应用数学和力学，第12卷第1期（1991年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

极限方程为椭圆-抛物的四阶椭圆型方程的奇摄动*

林宗池

（福建师大数学系，1990年2月15日收到）

摘要

本文研究了极限方程为椭圆-抛物的四阶椭圆型方程 $-\varepsilon^2\Delta^2u+y^m\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,y)=0$ 的奇摄动问题，其中ε为正的小参数，m为正的实数，Δ为拉普拉斯算子，a，b，c充分光滑。在适当的假设下，导出可解性的充分条件，证明了解的存在和给出任意阶的一致有效的渐近解。

关键词 奇摄动 极限方程 椭圆型方程

一、引言

作者[1]曾在苏联的科学导师指导下研究过极限方程具有奇性的二阶常微分方程的奇摄动，随后，导师指出可把结果推广到二阶偏微和高阶常微和偏微的问题上去。1988年，作者[2]又解决了极限方程有奇性的二阶向量常微分方程的柯西问题。由于偏微问题比较复杂，此项工作未获进展。近年来已出现了很多极限方程带奇性（或转向点）的二阶椭圆型方程奇摄动的文章[3~5]，本文在此基础上探讨极限方程为椭圆-抛物的四阶椭圆型方程边值问题

$$L_\varepsilon u\equiv-\varepsilon^2\Delta^2u+y^m\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,y)u=0 \quad ((x,\ y)\in G) \tag{1.1}$$

$$u(x,y,\varepsilon)\Big|_{\partial\Omega}=f(x,y,\varepsilon)\Big|_{\partial\Omega},\qquad \frac{\partial^2u}{\partial n^2}\Big|_{\partial\Omega}=\psi(x,y,\varepsilon)\Big|_{\partial\Omega} \tag{1.2a,b}$$

的奇摄动，其中Ω为由Ox轴（$y=0$）上的一段$\Gamma_1=[-R,R]$和位于半平面$y>0$上的半圆周$\Gamma_2=\sqrt{x^2+y^2}<R$所围成的半圆域，$R$为圆的半径；$\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$，$\varepsilon$为正的小参数，$n$表示$\partial\Omega$的内法线。

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊（Ⅰ）论文。国家自然科学基金资助课题。

二、外部形式渐近解

首先，假定下列条件成立：

(H_1)　$a(x,y)$，$b(x,y)$，$c(x,y)$关于其变元在区域Ω中为充分光滑的函数，$a(x,0)$的符号随m的大小而定（即由稍后退化问题的要求而定）.

设问题(1.1)、(1.2)的外部解具有如下形式的渐近展开式：

$$U(x,y,\varepsilon)\sim\sum_{i=0}^{\infty}u_i(x,y)\varepsilon^i \quad (0<\varepsilon\ll 1) \tag{2.1}$$

将(2.1)代入(1.1)，比较ε同次幂项的系数得

$$y^m\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial y}+b(x,y)\frac{\partial u_0}{\partial x}+c(x,y)u_0=0 \tag{2.2}$$

$$y^m\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial u_i}{\partial y}+b(x,y)\frac{\partial u_i}{\partial x}+c(x,y)u_i=\Delta^2 u_{i-2},$$

$$(i=1,\ 2,\ 3\cdots.) \tag{2.3i}$$

上面和往后出现的具有负下标的项认为是零.

众所周知，如果条件（H_1）成立，则方程（2.2）在半圆域Ω内有唯一解，只要下列诸条件之一被满足：1）$m<0$；2）$m=1$和$a(x,0)<1$；3）$1<m<2$和$a(x,0)\leqslant 0$；4）$m\geqslant 2$和$a(x,0)<0$，并且这个解在$\bar{\Omega}$上连续，它在边界上取f的函数值（参看[6]）.

曾有人发现，如果方程（2.2）满足下列条件之一：1）$m=1$和$a(x,0)\geqslant 1$；2）$1<m<2$和$a(x,0)>0$；3）$m\geqslant 2$和$a(x,0)\geqslant 0$，那么，方程（2.2）在$\bar{\Omega}$上的一个有界而且连续的解$u_0(x,y)$就唯一地由函数$u_0(x,y)$在半圆周$\Gamma_2=\sqrt{x^2+y^2}<R$上的值所确定，即仅由在区域$\Omega$的那部分边界上（在那里方程（2.2）是椭圆型的）的值所确定[7]. 当$y=0$时，方程(2.2)显然是抛物型的.

