

计算力学中的静力衰减*

武建勋

(中国矿业大学建筑系, 1989年8月4日收到)

摘要

本文在计算力学范围内证明了, 平衡力系的影响, 由近及远按矩阵连分式的规律衰减。该衰减往往不慢于, 但并非总是不慢于指数衰减或幂次衰减。本文结果可用于估计某些简化假定在计算中引入的误差。

关键词 矩阵连分式 静力衰减 圣文南原理 矩阵结构分析 子结构 超单元 链式模型

一、引言

建筑物基底压力分布较复杂, 设计时常近似按均布或线性分布计算。假定的与实际的基底压力之差, 为合力与合力矩均为零的平衡力系(图1)。该假定的误差相当于该平衡力系在地基中的影响及其反作用力系在上部结构中的影响。

圣文南原理保证上述影响在稍远的区域内即可忽略, 实际上不可忽略的范围达十几或几十米, 所以本课题得不到圣文南原理的帮助。我们将平衡力系在弹性体中的影响由近及远逐渐减弱的现象叫作“静力衰减”, 以有别于振动衰减。本文并不讨论一般弹性体, 而只针对业已按结构力学或有限元法的要求进行了离散化, 可以用矩阵加以处理的线弹性计算模型进行讨论, 此时结构自重及初应力、温度应力等均略而不计。

文献[1][2]综述了弹性连续体中静力衰减的一些主要成果: Zanaboni 证明了平衡力系的影响由近及远单调递减; Mises 证明了平衡力系的影响与作用区域直径的某一幂次成比例; Horgan, Knowbs, Sternberg, Naghdi 等分别针对柱、板、壳、楔、半无限空间与半无限平面等证明了圣文南原理的适用性(指数衰减或幂次衰减在这里成立)。

橘英三郎^[3]证明了 Zanaboni 的结论对离散化的计算模型也成立, 堤一教授与笔者^{[4][5]}发现离散化计算模型中的静力衰减一般地服从连分式的衰减规律, 并找出了圣文南原理的传统提法不成立的反例。本文将进一步证明该静力衰减受一种完全由结构型决定而与外力无关的“矩阵连分式”控制。矩阵连分式是一种新的数学形式, 由本文首次提出, 它是连分数的推广, 从思路上来说, 则只不过是“逐步扩大子程序法”, 由递推式化为显式而已。

* 陈至达推荐。

二、链式模型与矩阵连分式

若弹性体表面一小域上作用一个平衡力系，用有限元或结构力学的方法将弹性体划分成单元，再把单元分成组，构成由力系作用区域顺序通向远方的子结构链（图2），叫链式模

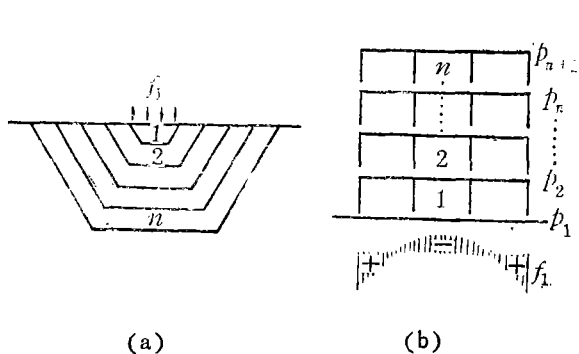


图1 平衡力系作用于子结构

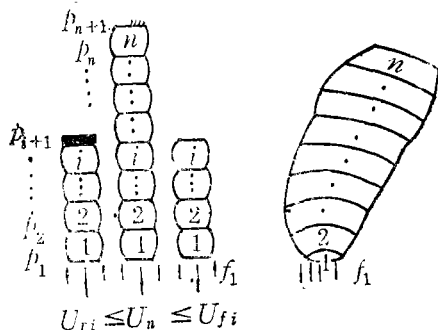


图2 链式模型

型。各子结构叫作环节。由近及远的顺序编号，从1到 n ， n 为环节数。平衡力系 $\{f_i\}$ 的作用节点组 $\{p_1\}$ 均在第一环节上， $\{p_1\}$ 叫链式模型的近端。在第 n 环节上选取适当的节点组 $\{p_{n+1}\}$ ，叫作远端。远端常是自由的，但也允许固定的或弹性支持或其它理想支持的。第 $i-1$ 环节与第 i 环节以节点组 $\{p_i\}$ ($i=2, 3, \dots, n$)相联结， $\{p_i\}$ ($i=1, 2, \dots, n+1$)上节点力为 $\{f_i\}$ ，节点变位为 $\{u_i\}$ 。 $\{f_i\}$ 与 $\{u_i\}$ 正向相同，第 i 环节受到作用力 $\{f_i\}$ ，第 $i-1$ 环节受到反作用力 $-\{f_i\}$ 。根据子结构的理论，环节内部及外部一些无关的节点可以先行消去⁽⁹⁾，则对于各环节可建立下列线性关系：

