

为什么大行星可以同时有 顺行和逆行卫星

汪家诩

(浙江大学, 1989年10月27日收到)

摘 要

本文用圆型限制三体问题的Jacobi积分来建立一个能确定卫星是否稳定的测检函数. 凡是对其主行星所作的瞬时椭圆轨道要素已知的卫星都可检定其稳定性.

对于作准圆形轨道运动的卫星, 我们可用电子计算机来求出它的稳定域. 这域的界面是一个近似的扁椭球面. 这闭面所包围的空间比“引力作用球”和其相应的卫星区的“Hill 曲面”要小得多.

由于卫星对其主行星的相对动能表示式对顺行和逆行轨道两者形式相同, 所以两者可以在卫星的稳定域中同时存在.

关键词 瞬时椭圆轨道 轨道要素 引力作用球 准圆形轨道

一、适用于卫星的 Jacobi 积分

本文是[1]的续篇. 两者内容密切相关.

为了研究卫星的运动, 我们必须将原点移到卫星的主行星的中心上, 由此须用坐标变换式:

$$x=X-(1-U), \quad y=Y, \quad z=Z \quad (1.1)$$

其中坐标系 $Oxyz$ 的原点 O 是行星的中心位置 P , x 轴沿 SP . 将(1.1)代入[1]中(1.3), 求得适用于卫星的 Jacobi 积分:

$$T_r - \sqrt{r^2 + 2x + 1} - \frac{U}{T} - \frac{(x+1-U)^2 + y^2}{2} - H = 0 \quad (1.2)$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = OS$, 即自行星中心 O 至卫星 S 的矢径长. 对卫星仍取 $H = V_1$ (见表2).

二、卫星的相对动能表示式

因卫星至行星的距离远小于太阳和行星的距离, 而且卫星区的空间又较小, 所以太阳在卫星区的引力场近似于均匀力场. 这样我们把卫星区的引力场看成只有其主行星的中心力

场,于是卫星对其行星的轨道在短时间内是个椭圆.卫星对行星的相对速度 v_r 可写为^[2]

$$v_r^2 = \omega_s^2 a_s^3 (2/r - 1/a_s) \quad (2.1)$$

其中 ω_s 是卫星绕行星的平均角速度, a_s 是卫星轨道的半长径.现在选卫星的远行星点作为测试点,则 $r = a_s(1+e)$.将它代入(2.1)得

$$v_r^2 = \omega_s^2 a_s^3 (1-e)/(1+e) = \omega_s^2 a_s^3 K^2 \quad (2.2)$$

式中 $K^2 = (1-e)/(1+e)$.于是相对动能可表为

$$T_r = \frac{m}{2} \omega_s^2 a_s^3 K^2 / m \omega^2 a^2 \quad (2.3)$$

式中 m 为卫星的质量, ω 是行星绕太阳的平均角速度, a 是行星的半长径.应用刻卜勒第三定律:

$$G(M + M_p) = \omega^2 a^3, \quad G(M_p + m) = \omega_s^2 a_s^3$$

T_r 成为

$$T_r = \frac{G(M_p + m)}{2G(M_p + M)} \frac{a}{a_s} K^2 = \frac{U}{2r} K^2 \left(1 + \frac{M}{M_p}\right) \quad (2.4)$$

一般 $m \ll M_p$,此时 T_r 简化为

$$T_r = UK^2 / 2r \quad (2.5)$$

(2.4)可用于地月系统,因对地月有 $m/M_p = 1/81.3007$.

三、卫星的稳定性测检函数及测检实例

现在我们定义下式为测检卫星稳定性的函数:

$$F = T_r + V - V_1$$

$$\text{即} \quad F = \frac{UK^2}{2r} \left(1 + \frac{m}{M_p}\right) - \frac{1-U}{\sqrt{r^2 + 2x + 1}} - \frac{U}{r} - \frac{(x+1-U)^2 + y^2}{2} - V_1 \quad (3.1)$$

要卫星能长期存留在卫星区中,必须 $F < 0$.如果 $F > 0$,卫星将有机会逃离其主行星而去.

卫星的轨道面与 Oxy 平面的交线称为节线,以 ON 表示, ON 与 x 轴的夹角为 j ,轨道面与 Oxy 面的夹角为 i ,称为倾角.卫星的长轴线与 ON 的夹角为 k ,则有关系式(参看图1):

$$\left. \begin{aligned} x &= r(\cos k \cos j - \sin k \sin j \cos i) \\ y &= r(\cos k \sin j + \sin k \cos j \cos i) \\ z &= r \sin k \sin i \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

(A) 对月球的稳定性的检定

因月球和地球的质量比为 $1/81.3007$,是太阳系中卫星对主行星的质量比最大的一个,我们应该用(2.4)的 T_r 来检测月球的稳定性.