关于方程（2.2）的其他的一些边值问题，特别是与椭圆型方程第二边值问题的相类似的问题都已经有人研究过[8]. 而方程(2.3i)的第一第二边值问题解的存在和唯一的证明可见文[9]. 因此，由（2.2）和（2.3i）可依次求得外解$u_i(x,y)$（$i=0,\ 1,\ \cdots$）.

三、边界层函数

由（2.1）式决定的外部解，一般来说并不完全满足边界条件（1.2），因此我们需要构造边界层函数来补足失去的部分边界条件.

首先，我们在Γ_1的邻域构造边界层函数，引进三变量[10]：$h=q(x,y)/\varepsilon$，$\xi=x$，$\eta=y$. 将关于x和y的偏导数，替换成关于h，ξ和η的偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}=\varepsilon^{-1}(\delta_x^{(0)}+\varepsilon\delta_x^{(1)}),\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}=\varepsilon^{-2}(\delta_{x^2}^{(0)}+\varepsilon\delta_{x^2}^{(1)}+\varepsilon^2\delta_{x^2}^{(2)}),\quad \cdots,$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}=\varepsilon^{-4}(\delta_{x^2y^2}^{(0)}+\varepsilon\delta_{x^2y^2}^{(1)}+\cdots+\varepsilon^4\delta_{x^2y^2}^{(4)}).$$

其中

$$\delta_x^{(0)} = g_x \frac{\partial}{\partial h}, \quad \delta_x^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \delta_{x^2}^{(0)} = g_x^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2},$$

$$\delta_{x^2}^{(1)} = 2g_x \frac{\partial^2}{\partial h \partial \xi} + g_{xx} \frac{\partial}{\partial h}, \quad \delta_{x^2}^{(2)} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad \delta_{x^2y^2}^{(0)} = g_x^2 g_y^2 \frac{\partial^4}{\partial h^4},$$

$$\delta_{x^2y^2}^{(1)} = 2g_x g_y^2 \frac{\partial^4}{\partial h^3 \partial \xi} + 2g_x g_y \frac{\partial^4}{\partial h^3 \partial \eta} + (g_{xx} g_y^2 + 4g_x g_y g_{xy} + g_x^2 g_{yy}) \frac{\partial^3}{\partial h^3},$$

$$\delta_{x^2y^2}^{(2)} = g_x^2 \frac{\partial^4}{\partial h^2 \partial \eta^2} + g_y^2 \frac{\partial^4}{\partial h^2 \partial \xi^2} + 4g_x g_y \frac{\partial^4}{\partial h^2 \partial \xi \partial \eta} + (2g_x g_{yy} + 4g_y g_{yy}) \frac{\partial^3}{\partial h^2 \partial \xi}$$

$$+ (2g_y g_{xx} + 4g_x g_{xy}) \frac{\partial^3}{\partial h^2 \partial \eta} + (2g_x g_{xyy} + 2g_y g_{xxy} + g_{xx} g_{yy} + g_{xy}^2) \frac{\partial^2}{\partial h^2},$$

$$\delta_{x^2y^2}^{(3)} = 2g_x \frac{\partial^4}{\partial h \partial \xi \partial \eta^2} + 2g_y \frac{\partial^4}{\partial h \partial \xi^2 \partial \eta} + g_{xx} \frac{\partial^3}{\partial h \partial \eta^2} + g_{yy} \frac{\partial^2}{\partial h \partial \xi^2} + 4g_{xy} \frac{\partial^3}{\partial h \partial \xi \partial \eta}$$

$$+ 2g_{xyy} \frac{\partial^2}{\partial h \partial \xi} + 2g_{xxy} \frac{\partial^2}{\partial h \partial \eta} + g_{xxyy} \frac{\partial}{\partial h}, \quad \delta_{x^2y^2}^{(4)} = \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2}.$$