$$\{u_i\} = [S'_{1i}]\{f_i\} - (S'_{2i})\{f_{i+1}\}, \quad \{u'_{i+1}\} = (S'_{3i})\{f_i\} - [S'_{4i}]\{f_{i+1}\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

这里 $[S'_{1i}]$ ， (S'_{2i}) ， (S'_{3i}) ， $[S'_{4i}]$ 为第 i 环节的结构柔性矩阵，是常数矩阵。方括号 $[]$ 表示正方矩阵，圆括号 $()$ 则允许是长方矩阵。 (S'_{2i}) 与 (S'_{3i}) 互为转置矩阵。四个柔度矩阵可以合成一个对称正方矩阵

$$[S'_i] = \begin{bmatrix} [S'_{1i}] & (S'_{2i}) \\ (S'_{3i}) & [S'_{4i}] \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.2)$$

由于本课题不关心外界的理想支持，关于每个环节的简图仿佛浮在空中，节点变位 $\{u_i\}$ 或 $\{u'_{i+1}\}$ 上可叠加任何刚体位移成份而不致破坏该环节的平衡，这时 $[S'_i]$ 是不满秩的。但由于刚体位移对应力、应变、变形能等均无影响，所以与本课题无关，可以与相对变位分开另行处理或略去，也可在环节上添加假想约束予以限制，这样处理后，除了环节为几何不定或多块不连通域等情况外，节点力和节点变位可以彼此唯一确定， $[S'_i]$ 就化为正定的，满秩的。

为简化书写，我们用大写字母 U ， W 表示能量和功，其它大写拉丁字母 (S, C, A, B, \dots) 表示矩阵，小写拉丁字母 (f, u, \dots) 表示向量，希腊字母表示标量。并以上标或下标作细微的区别。经以上处理式(2.1)化为

$$u_i = S_{1i}f_i - S_{2i}f_{i+1}, \quad u_{i+1} = S_{3i}f_i - S_{4i}f_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

这里, S_{1i} , S_{4i} 对称正定, S_{2i} 与 S_{3i} 互为转置

$$S_{2i} = S_{3i}^T \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

式(2.3)中的负号由反作用力系 $-f_{i+1}$ 带来, u_i 与 f_i 间也成立线性关系

$$u_i = S_i^* f_i \quad (i=1, 2, \dots, n+1) \quad (2.5)$$

当 $i=1, 2, \dots, n$ 时 S_i^* 为对称正定的, S_{n+1}^* 可以是正定的, 也可以是 $[0]$ 或 $[\infty]$ (当 p_{n+1} 为固定, $u_{n+1} = \{0\}$ 或 p_{n+1} 为自由, $f_{n+1} = \{0\}$ 时), $[0]$ 的全部元素为零, $[\infty]$ 的对角元均为 ∞ 且有 $[\infty]^{-1} = [0]$.

将 $u_{i+1} = S_{i+1}^* f_{i+1}$ 代入(2.3)并消去 f_{i+1} 得

$$u_i = [S_{1i} - S_{2i} [S_{4i} + S_{i+1}^*]^{-1} S_{3i}] f_i = S_i^* f_i$$

即

$$S_i^* = S_{1i} - S_{2i} [S_{4i} + S_{i+1}^*]^{-1} S_{3i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.6)$$

引入下列矩阵分数

$$1/A = A^{-1}, \quad A \cdot C/B = AB^{-1}C \quad (2.7)$$

则式(2.6)化为,

$$S_i^* = S_{1i} - S_{2i} \cdot S_{3i} / (S_{4i} + S_{i+1}^*) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.8)$$

反复使用式(2.8)得如下的矩阵连分式

$$S_1^* = S_{11} - \frac{S_{21} \cdot S_{31}}{S_{41} + S_{12} - \frac{S_{22} \cdot S_{32}}{S_{42} + S_{13} - \dots - \frac{S_{2n} \cdot S_{3n}}{S_{4n} + S_{n+1}^*}} \quad (2.9)$$

