

# 用摄动法和有限条法分析矩形板的大挠度

苏旭明 赵祖武

(天津大学, 1990年1月19日)

## 摘 要

本文将摄动法和有限条法结合起来进行矩形板的大挠度弯曲分析。用摄动的概念, 将非线性微分方程组化为一系列线性微分方程组, 然后用有限条法解这些线性微分方程组。

**关键词** 矩形板 大挠度 摄动法 有限条方法

用有限条法分析矩形板的线性问题, 有方便可靠、计算量小等优点<sup>[1]</sup>。但直接用有限条法作非线性计算, 却较繁复<sup>[2]</sup>。本文用摄动的概念, 将矩形板的大挠度弯曲方程组化为一系列线性微分方程组, 然后用有限条法求解。因此, 在非线形分析中, 发挥了有限条法的特长, 为有限条法解非线形问题提供一条新途径。

## 一、薄板的大挠度方程及其摄动

如图1所示, 矩形板在横向外力  $q$  作用下发生弹性变形, 产生位移  $u, v, w$ 。若材料正交各向异性, 无量纲化后的大挠度弯曲平衡方程可写为:

$$U_{,\xi\xi} + \lambda^2 c_1 U_{,\eta\eta} + \lambda c_2 V_{,\xi\eta} = -W_{,\xi} (W_{,\xi\xi} + \lambda^2 c_1 W_{,\eta\eta}) - \lambda^2 c_2 W_{,\eta} W_{,\xi\eta} \quad (1.1)$$

$$\lambda c_2 U_{,\xi\eta} + c_1 V_{,\xi\xi} + \lambda^2 c_3 V_{,\eta\eta} = -\lambda W_{,\eta} (c_1 W_{,\xi\xi} + \lambda^2 c_3 W_{,\eta\eta}) - \lambda c_2 W_{,\xi} W_{,\xi\eta} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} W_{,\xi\xi\xi\xi} + 2\lambda^2 c_4 W_{,\xi\xi\eta\eta} + \lambda^4 c_3 W_{,\eta\eta\eta\eta} = & P + W_{,\xi\xi} (U_{,\xi} + \lambda v_{21} V_{,\eta}) \\ & + \lambda^2 W_{,\eta\eta} (v_{21} U_{,\xi} + \lambda c_3 V_{,\eta}) + 2\lambda c_1 W_{,\xi\eta} (\lambda U_{,\eta} + V_{,\xi} + \lambda W_{,\xi} W_{,\eta}) \\ & + \frac{1}{2} W_{,\xi\xi} (W_{,\xi}^2 + \lambda^2 v_{21} W_{,\eta}^2) \\ & + 2^{-1} \lambda^2 W_{,\eta\eta} (v_{21} W_{,\xi}^2 + \lambda^2 c_3 W_{,\eta}^2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

式中

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{a}{b}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad c_1 = -\frac{\mu G_{12}}{E_1}, \quad c_2 = c_1 + v_{21} \\ c_3 = \frac{E_2}{E_1}, \quad c_4 = v_{21} + 2c_1, \quad \mu = 1 - v_{21}v_{12}, \quad U = \frac{12au}{h^2}, \\ V = \frac{12av}{h^2}, \quad W = 2\sqrt{3} \frac{w}{h}, \quad P = 24\sqrt{3} \frac{qa^4\mu}{E_1 h^4} \end{aligned}$$

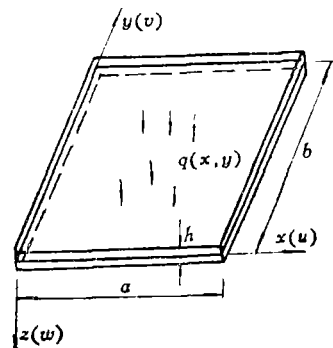


图1 受外载的矩形板

\* 创刊十年暨一百期纪念特刊(I)论文。

上述各弹性常数的意义和无量纲过程见[4].