现在我们有列数据:太阳和地球的质量比 $M/M_E = 332946$,于是 $U = M_E/(M + M_E) = 3.003481 \times 10^{-6}$;月球的偏心率 $e = 0.0549$,所以 $K^2 = 0.8959143$;

$$V_1 = -1.500445347, \quad a_s = 384400 \text{ km}, \quad a = SE = 149597870 \text{ km}$$

$$r = a_s/a = 2.5695553 \times 10^{-3}$$

现在已知其节线作18.6年的周期运动^[8],所以我们可以选 $j = 0^\circ$.由于节线的变动, k 也会变动.应用倾角 $i = 5.09^\circ$, (2.7)成为

$$x = r \cos k, \quad y = r \sin k \cos 5.09^\circ$$

现选4个 k 值, 经计算列表1. F 值都是负的, 可见不论长轴线方向如何, 月球总是稳定的.

(B) 大行星的卫星的稳定性检定

像木星, 土星, 天王星和海王星, 它们的质量比地球大得多, 因此它们的卫星域亦大, 可有很多个卫星. 这些卫星, 有些是顺行的, 有些是逆行的, 可以同时存在于一个行星的卫星区. 这是由于它们的相对动能表式 T_r 都是 $UK^2/2r$, 形式相同.

表1

k	F
0°	-0.000197431
60°	-0.000190006
90°	-0.000187518
180°	-0.000197465

由于大行星的卫星较多, 我们可选离其主行星最远的加以验算, 如果资料齐全的话. 对大行星的卫星都有 $m \ll M_p$, 所以 T_r 可以用(2.5), 现在只用一例说明.

木星的Ⅱ号卫星^[4]: $e=0.21$, $i=148^\circ$, $j=208^\circ$, $a_s=22500000\text{km}$, $a=5.202803\text{AU}$
 $=778328246.8\text{km}$, $K^2=0.652892562$. U 和 V_1 参看表2. 为了简化用计算机计算的程序, 我们分 A 和 B 两部分计算.

$$A = \frac{U}{r} \left(\frac{K^2}{2} - 1 \right) - V_1 = 1.49715488$$

$$B = - \frac{1-U}{\sqrt{r^2+2x+1}} - \frac{(x+1-U)^2+y^2}{2}$$

应用(2.7)的 x 和 y 算 B , 将 k 自 0° 至 358° 输入电子计算机, 取步长 2° , 这样我们算得的 $F=A+B$ 都是小于零, 故此卫星稳定.

四、准圆形轨道卫星的稳定域

准圆形轨道的偏心率 $e \approx 0$, 所以 $K^2=1$, 这样 F 函数更为简单. 现在可用电子计算机算出 F 在 x, y, z 轴上近似于零的截距.

令 $y=z=0$, 得

$$F(x) = - \frac{1-U}{|x+1|} - \frac{U}{2|x|} - \frac{(x+1-U)^2}{2} - V_1, \quad x > 0, \quad x < 0 \quad (4.1)$$

令 $x=z=0$, 得

$$F(y) = - \frac{1-U}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{U}{2y} - \frac{(1-U)^2+y^2}{2} - V_1, \quad y > 0 \quad (4.2)$$

令 $x=y=0$, 得

$$F(z) = - \frac{1-U}{\sqrt{1+z^2}} - \frac{U}{2z} - \frac{(1-U)^2}{2} - V_1, \quad z > 0 \quad (4.3)$$

在原点 O 的附近, 上列 F 函数的曲线形式如图2. $F=0$, 共有 A, B, C, D 四点. 对变数的值, 我们要的是 B 和 C 两点的位置坐标. 当变数的绝对值增大时, 这两点的 F 值自 $F < 0$ 变到 $F > 0$. 我们可用电子计算机逐次逼近法求出 $F \approx 0$ 的变数值. 对 x 来说, 有 B 和 C 两点, 且恒有 $|x_B| > |x_C|$. 由于对称性, 对 y 和 z 有 $|y_B| = |y_C|$; $|z_B| = |z_C|$. 经计算我们得到以 km 为单位的四个临界值 x_B, x_C, y 和 z , 如表2. 我们看出它们的大小顺序是 $|x_B| > x_C > y > z$.