S_i^* 叫作端柔度矩阵, 是式(2.9)右侧的矩阵连分式的值矩阵. 等式右侧包括了全部 $4n$ 个柔度矩阵与一个远端边界条件矩阵 S_{n+1}^* , 且与外力无关, 是结构的本征数学式. 式中每个连分式节

$$\dots + S_{1i} - \frac{S_{2i} \cdot S_{3i}}{S_{4i} + \dots} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.10)$$

恰与它所代表的环节顺序一致, 形式整齐, 关系明确.

从 p_{i+1} 切取包括环节 $1 \sim i$ 的一截, 并让切开点自由 ($f_{i+1} = \{0\}$) 或固定 ($u_{i+1} = \{0\}$) (见图 2), 分别求得相应的端柔度矩阵为

$$\left. \begin{aligned} {}_{f,i}S_1^* &= S_{11} - \frac{S_{21} \cdot S_{31}}{S_{41} + S_{12} - \dots - \frac{S_{2,t-1} \cdot S_{3,t-1}}{S_{4,t-1} + S_{1t}}} \\ {}_{r,i}S_1^* &= S_{11} - \frac{S_{21} \cdot S_{31}}{S_{41} + S_{12} - \dots - \frac{S_{2i} \cdot S_{3i}}{S_{4i}}} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

这里, 左下标 f, r 分别表示切开点自由或固定, 右下标 1 与左下标 i 表示包括环节 $1 \sim i$, 式(2.11)的两式分别为式(2.9)中从 S_{11} 到 S_{1i} 或 S_{4i} 的前一段, 叫作矩阵连分式(2.9)的近似连分式.

式(2.9)中“+”“-”号相间，可以改写成都是“+”号如下。先将(2.3)改写为

$$u_i = C_{1i}f_i + C_{2i}u_{i+1}, \quad f_{i+1} = C_{3i}f_i - C_{4i}u_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.12)$$

这里 C_{1i} , C_{4i} 对称正定, C_{2i} 与 C_{3i} 互为转置

$$\left. \begin{aligned} C_{1i} &= S_{1i} - S_{2i}S_{4i}^{-1}S_{3i}, & C_{2i} &= S_{2i}S_{4i}^{-1} \\ C_{3i} &= S_{4i}^{-1}S_{3i} = C_{2i}^T, & C_{4i} &= S_{4i}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.13)$$

将 $f_{i+1} = S_{4i}^{-1}u_{i+1}$ 代入式(2.12)再消去 u_{i+1} 得

$$S_i^* = C_{1i} + \frac{C_{2i} \cdot C_{3i}}{C_{4i} + \frac{1}{S_{i+1}^*}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.14)$$

反复使用式(2.14)得

$$S_1^* = C_{11} + \frac{C_{21} \cdot C_{31}}{C_{41} + \frac{1}{C_{12} + \frac{C_{22} \cdot C_{32}}{C_{42} + \dots + \frac{1}{S_{n+1}^*}}}} \quad (2.15)$$

式(2.15)中已没有负号。为下面推导，再引入两个不苛刻的假定

1. 假定 C_{2i} , C_{3i} 是正方的且与 C_{1i} , C_{4i} 同阶。
2. 假定 C_{2i} , C_{3i} 满秩，可求逆。

前一条只要划分有限元时注意即可保证，后一条对连续体总成立，仅对组合构件有时不成立。若能引入广义求逆的概念则估计这两个假定也可以取消。

如果 C_{2i} , C_{3i} 可以求逆，则式(2.15)可化为下列形式的简化连式分：

$$S_1^* = A_1 + \frac{1}{A_2 + \frac{1}{A_3 + \dots + \frac{1}{A_{2n+1}}}} \quad (2.16)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= C_{11}, \\ A_3 &= C_{21} \cdot C_{12} \cdot C_{31}, & A_2 &= \left[\frac{C_{21} \cdot C_{31}}{C_{41}} \right]^{-1} \\ A_5 &= C_{21}C_{22} \cdot C_{13} \cdot C_{32}C_{31}, & A_4 &= \left[\frac{C_{21}C_{22} \cdot C_{32}C_{31}}{C_{42}} \right]^{-1} \\ A_{2i+1} &= Z_i \cdot C_{1, i+1} \cdot Z_i^T, & A_{2i} &= \left[\frac{Z_i \cdot Z_i^T}{C_{4i}} \right]^{-1} \\ & & & (i=1, 2, \dots, n-1) \\ A_{2n+1} &= Z_n \cdot S_{n+1}^* \cdot Z_n^T, & A_{2n} &= \left[\frac{Z_n \cdot Z_n^T}{C_{4n}} \right]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

