}(x)\leqslant M(x),\quad g_{2n}(x)\leqslant N(x)\qquad (x\in S) \tag{4.13}$$

于上式中让$n\to\infty$，即得

$$f^*(x)\leqslant M(x),\quad g^*(x)\leqslant N(x)\qquad (x\in S) \tag{4.14}$$

结合(4.12)和(4.14)即得

$$f^*(x)=M(x)=\sup_{y\in D}\{u(x,y)+G(x,y,g^*(T(x,y)))\},$$

$$g^*(x)=N(x)=\sup_{y\in D}\{u(x,y)+F(x,y,f^*(T(x,y)))\}.$$

即f^*，g^*是方程(3.2)的重合解。

定理证毕。

注　由定理4.1，顺便即可得出关于泛函方程(1.2)解的存在性定理.

参 考 文 献

[1] Bellman R. and E. S. Lee, Functional equations in dynamic programming, *Aequvtiones Math.*, 17 (1978), 1—18.

[2] Wang Chung-lie, The principle and models of dynamic programming (I), *J. Math. Anal. Appl.*, 135 (1988), 268—283.

[3] Wang Chung-lie, The principle and models of dynamic programming (II), *J. Math. Anal. Appl.*, 135 (1988), 284—296.

[4] Wang Chung-lie, The principle and models of dynamic programming (IV), *J. Math. Anal. Appl.*, 137 (1989), 148—160.

[5] Wang Chung-lie, The principle and models of dynamic programming (V), *J. Math. Anal. Appl.*, 137 (1989), 161—167.

[6] Bhakta, P. C. and Sumitra Mitra, Some existence theorems for functional equations arising in dynamic programming, *J. Math. Anal. Appl.*, 98 (1984), 348—326.

[7] Baskaran, R. and P. V. Subrahmanyam, A note on the solution of a class of functional equations, *Applicable Analysis*, 22 (1986), 235—241.

[8] 张石生，《不动点理论及应用》，重庆出版社 (1984).

[9] Chang Shih-sen, On common fixed point theorem for a family of Φ-contraction mappings, *Math. Japonica*, 29 (1984), 527—536.

[10] Zhang Shi-sheng, Fixed point theorems for generalized Meir-Keeler type mappings, *J. Sichuan Univ.*, Natural Sci. Edition, 2 (1983), 17—23.

Some Existence Theorems of Common and Coincidence Solutions for a Class of Functional Equations Arising in Dynamic Programming

Zhang Shi-sheng

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu)

Abstract

Some existence theorems of common and coincidence solutions for a class of more general systems of functional equations arising in dynamic programming are shown. The results presented in this paper not only contain the corresponding results of [6,7] as special cases, but also give an existence theorem of solutions for a class of functional equations suggested by Wang[2~5] recently.

Key words dynamic programming, systems of functional equations, common and coincidence solutions