其中 $g_x = \partial g / \partial x$等等。

将x和ξ分别替换成y和η，又得到$\partial/\partial y$，$\partial^2/\partial y^2$，…，$\partial^4/\partial y^4$；将y和η分别替换成x和ξ，又得到$\partial^4/\partial x^4$。在三变量h，ξ，η下，微分算子L_ε在Γ_1的邻域的展开式如下：

$$L_\varepsilon = \varepsilon^{-2}(K_0 + \varepsilon K_1 + \cdots + \varepsilon^4 K_4)$$

其中

$$K_0 \equiv -(\delta_{x^4}^{(0)} + \delta_{y^4}^{(0)} + 2\delta_{x^2y^2}^{(0)}) + \delta_{x^2}^{(0)} + y^m \delta_{y^2}^{(0)},$$

$$K_1 \equiv -(\delta_{x^4}^{(1)} + \delta_{y^4}^{(1)} + 2\delta_{x^2y^2}^{(1)}) + \delta_{x^2}^{(1)} + y^m \delta_{y^2}^{(1)} + b\delta_x^{(0)} + a\delta_y^{(0)},$$

$$K_2 \equiv -(\delta_{x^4}^{(2)} + \delta_{y^4}^{(2)} + 2\delta_{x^2y^2}^{(2)}) + \delta_{x^2}^{(2)} + y^m \delta_{y^2}^{(2)} + b\delta_x^{(1)} + a\delta_y^{(1)} + c,$$

$$K_3 \equiv -(\delta_{x^4}^{(3)} + \delta_{y^4}^{(3)} + 2\delta_{x^2y^2}^{(3)}), \quad K_4 \equiv -(\delta_{x^4}^{(4)} + \delta_{y^4}^{(4)} + 2\delta_{x^2y^2}^{(4)}).$$

假设边界层函数具有如下展开式

$$V \sim \varepsilon^2(v_0 + \varepsilon v_1 + \cdots + \varepsilon^i v_i + \cdots) \tag{3.1}$$

用V代换(1.1)式所对应的齐次方程中的u，令ε的同次幂的系数相等，得到$v_i(i=0,1,\cdots)$所要求的递推方程：

$$K_0 v_0 \equiv -(g_x^2 + g_y^2)^2 \frac{\partial^4 v_0}{\partial h^4} + (g_x^2 + y^m g_y^2) \frac{\partial^2 v_0}{\partial h^2} = 0 \tag{3.2}$$

$$K_0 v_i = -(K_1 v_{i-1} + K_2 v_{i-2} + \cdots + K_4 v_{i-4}) \tag{3.3}$$

从(3.2)式可以看出，若取$g(x,y)$为非线性一阶微分方程：$g_x^2 + g_y^2 = \sqrt{g_x^2 + y^m g_y^2}$满足条件$g|_{\Gamma_1} = 0$，$g > 0$在$\Gamma_1$的邻域的解（其存在性的证明类似于文[10]），则方程(3.2)化为下列形式：

$$\frac{\partial^4 v_0}{\partial h^4} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial h^2} = 0 \tag{3.4}$$

方程(3.4)的边界层型的解如下：

$$v_0 = c_0(\xi, \eta) \exp[-h] = c_0(x, y) \exp[-g(x, y)/\varepsilon]$$

其中 c_0为任意函数。

将v_0代入(3.3)式（取$i=1$），令其右端为零，我们得到确定c_0的线性一阶微分方程：

$$2g_x(2g_x^2+2g_y^2-1)\frac{\partial c_0}{\partial \xi}+2g_y(2g_x^2+2g_y^2-y^m)\frac{\partial c_0}{\partial \eta}+[g_{xx}(6g_x^2+2g_y^2-1)$$
$$+g_{yy}(6g_y^2+2g_x^2-y^m)+8g_xg_yg_{xy}-bg_x-ag_y]c_0=0$$

和关于v_1的微分方程

$$\frac{\partial^4 v_1}{\partial h^4}-\frac{\partial^2 v_1}{\partial h^2}=0 \tag{3.5}$$