这里

$$Z_i = \prod_{j=1}^i C_{2j} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.18)$$

上列 $A_i (i=1, 2, 3, \dots, 2n)$ 一般对称正定且阶数相同, 只有 A_{2n+1} 可能为 $[0]$ 或 $[\infty]$, 但也可能正定. 矩阵连分式中允许分母为 $[0]$, 只要 $[0]^{-1} = [\infty]$.

式(2.16)的近似连分式与式(2.11)对应

$$\begin{aligned} G_1 &= r_1 S_1^* = A_1 \\ G_2 &= f_1 S_1^* = A_1 + \frac{1}{A_2} \\ G_3 &= r_2 S_1^* = A_1 + \frac{1}{A_2 + \frac{1}{A_3}} \\ G_4 &= f_2 S_1^* = A_1 + \frac{1}{A_2 + \frac{1}{A_3 + \frac{1}{A_4}}} \\ &\vdots \\ G_{2n+1} &= S_1^* = A_1 + \frac{1}{A_2 + \frac{1}{A_3 + \dots + \frac{1}{A_{2n+1}}}} \end{aligned} \quad (2.19)$$

本课题已化为关于简化矩阵连分式的数学问题.

三、矩阵连分式的性质

以下不加证明地介绍一些简化矩阵连分式(2.16)的数学性质, 直接代入可证实这些关系的正确性.

a) $G_i = Q_i^{-1} P_i \quad (i=1, 2, \dots, 2n+1) \quad (3.1)$

这里

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= E \quad (E \text{ 为单位矩阵}), & P_1 &= A_1 \\ Q_2 &= A_2, & P_2 &= A_2 A_1 + E \\ Q_i &= A_i Q_{i-1} + Q_{i-2}, & P_i &= A_i P_{i-1} + P_{i-2} \end{aligned} \right\} \quad (i=3, 4, \dots, 2n+1) \quad (3.2)$$

b) 取

$$B_i = \frac{1}{Q_{i-1}^T Q_i} \quad (i=2, 3, \dots, 2n+1) \quad (3.3)$$

则 B_i 一般对称正定, 只有当 $A_{2n+1} = [\infty]$ 时 $B_{2n+1} = [0]$ 不正定是个例外.

c) $S_1^* = A_1 + B_2 - B_3 + B_4 - B_5 + B_6 - \dots - B_{2n+1} = A_1 + \sum_{j=2}^{2n+1} (-1)^j B_j \quad (3.4)$

$$G_1 = A_1$$

$$G_i = A_1 + \sum_{j=2}^i (-1)^j B_j \quad (i=2, 3, \dots, 2n+1) \quad (3.5)$$

$$G_i - G_{i-1} = (-1)^i B_i \quad (i=2, 3, \dots, 2n+1) \quad (3.6)$$

定义 如果 A, B 为同阶正 方矩阵且差矩阵 $C = A - B$ 对称正定, 则认为 A 大于 B 或 B 小于 A , 记作

$$A > B, \quad \text{或} \quad B < A$$

如果 C 非负定, 则记作

$$A \geq B, \quad \text{或} \quad B \leq A$$

使用上列矩阵不等号可得上列评价:

$$d) \quad B_i > B_{i+1} \quad (i=2, 3, \dots, 2n-1) \quad (3.7)$$

$$B_{2n} \begin{cases} = B_{2n+1} & \text{当 } A_{2n+1} = [0] \\ > B_{2n+1} = [0] & \text{当 } A_{2n+1} = [\infty] \\ > B_{2n+1} & \text{其它} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$e) \quad \left. \begin{aligned} G_1 < G_3 < G_5 < \dots < G_{2n-1} \leq G_{2n+1} = S_1^* \\ G_2 > G_4 > G_6 > \dots > G_{2n} \geq G_{2n+1} = S_1^* \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

f) B_{i+1} 可用来估计 G_i 的截断误差

$$B_{2m} \geq S_1^* - G_{2m-1} \geq [0], \quad B_{2m+1} \geq G_{2m} - S_1^* \geq [0] \quad (m=1, 2, \dots, n) \quad (3.10)$$