以板的中心挠度为摄动参数, 即定义:  $\epsilon = W(1/2, 1/2)$  (1.4)

并将外力  $P$  写为  $P = \varphi p^*(G, \eta)$ , 其中  $p^*$  和  $\varphi$  分别表征载荷的分布和大小, 然后, 展开  $U$ 、 $V$ 、 $W$  和  $\varphi$  如下:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} w^{(n)} \epsilon^n, \quad U = \sum_{n=1}^{\infty} u^{(n)} \epsilon^n, \quad V = \sum_{n=1}^{\infty} v^{(n)} \epsilon^n, \quad \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n)} \epsilon^n \quad (1.5 \sim 1.8)$$

注意到展式(1.5)和摄动参数的定义(1.4), 在(1.5)两边同时取点(1/2, 1/2)的值, 比较两边  $\epsilon$  的幂次, 应有:

$$w^{(1)}(1/2, 1/2) = 1; \quad w^{(n)}(1/2, 1/2) = 0 \quad (n \geq 2) \quad (1.9 \sim 1.10)$$

把摄动展式(1.5)~(1.8)代入(1.1)~(1.3), 令所得方程两端同幂次  $\epsilon$  的系数相等, 得一系列摄动方程组:

$$u_{;\xi\xi}^{(n)} + \lambda^2 c_1 u_{;\eta\eta}^{(n)} + c_2 \lambda v_{;\xi\eta}^{(n)} = -f_{n\xi}, \quad \lambda c_2 u_{;\xi\eta}^{(n)} + c_1 v_{;\xi\xi}^{(n)} + \lambda^2 c_3 v_{;\eta\eta}^{(n)} = -f_{n\eta} \quad (1.11 \sim 1.12)$$

$$w_{;\xi\xi\xi\xi}^{(n)} + 2\lambda^2 c_4 w_{;\xi\xi\eta\eta}^{(n)} + \lambda^4 c_5 w_{;\eta\eta\eta\eta}^{(n)} = -q^{(n)} p^*(\xi, \eta) + f_{n\xi} \quad (1.13)$$

式中  $f_{n\xi}$ ,  $f_{n\eta}$  和  $f_{n\xi}$  都是  $u^{(\nu)}$ ,  $v^{(\nu)}$ ,  $w^{(\nu)}$  ( $\nu \leq n-1$ ) 的二次或三次多项式, 当  $n=1$  时为零, 故在计算中是已知量. 具体表达式见文献[5].

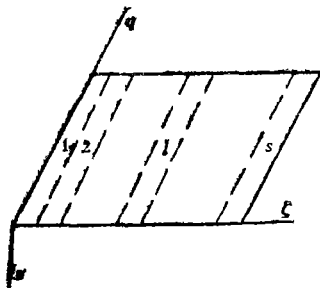
很明显, (1.11)和(1.12)相当外力  $f_{n\xi}$  和  $f_{n\eta}$  作用下的平面应力问题, (1.13)是板的线性弯曲问题, 适当的边界条件下, 它们的解是带参数  $q^{(n)}$  的函数, 而  $q^{(n)}$  由式(1.9)或(1.10)确定. 所以式(1.9)~(1.13)唯一确定展式(1.5)~(1.8)中各项, 是摄动的全部结果.

我们指出, 式(1.11)~(1.13)是性线微分方程, 用多种方法可求得其近似解. 但就本文研究的矩形板, 有限条方法有独到的优点: 简单方便、计算量小, 便于在微型机上解决较为复杂的问题. 因此, 我们在下节引入有限条方法.

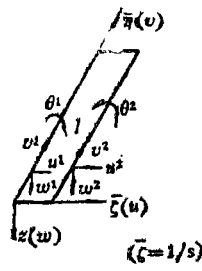
## 二、摄动有限条

上节的分析, 将大挠度问题归结为平面应力问题和板的线性弯曲问题. 用有限条解这些问题, 前人工作很多. 此处用位移法<sup>(1)</sup>.