从（3.5）式可以求得边界层型的解为：

$$v_1=c_1(\xi,\eta)\exp[-h]=c_1(x,y)\exp[-g(x,y)/\varepsilon]$$

其中　c_1是任意函数。

将v_0和v_1代入（3.3)式（取$i=2$），令其右端为零，又得到确c_1的线性一阶微分方程：

$$2g_x(2g_x^2+2g_y^2-1)\frac{\partial c_1}{\partial \xi}+2g_y(2g_x^2+2g_y^2-y^m)\frac{\partial c_1}{\partial \eta}$$
$$+(\cdots)c_1=\exp[h]K_2v_0$$

这样继续下去，可以求得

$$v_i=c_i(\xi,\eta)\exp[-h]=c_i(x,y)\exp[-g(x,y)/\varepsilon]$$

其中c_i（$i=2$，3，…）确定于线性一阶微分方程：

$$2g_x(2g_x^2+2g_y^2-1)\frac{\partial c_i}{\partial \xi}+2g_y(2g_x^2+2g_y^2-y^m)\frac{\partial c_i}{\partial \eta}$$
$$+(\cdots)c_i=\exp[h](K_2v_{i-1}+\cdots+K_4v_{i-3})$$

上式右端是c_{i-3}、c_{i-2}和c_{i-1}的已知函数。

根据边界层校正函数的性质，V和U必须满足边界条件（1.2)，因此

$$(V+U)\Big|_{\partial\Omega}=\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^iu_i+\varepsilon^2\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^iv_i\Big)\Big|_{\Gamma_1}=f(x,y,\varepsilon)\Big|_{\Gamma_1} \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial^2(U+V)}{\partial n^2}\Big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^iu_i+\varepsilon^2\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^iv_i\Big)_{\Gamma_1}=\psi(x,y,\varepsilon)\Big|_{\Gamma_1} \tag{3.7}$$

由于在Γ_1的邻域有

$$\frac{\partial^2}{\partial n^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\varepsilon^{-2}(\delta_{x^2}^{(0)}+\varepsilon\delta_{x^2}^{(1)}+\varepsilon^2\delta_{x^2}^{(2)})$$

所以若在（3.6）和（3.7）中令ε的同次幂的系数相等，则可逐次地得出u_i和v_i（$i=0$，1，…）的边界条件：

$$u_0\Big|_{\Gamma_1}=f(x,y,0)\Big|_{\Gamma_1}\equiv f_0,\quad u_i\Big|_{\Gamma_1}=(f_i-v_{i-2})_{\Gamma_1}$$

$$g_y^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial h^2}\Big|_{\Gamma_1}=\Big(\psi(x,y,0)-\frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2}\Big)\Big|_{\Gamma_1},$$

$$g_y^2\frac{\partial^2 v_i}{\partial h^2}\Big|_{\Gamma_1}=\Big[\psi_i-\Big(\frac{\partial^2 u_i}{\partial n^2}+2g_y\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial h\partial \eta}+g_{yy}\frac{\partial v_{i-1}}{\partial h}+\frac{\partial^2 v_{i-2}}{\partial \eta^2}\Big)\Big]_{\Gamma_1}$$

其中

$$f_i=\frac{1}{i!}\frac{\partial^i f(x,y,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^i}\Big|_{\varepsilon=0},\quad \psi_i=\frac{1}{i!}\frac{\partial^i \psi(x,y,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^i}\Big|_{\varepsilon=0}\qquad (i=1,\ 2,\ \cdots)$$

从关于v_i（$i=0$，1，…）的边界条件，可以求得关于c_i的边界条件：

$$c_0\Big|_{\Gamma_1}=\frac{1}{g_y^2}\left(\psi(x,y,0)-\frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2}\right)\Big|_{\Gamma_1}$$

$$c_i\Big|_{\Gamma_1}=\frac{1}{g_y^2}\left[\psi_i-\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial n^2}-2g_y\frac{\partial c_{i-1}}{\partial\eta}-g_{yy}c_{i-1}+\frac{\partial^2 c_{i-2}}{\partial\eta^2}\right)\right]_{\Gamma_1}$$