四、无限矩阵连分式

当 $n \rightarrow \infty$, 简化矩阵连分式(2.16)化为无限矩阵连分式

$$S_1^* = A_1 + \frac{1}{A_2 + \frac{1}{A_3 + \dots}} \quad (4.1)$$

无限矩阵连分式没有远端, 也没有远端边界条件, 但有下列性质成立:

g) G_{2t} 与 G_{2t-1} 系列各自有极限矩阵

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_{2t} = G^{(u)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} G_{2t-1} = G^{(d)} \quad (4.2)$$

由式(3.9)推知 $G^{(u)} \geq G^{(d)}$. 若 $G^{(u)} = G^{(d)}$, 则该连分式 S_1^* 有确定的极限矩阵, 因而是收敛的, 由式(3.5)知此时 $\lim_{t \rightarrow \infty} B_t = [0]$. 若 $G^{(u)} > G^{(d)}$, 则近似连分式在两个极限矩阵之间摆来摆去没有确定的值矩阵, 因而是发散的, 此时 $\lim_{t \rightarrow \infty} B_t \neq [0]$.

将矩阵 A_i 的范数记作 $\|A_i\|$, 并定义“逆范数”: $\underline{\|A_i\|} = 1/\|A_i^{-1}\|$, 可得收敛性的判据如下:

h) 若和式 $\sum_{i=2}^{\infty} \|A_i\|$ 收敛, 则无限连分式(4.1)发散.

i) 若对于一切 $i \neq j$ 且 $i, j = 1, 2, \dots$ 有 $A_i A_j = A_j A_i$, 并且和式 $\sum_{i=2}^{\infty} \overline{A}_i$ 发散, 则式(4.1)收敛。

可见收敛与否的矩阵连分式都是客观存在的。

当所有的 A_i 都相同, $A_i = A (i = 1, 2, \dots)$ 时, 式(4.1)化为

$$X = S_1^* = A + \frac{1}{A + \frac{1}{A + \dots}} \quad (4.3)$$

显然 $X = A + 1/X$, 所以可推得

$$X = (1/2)(\sqrt{A^2 + 4E} + A) > E \quad (4.4)$$

并有

$$\left. \begin{aligned} Q_i &= (\sqrt{A^2 + 4E})^{-1} [X^i - (-X)^{-i}] \\ P_i &= (\sqrt{A^2 + 4E})^{-1} [X^{i+1} - (-X)^{-(i+1)}] = Q_{i+1} \\ G_i &= Q_i^{-1} P_i = X [E - (-1)^i X^{-2i}]^{-1} [E - (-1)^{i+1} X^{-2(i+1)}] \\ B_i &= [A^2 + 4E] \cdot \frac{1}{[X^{i-1} - (-1)^{i-1} X^{-i+1}]^T [X^i - (-1)^i X^{-i}]} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

($i = 1, 2, 3, \dots$)

由于 $X > E$, 当 i 很大时 $X^{-i} \approx [0]$, 于是

$$G_i \approx X, \quad B_i \approx [A^2 + 4E] X^{-2i+1} \quad (i \gg 1) \quad (4.6)$$

矩阵连分式可化为等效的矩阵交项级数(3.4)所以

j) 当 i 很大时, 矩阵无限连分式(4.3)趋于一种针对环节序数的指数收敛。

下节将说明, B_i 的递减规律既决定了连分式的收敛规律, 又决定了平衡力系影响的衰减规律, 性质j)中的连分式的指数收敛意味着在这种结构中平衡力系 f_1 的影响呈指数衰减。

性质j)不切实用, 对实际问题可以证明:

k) 若组成链式模型的各环节有相同的柔度矩阵, 则该链式模型中的静力衰减在若干环节之后渐近地逼近一种对于环节序数的指数衰减^[5]。

推论 若链式模型各环节的柔度矩阵有正定的上下界, 则在此结构中的静力衰减不慢于某个对环节序数的指数衰减。

在半无限空间和半无限平面中, 对环节序数的指数衰减可化为对距离 d 的幂次 (d^a) 衰减。

上述推论对工程问题已经够用, 性质k)实际上适用于文献[2]中记载的全部成果的复盖域, 并有所扩大和发展, 但只在计算模型中得到了证明。

五、矩阵连分式和圣文南原理

f_1 作用于 p_1 使结构发生变形, p_1 上的变位为 $u_1 = S_1^* f_1$, 变形能为 U_n :

$$U_n = 0.5 f_1^T S_1^* f_1 \quad (5.1)$$

如果从 p_{i+1} 切取包括环节 $1 \sim i$ 的一段并让切开点自由 ($f_{i+1} = \{0\}$) 或固定 ($u_{i+1} = \{0\}$),