如图2, 将板分为  $s$  条. 设其中第  $i$  条上的第  $n$  次摄动的位移函数为:



(a)



(b)

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^m [u_k^1 (1-\xi) + u_k^2 \xi] X_k(\eta) \quad (2.1)$$

$$v^{(n)} = \sum_{k=1}^m [v_k^1 (1-\xi) + v_k^2 \xi] Y_k(\eta) \quad (2.2)$$

图2 有限条的分法及意义

$$w^{(n)} = \sum_{k=1}^m [(1-3\xi^2 + 2\xi^3)w_k^1 + \xi(1-2\xi + \xi^2)\theta_k^1]$$

$$+(3\xi^2-2\xi^3)w_i^{(n)}+\xi(\xi^2-\xi)\theta_k^{(n)}]Z_k(\eta) \quad (2.3)$$

式中  $\xi$  是  $l$  条上的局部坐标, 见图 2(b).  $u_i^{(n)}$  等为第  $n$  次摄动时第  $l$  个有限条上, 相应于  $\eta$  方向第  $k$  次展开项的在  $i$  条边上的有关值.

根据[1]中推导, 写出(1.11)~(1.13)的矩阵形式:

$$K_a \Delta^{(n)} = G^{(n)}, \quad K_b \delta^{(n)} = q^{(n)} \bar{P} + F^{(n)} \quad (2.4 \sim 2.5)$$

$$\delta^{(n)} = [w_i^{(n)}, \theta_1^{(n)}, w_i^{(n)}, \theta_1^{(n)}, \dots, \theta_k^{(n)}, \dots]^T \quad (2.6)$$

$$\Delta^{(n)} = [u_i^{(n)}, v_i^{(n)}, u_i^{(n)}, v_i^{(n)}, \dots, v_k^{(n)}, \dots]^T \quad (2.7)$$

式中  $K_a, K_b$  是平面应力问题和薄板弯曲问题的刚度矩阵,  $\bar{P}$  是  $p^*$  引起的外力向量,  $G^{(n)}$  和  $F^{(n)}$  对应(1.11)~(1.13)中的  $f$  各项.  $T$  是转置符号.

$G^{(n)}$  和  $F^{(n)}$  的程序实现比较困难.  $f_{n\xi}$  各项是  $u^{(\nu)}$  ( $\nu \leq n-1$ ) 等的二或三次多项式. 乘上虚位移后积分才得  $G^{(n)}$  和  $F^{(n)}$ , 被积函数是  $u^{(\nu)}$  等的三或四次多项式. 在我们编制的程序中, 相应于不同的边界条件,  $X_n(\eta)$  等选用三角函数,  $\eta$  方向求出其积分精确值; 在  $\xi$  方向, 因是  $\xi$  的多项式, 用高斯积分. 这样, 既保证精度, 也较简单.

### 三、计算实例

根据上两节的思路, 我们编制了程序, 在 IBM/PC 机上算了一些实例. 为了和现有其它计算结果比较, 外载取均匀分布, 并  $p^*(\xi, \eta) = 1$ .

例1 四边固支各向同性板

此时,  $E_1 = E_2 = E$ ,  $G_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $\nu_{21} = \nu_1 = \frac{1}{3}$ . 边界条件是:

$$x=0, a: u=v=w=w_{,xx}=0; \quad y=0, b: u=v=w=w_{,yy}=0$$

有限条设定函数(2.1)~(2.3)中  $\eta$  向级数一般项取:

$$X_n(\eta) = \sin n\pi\eta; \quad Y_n(\eta) = \sin n\pi\eta; \quad Z_n(\eta) = 1 - \cos 2n\pi\eta$$

先算方板:  $\lambda = 1$ . 若将计算结果写为中心挠度  $\epsilon$  和载荷系数  $\varphi^*$  的关系式:

$$\varphi^* = q^{(1)}\epsilon + q^{(8)}\epsilon^8 \quad (3.1)$$

式中  $\varphi^* = 2\sqrt{3}q \cdot (a/2)^4 / Dh$ , 则相应于不同有限条数和  $\eta$  向级数取法的  $q^{(1)}$  和  $q^{(8)}$  列于表1.