从关于u_i和c_i的边界条件和递推方程，可以逐步地解出u_i和c_i（$i=0, 1, \cdots$），从而求得V和U的渐近展开式。

其次，在边界Γ_2的邻域构造边界层函数。引进变换 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$，我们改写方程（1.1）为如下形式：

$$\begin{aligned}L_\varepsilon u\equiv&-\varepsilon^2\Big[\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^4}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho^3}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho^3}\frac{\partial^3 u}{\partial\rho\partial\varphi^2}\\&+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial\rho^2\partial\varphi^2}+\frac{4}{\rho^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{\rho^4}\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}\Big]+\left(\rho^m\sin^{m+2}\varphi+\cos^2\varphi\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}\\&+\left[\rho^m\sin^m\varphi\left(\frac{\cos^2\varphi}{\rho}\right)+\frac{\sin^2\varphi}{\rho}+\bar a(\rho,\varphi)\cos\varphi+\bar b(\rho,\varphi)\sin\varphi\right]\frac{\partial u}{\partial\rho}\\&+\left[\rho^m\sin^m\varphi\left(\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\right)+\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\Big[\bar b(\rho,\varphi)\frac{\cos\varphi}{\rho}+\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}\\&-\frac{2}{\rho^2}\sin^{m+1}\varphi\cos\varphi-\bar a(\rho,\varphi)\frac{\sin\varphi}{\rho}\Big]\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\bar c(\rho,\varphi)u=0\end{aligned}$$

引进伸长变量r[11]，$r=(R-\rho)/\varepsilon$，则

$$\begin{aligned}L_\varepsilon u\equiv&-\varepsilon^2\Big[\varepsilon^{-4}\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}-\varepsilon^{-3}\frac{2}{R-\varepsilon r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}-\frac{1}{(R-\varepsilon r)^2}\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{(R-\varepsilon r)^3}\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial r}\\&-\varepsilon^{-1}\frac{2}{(R-\varepsilon r)^3}\frac{\partial^3 u}{\partial r\partial\varphi^2}+\varepsilon^{-2}\frac{2}{(R-\varepsilon r)^2}\frac{\partial^4 u}{\partial r^2\partial\varphi^2}+\frac{4}{(R-\varepsilon r)^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\&+\frac{1}{(R-\varepsilon r)^4}\frac{\partial^4 u}{\partial\varphi^4}+\varepsilon^{-2}\Big[(R-\varepsilon r)^m\sin^{m+2}\varphi+\cos^2\varphi\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\\&+\Big[(R-\varepsilon r)^m\sin^m\varphi\left(\frac{\cos^2\varphi}{R-\varepsilon r}\right)+\frac{\sin^2\varphi}{R-\varepsilon r}+\bar a(R-\varepsilon r,\varphi)\cos\varphi\\&+\bar b(R-\varepsilon r,\varphi)\sin\varphi\Big]\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial r}+\Big[(R-\varepsilon r)^{m-2}\cos^2\varphi+\frac{\sin^2\varphi}{(R-\varepsilon r)^2}\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\\&+\Big[\bar b(R-\varepsilon r,\varphi)\frac{\cos\varphi}{(R-\varepsilon r)}+\frac{\sin^2\varphi}{(R-\varepsilon r)^2}-\frac{2}{(R-\varepsilon r)^2}y^m\sin^{m+1}\varphi\cos\varphi\\&-\bar a(R-\varepsilon r,\varphi)\frac{\sin\varphi}{R-\varepsilon r}\Big]\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\bar c(R-\varepsilon r,\varphi)u=0\end{aligned}\tag{3.8}$$

设边界层函数$W(r,\varphi,\varepsilon)$如下：

$$W(r,\varphi,\varepsilon)\sim\sum_{i=0}^{\infty}w_i(r,\varphi)\varepsilon^{i+2}\qquad(0<\varepsilon\ll 1)\tag{3.9}$$