保持 f_1 仍作用于 p_1 节点组可分别得到两个变形能 (图2)

$$U_{f_1} = 0.5 f_1^T G_{2i} f_1, \quad U_{r_1} = 0.5 f_1^T G_{2i-1} f_1 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5.2)$$

f_1 分别作用在上述两个部分结构上, 一个部分结构 p_{i+1} 节点上节点力为零 ($f'_{i+1} = \{0\}$) 而节点变位为 u'_{i+1} ; 另一个部分结构上则是 p_{i+1} 上节点力为 f''_{i+1} 而节点变位为零 ($u''_{i+1} = \{0\}$). 定义 W_i 为 f'_{i+1} 在 u''_{i+1} 上作的功

$$W_i = 0.5 f_{i+1}'^T u''_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5.3)$$

可以证明

$$\begin{aligned} W_i &= U_{f_1} - U_{r_1} = 0.5 f_1^T (G_{2i} - G_{2i-1}) f_1 \\ &= 0.5 f_1^T B_{2i} f_1 \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (5.4)$$

f_1 作用于全结构上使 p_{i+1} 节点发生变位 u_{i+1} 和节点力 f_{i+1} , 记 f_{i+1} 在 u_{i+1} 上作的功为 \bar{W}_i .

$$\bar{W}_i = 0.5 f_{i+1}^T u_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5.5)$$

Zanaboni 所采用的截面衰减指标实际上就是 \bar{W}_i . 可以证明

$$W_i \geq \bar{W}_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5.6)$$

圣文南原理要求 \bar{W}_i 在一段距离之外便趋于零, 而只要相应的 B_i 趋于 $[0]$ 便可保证 W_i 在同一位置也趋于零, 那么由式(5.6)保证 \bar{W}_i 也趋于零, 从而 f_{i+1} 和 u_{i+1} 也接近于零. 静力衰减可以由 \bar{W}_i 的衰减来表达, 又可以由 B_{2i} 系列或 B_i 系列的衰减而得到保证. 反之, 若 \bar{W}_i 接近于零, 则 p_{i+1} 受到的扰动也接近于零, 所以让 p_{i+1} 自由还是固定将不会造成很大区别, 由式(5.4)保证 W_i 也接近于零且 $B_i \approx [0]$.

所以, 静力衰减的性质本质上体现为 B_i 系列的衰减性质, 或矩阵连分式的收敛性.

由性质 j), k) 知很多实用结构静力衰减很快, 但性质 h) 又保证了不收敛的矩阵连分式确实客观存在. 图3为堤一与笔者在文献[4]中提出的反例. 该结构对应一维端柔度系数

$$T_1 = S_1^* = \alpha_1 + \frac{1}{\beta_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\beta_2 + \dots + \frac{1}{\alpha_{n+1}}}}} \quad (5.7)$$