根据表2, 我们可以肯定 $r < z$ 的卫星一定是稳定的; 倾角 i 小的卫星, $r < y$ 的卫星也是

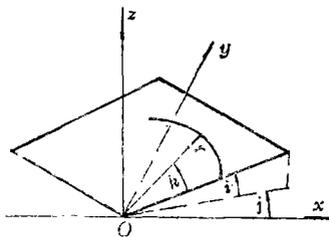


图 1

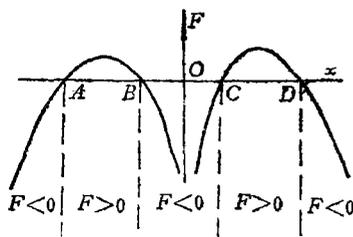


图 2

稳定的。但是我们不能肯定 $r > |x_B|$ 的卫星一定不稳定。例如，我们在上一节(B)中已经说明，木卫Ⅱ是稳定的，但是 $a_s = 22500000\text{km} > |x_B| = 18150881\text{km}$ 。

由于超出这临界曲面的卫星仍可能是稳定的，我们应该再作出卫星区的Hill曲面，由于 $T_r = 0$ ，所以Hill函数的 F 函数为

$$F = -\frac{1-U}{\sqrt{r^2+2x+1}} - \frac{U}{r} - \frac{(x+1-U)^2+y^2}{2} - V_1 \tag{4.4}$$

对于(4.4)，我们同样可以求出Hill曲面在 x, y, z 三轴上的截距。它们的值比表2的值大得多。现在只对地球绘出两种截面的比较。图3中实线表示Hill曲线，虚线表示圆形轨道卫星的临界曲线，图中的小圆圈表示月球的位置。可见月球是稳定的。

表 2

行星	U	X_1	V_1	$x_B(\text{km})$	$x_C(\text{km})$	$y(\text{km})$	$z(\text{km})$	$P(\text{km})$
水星	1.66013×10^{-7}	0.996194	-1.500065	76547	76536	73470	72598	112381
金星	2.44783×10^{-6}	0.990682	-1.50039	350212	350143	336194	332214	615994
地球	3.003481×10^{-6}	0.9900266	-1.500445	518474	518377	497740	491849	924646
火星	3.323682×10^{-7}	0.9952045	-1.500103	379840	379803	364603	360274	577300
木星	9.538753×10^{-4}	0.9323603	-1.51938	18150881	18126556	17445582	17246837	48196700
土星	2.857551×10^{-4}	0.9547456	-1.508911	22468556	22447903	21585225	21335697	54544500
天王星	4.372540×10^{-5}	0.9757294	-1.502612	24322892	24310645	23356453	23082657	52039555
海王星	5.177323×10^{-5}	0.9743302	-1.50292	40198845	40177467	38602713	38150586	87011298
冥王星	3.333332×10^{-7}	0.9951998	-1.50010	9946822	9945808	9547322	9434355	15301117

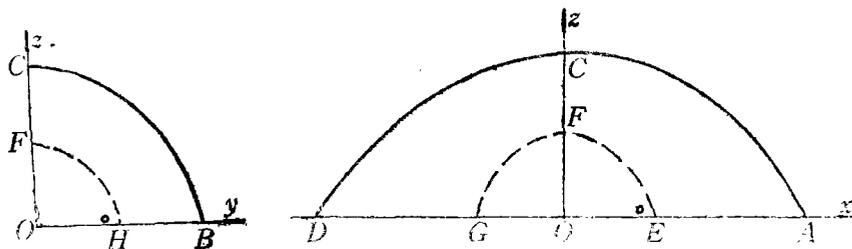


图 3

参 考 文 献

[1] 汪家诩，为什么在太阳系中至今尚未找到一颗逆行行星，应用数学和力学，11，5（1990），391—398。
 [2] Smart, W. M., *Celestial Mechanics* (1953), 21.

[3] 《中国大百科全书·天文学》(1980), 529.

[4] Ehricke, Krafft A., *Space Flight*, 1 (1960), 124.

Why Can the Major Planets Have Their Satellites Moving in Direct and Retrograde Orbits As Well?

Wong Chia-ho

(*Zhejiang University, Hangzhou*)

Abstract

Now we use the Jacobian integral of circular restricted three-body problem to establish a testing function of the stability of satellites. This method of criterion may be applied to the stability problem of satellites when the six elements of the instantaneous orbit of the satellite with respect to its parent planet are known.

By means of an electronic computer, we can find the stable region of a satellite with a quasi-circular orbit. The boundary surface of this region is a nearly oblate ellipsoid. The volume of this enclosed space is much smaller than that of binding by Hill surface and that of "sphere of action".

As the expressions of relative kinetic energy of a satellite with respect to its parent planet have the same form for the direct as well as the retrograde orbits, they can coexist in the same region at the same time.

Key words osculating ellipse, elements of the orbit, the sphere of action, quasi-circular orbit