将（3.8）式的系数按ε的幂展开并把（3.9）式代入上述算子，令同ε次幂的系数为零，得

$$L_0 w_0\equiv\frac{\partial^4 w_0}{\partial r^4}+(R^m\sin^{m+2}\varphi+\cos^2\varphi)\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}=0\tag{3.10}$$

$$L_0w_i=F_i(r,\varphi,w_0,\cdots,w_{i-1})\qquad(i=1,2,\cdots)\tag{3.11i}$$

其中 F_i为$w_0,\cdots,w_{i-1}$的偏导数的线性齐次函数，其结构从略。

把（2.1）式和（3.9）式代入边界条件：$\left.\dfrac{\partial^2 W}{\partial n^2}\right|_{\Gamma_2}=\left.\dfrac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right|_{r=0}=\psi(x,y,\varepsilon)\Big|_{r=0}-\left.\dfrac{\partial^2 U}{\partial n^2}\right|_{\Gamma_2}$，按$\varepsilon$展开相应的项，合并$\varepsilon$的同次幂项并令其系数为零，得

$$\left.\frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2}\right|_{r=0}=\psi_0(R,\varphi,0)\Big|_{r=0}-\left.\frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2}\right|_{\Gamma_2}\tag{3.12}$$

$$\left.\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2}\right|_{r=0}=\psi_i(R,\varphi)\Big|_{r=0}-\left.\frac{\partial^2 u_{i-2}}{\partial n^2}\right|_{\Gamma_2}\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots)\tag{3.13i}$$

由（3.10）和（3.12）可得如下形式的解：

$$w_0(r,\varphi)=\frac{1}{k^2}\left[\psi_0(R,\varphi,0)\Big|_{r=0}-\left.\frac{\partial^2 u_0}{\partial n^2}\right|_{\Gamma_2}\right][\exp(-kr)-1]$$

其中

$$k=(R^m\sin^{m+2}\varphi+\cos^2\varphi)^{1/2}$$

显然，$\partial^2 w_0/\partial r^2$是边界层型函数．再由（3.11i)和（3.13i）可依次求得$w_i(r,\varphi)(i=1,2,\cdots)$，$\partial^2 w_i/\partial r^2$也是边界层型函数．

因此，我们便构造出原问题（1.1)，（1.2）的解u的形式渐近展开式：

$$u\sim\sum_{i=0}^{\infty}(u_i+\varepsilon^2\bar{v}_i+\varepsilon^2\bar{w}_i)\varepsilon^i\qquad(0<\varepsilon\ll 1)$$

其中 $\bar{v}_i=q_2(y)v_i$，$\bar{w}_i=q_1(r)w_i$，$q_1(r)$，$q_2(y)$是无限可微的函数：

$$q_1(r)=\begin{cases}1 & (\text{当}\ 0\leqslant r\leqslant r_0/3),\\ 0 & \left(\text{当}\ r\geqslant \dfrac{2}{3}r_0\right).\end{cases}\qquad q_2(y)=\begin{cases}1 & (\text{当}0\leqslant y\leqslant y_0/3)\\ 0 & (\text{当}y\geqslant \dfrac{2}{3}y_0)\end{cases}$$

四、余项估计

若Z_N表示u和U_N的余项：$Z_N=u-U_N$，

其中

$$U_N=\sum_{i=0}^{N}(u_i+\varepsilon^2\bar{v}_i+\varepsilon^2\bar{w}_i)\varepsilon^i$$

则由上面的推导可知：

$$L_\varepsilon Z_N=\phi_0(x,y)G(\varepsilon)\tag{4.1}$$

$$Z_N\Big|_{\partial\Omega}=\phi_1(x,y)G(\varepsilon),\quad \left.\frac{\partial^2 Z_N}{\partial n^2}\right|_{\partial\Omega}=\phi_2(x,y)G(\varepsilon)\tag{4.2}$$

这里 $\phi_i(x,y)=O(1)$ $(i=0,\ 1,\ 2)$；$G(\varepsilon)=\varepsilon^{N+1}$．

以$\tilde{Z}_N$表示在$\partial\Omega$上满足边界条件（4.2）的$C^{(4)}(\bar{\Omega})$中的函数且成立：

$$\tilde{Z}_N=\phi_4(x,y)G(\varepsilon),\quad \phi_4(x,y)=O(1)\tag{4.3}$$

作函数：$\mathbf{Z}_N=Z_N-\tilde{Z}_N$

则Z_N满足下面的齐次边值问题：

$$L_\varepsilon Z_N=P(x,y)G(\varepsilon) \tag{4.4}$$

$$Z_N\Big|_{\partial\Omega}=0,\quad \frac{\partial^2 Z_N}{\partial n^2}\Big|_{\partial\Omega}=0 \tag{4.5}$$

其中 $P(x,y)=O(1)$.