表中同时列出文[3]的结果. [3]中结果是用摄动法求得. 摄动中用待定系数的多项式求解线性微分方程. 表中结果说明, 本文结果与文[3]相近. 但是, 用文[3]的方法, 当外载或边界条件复杂时, 计算会很繁. 这时, 本文方法的优点就显示出来了.

表 1 四边固支方板的计算结果

有限条 条 数	η向级数项数			$q^{(1)}$	$q^{(8)}$
	$u$	$v$	$w$		
4	4	4	3	49.53	2.03
6	4	4	3	49.45	2.07
6	4	4	4	49.53	2.09
8	4	4	3	49.49	2.03
文[3]中的结果				50.3815	2.03

对矩形板,  $a \neq b$ . 取  $\lambda = 1/2$  和  $\lambda = 2/3$  为例. 计算中有限条取 6 条,  $\eta$  方向级数取 4 项. 计

算结果示于图3。

例2 简支各向同性板。材料与例1相同。边界条件为：

$$x=0, a: u=v=w=w_{,xx}=0; y=0, b: u=v=w=w_{,yy}=0$$

$\eta$ 方向级数取： $X_n(\eta)=\sin n\pi\eta; Y_n(\eta)=\sin n\pi\eta; Z_n(\eta)=\sin n\pi\eta$

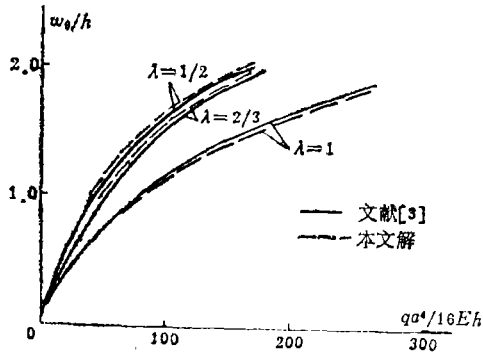


图3 固支矩形板的载荷挠度曲线

$\lambda=1$ 时的计算结果示于图4。

有关本文更详细的结果和讨论参见文[5]。

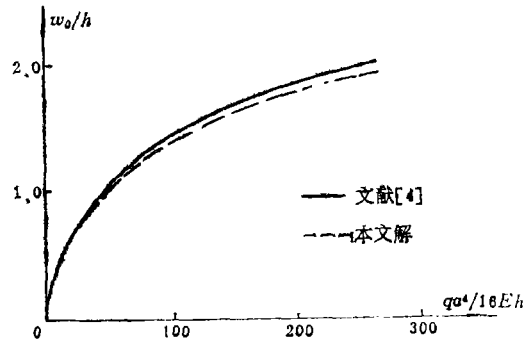


图4 简支板的载荷挠度曲线

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Cheung, Y. K., *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergaman Press (1976).
- [ 2 ] Cheung, Y. K., *Proc. Int. Conf. Finile Element Method*, Ed G. He and Y. K. Cheung, Science Press, Beijing (1982), 36—49.
- [ 3 ] Chien, W. Z and. K. Y. Yeh, *Proc. 9th Int. Congr. Theo. Appl. Mech.* 41, (1957), 403—412.
- [ 4 ] Chia, C. Y., *Nonlinear Analysis of Plates*, McGraw-Hill Co. (1980).
- [ 5 ] 苏旭明,用摄动法与有限条法解矩形板几何非线性问题,天津大学硕士研究生毕业论文 (1985).

## Large Deflection Analysis of Rectangular Plates by Combined Perturbation and Finite Strip Method

Su Xu-ming                  Zhao Zu-wu

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin)

### Abstract

The perturbation method and finite strip method are combined to solve the large deflection bending problems of rectangular plates. Perturbation method is used to reduce the nonlinear differential equations into a series of linear differential equations. The finite strip method are then employed to tackle these linear equations. Some calculation examples are compared with those got by other methods.

**Key words** rectangular plate, large deflection, perturbation method, finite strip Method