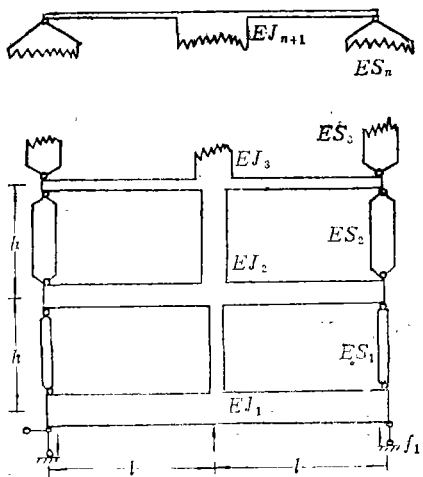


图3 圣文南结构的反例

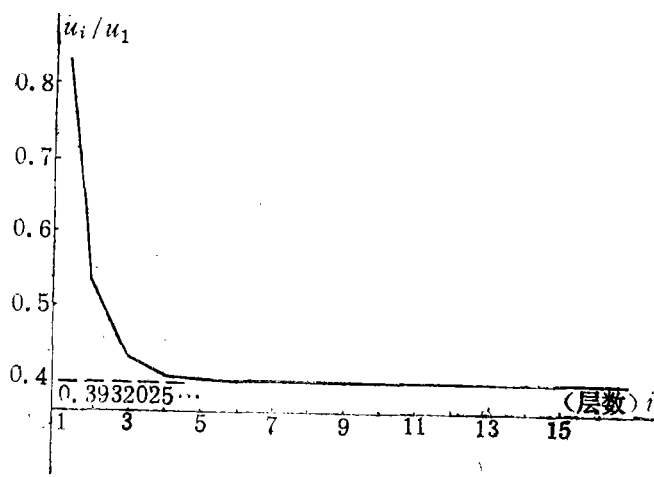


图4 梁的挠度趋于非零极限

这里 $\alpha_i = 3EJ_i/l^3$, $\beta_i = 3h/(ES_i)$, E 为杨氏模量, J_i 为第 i 层梁截面惯矩, l 为梁跨度, h 为层高, S_i 为第 i 层每根柱的横截面积。由性质 h , i) 知若 $n \rightarrow \infty$, 当 $\Sigma(\alpha_i + \beta_i)$ 发散时连分数 (5.7) 收敛, 当 $\Sigma(\alpha_i + \beta_i)$ 收敛时连分数 (5.7) 发散, 连分数发散时圣文南原理便不成立。取 $\alpha_i = 0.5^{i-1}$, $\beta_i = 0.5^{i-1}$ 式 (5.7) 即发散, 该结构各层梁挠度 u_i 与第一根梁挠度 u_1 的比值 u_i/u_1 随层数 i 趋于非零极限 $0.3932025 \dots$ (图4)。该反例引起行家们极大兴趣。性质 k , i) 给出了相应的条件。

六、结 论

弹性体表面小域中作用平衡力系的课题在离散化计算模型中可用矩阵连分式加以描述, 连分式的收敛决定了静力衰减的速度。在常用结构中静力衰减往往不慢于指数衰减或幂次衰减。

但在某些不太实用或仅在理论上成立的结构计算模型中平衡力系的影响则衰减很慢, 甚至直到无穷远仍不衰减为零。或者说圣文南原理并非对一切弹性体一般地成立。Zanaboni 于 1937 年取得的成果^[1]可能已是沿这一方向所能取得的最好结果, 以后一直未能进一步取得进展是因为实际上已不可能证明得更多了。

在计算平衡力系对弹性体影响时可以截取一部分结构进行计算, 误差可用式 (3.10) 进行估计。非平衡力系的计算是否可以截取部分结构进行尚待进一步研究。

本成果对逐步扩大子程序法作显式表达, 估计对于微机运算和协同工作的计算将产生有益的影响。

本成果对于在弹性连续体中最终解决圣文南原理的证明也将提供有益的启示。

作者向曾给以热情帮助的梁武韬、陈至达、郑照北、武际可、王敏中、王镭、华安增、王良国、陈子荫、徐芝伦等先生致以衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] Fung, Y. C., *Foundation of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey (1965), 300—309.
- [2] Horgan, C.O. and J.K. Knowles, Recent development concerning Saint-Venant's principle, *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press Inc., 23 (1983), 179—269.
- [3] 橘英三郎, Two theorems on Saint-Venant's principle in discrete structural model, 日本AIJ構造系論文報告集, 351 (1985), 55—64.
- [4] 武建勋、堤一, 離散系に關するSaint-Venantの原理の反例, 日本AIJ構造系論文報告集, 374 (1987), 57—62.
- [5] 武建勋、堤一, 同じりシクの細長ソ構造物にわける変形の相似性, 日本・宮崎大学工学部紀要, 33 (1987).
- [6] 普齐米尼斯基, J. S., 《矩阵结构分析理论》, 王德荣译校, 国防工业出版社 (1968), 157—158.

The Theory of Static Decay in Computational Mechanics

Wu Jian-xun

(China University of Mining Technology, Xuzhou)

Abstract

In this paper, a new mathematical form, matrix continued fraction (MCF) is introduced to describe the decay of effects of an equilibrant system of forces acting on a sphere of an elastic body. By this way, the famous Saint-Venant's principle is proved often but not always valid in computational mechanics.

Key words matrix continued fraction, static decay, Saint-Venant's principle, matrix structural analysis, substructure, superelement, chain model