下面我们先给出关于一致有界逆算子L_ε^{-1}存在的一个充分条件.

定理1 若条件(H_2) $2^{-1}(a_y+b_x-m(m-1)y^{m-2}-c\geqslant\alpha>0$ 成立，则一致有界逆算子L_ε^{-1}存在，即对于满足边值条件（4.5）的任意函数$w\in C^{(4)}(\bar{\Omega})$存在下面的不等式：

$$(L_\varepsilon w,-w)\geqslant\alpha\|w\|^2_{L_2} \tag{4.6}$$

事实上，通过分部积分易证不等式（4.6）成立、详细计算从略.

根据定理1从（4.4）式可得

$$\|Z_N\|_{L_2}\leqslant k_0\varepsilon^{N+1}$$

并由（4.3）式得

$$\|\tilde{Z}_N\|_{L_2}\leqslant k_1\varepsilon^{N+1}$$

故得

$$\|Z_N\|_{L_2}\leqslant\|Z_N-\tilde{Z}_N\|_{L_2}+\|\tilde{Z}_N\|_{L_2}\leqslant k_2\varepsilon^{N+1}$$

以上k_0, k_1, k_2均为某个正的常数.

综合前面各部分的结果，我们得到如下的定理：

定理2 如果假设条件(H_1)，(H_2)成立. 那么，边值问题(1.1)，(1.2)的解$u(x,y,\varepsilon)\in C^{(4)}(\bar{\Omega})$存在且满足关系式：

$$u(x,y,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i(u_i+\varepsilon^2\bar{v}_i+\varepsilon^2\bar{w}_i)+O(\varepsilon^{N+1})\qquad (x,\ y)\in\bar{\Omega}$$

参考文献

[1] 林宗池，苏联科学院报告，**157**，3（1964），522—525.

[2] 林宗池，《第五届边界层和内层计算和渐近方法国际会议记录》，英国爱尔兰，Boole出版社（1988），212—217.

[3] de Jager E. M., *Lecture Notes in Math.*, 280 (1972), 73.

[4] Grasman, J. and B. J. Matkowsky, *SIAM. J. Appl. Math.*, **32** (1977), 588.

[5] 高汝熹，复旦学报（自然科学版），**20**，3（1981），296—305；**21**，4（1982），367—378.

[6] И. Г. 彼得罗夫斯基著，《偏微分方程讲义》，苏联国家技术理论书籍出版社（1956）.

[7] Келдыш М. В., 苏联科学院报告，**77**，2（1951），181—183.

[8] Олейник О. А., 苏联科学院报告，**87**，6,（1955），885—888.

[9] Вишик М. И., 苏联科学院报告，**91**（1953），225—229，**93**（1953），9—12；苏联数学进展，**9**，1（59），(1954) 138—143；数学汇刊，**35**，(77)，(1954)，313—368.

[10] 江福汝，关于边界层方法，应用数学和力学，**2**，5（1981），461—473.

[11] Nayfeh, A. H., 《摄动法引论》，New York (1981).

Singular Perturbation of the Fourth Order Elliptic Equation When the Limit Equation Is Elliptic-Parabolic

Lin Zong-chi

(*Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou*)

Abstract

In this paper we consider the singular perturbation of the fourth order elliptic equation $-\varepsilon^2\Delta^2u+y^m\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x,y)=0$ when the limit equation is elliptic-parabolic, where ε is a positive parameter, m is a positive real number, Δ is Laplacian operator, a, b, c are sufficiently smooth. Under appropriate condition we derive the sufficient condition of solvability and prove the existence of solution and give a uniformly valid asymptotic solution of arbitrary order.

Key words singular peıturbaticn, limit equation, elliptic eguation