

# 垂直管道中密相两相流动的解析解

林多敏 蔡树棠

(上海市应用数学和力学研究所, 上海工业大学) (中国科学技术大学, 上海市应用数学和力学研究所)

(1989年10月4日收到)

## 摘 要

本文依据文献[1]的密相两相流动的数学模型, 对垂直圆管中密相两相流动进行了解析求解, 分别得到了连续相和分散相的速度解析表达式. 在相间阻力与相间速度差成比例时, 除了在离管壁面很近的薄区之外, 管道流动规律与达西渗流定律完全一致. 本文验证了文献[1]的密相两相流动数学模型的假定在本文情形下是合理的.

**关键词** 密相两相流 垂直管道两相流 两相流解析解 两相流模型应用

## 一、引 言

随着两相流动各种简化的数学模型建立以来, 人们利用现代计算机得到了大量有关两相流动的数值结果, 特别是对于在石油、热能等工程中具有重要实际价值的一些两相流的管道运输系统的计算<sup>[2]</sup>. 目前, 稀相气固两相混合物的各种管道流动在运用稀相两相流动的数学模型时得到了较好的数值求解<sup>[3]</sup>; 管道中气体和液体混合物流动的流率和压降在运用工程的半经验方法时得到了计算<sup>[4]</sup>. 这些数值结果不仅加深了人们对两相流动的了解, 而且推动了两相流动数学模型的发展. 随着工业生产的不断发展, 密相两相流动的数学模型将愈来愈受到重视. 文献[1]提出了一个密相两相流动的数学模型.

两相流动的复杂性不亚于单相湍流情形, 试图得到一个两相流动的解析解是相当困难的. 本文在用文献[1]的密相两相流动数学模型讨论垂直管道两相流动中得到了密相两相流的一个解析解. 垂直管道两相流动是管道运输中的一种, 其流动模型与沸腾炉和流态化床中的冷态模型以及土工试验中的渗透试验相接近.

文献[1]的密相两相流动数学模型仍处在一个发展阶段, 欲成为一个完善的数学模型体系尚有许多工作要做. 本文依据文献[1]提出的密相两相流动过程的封闭数学模型, 把连续相和分散相都分别看作连续介质, 具体分析了垂直圆管中密相两相流动情形, 得到了一个解析流动, 验证了文献[1]的密相两相流数学模型的假定的合理性.

## 二、垂直圆管的密相两相流动问题

### 2.1 密相两相流动的数学模型

文献[1]提出的密相两相流动数学模型在无相变、连续相和分散相的密度都与压力无关且无传热的条件下可以表示为以下的封闭方程组:

运动方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_c \alpha_c V_{ci}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_c \alpha_c V_{ci} V_{cj}) = \rho_c \alpha_c g_i - \frac{\partial p_c}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{cij}}{\partial x_j} + F_{dci} \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_d \alpha_d V_{di}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_d \alpha_d V_{di} V_{dj}) = \rho_d \alpha_d g_i - \frac{\partial p_d}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{dij}}{\partial x_j} + F_{ddi} \quad (2.1b)$$

本构关系式

$$\sigma_{cij} = \mu_c \left( \frac{\partial V_{ci}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{cj}}{\partial x_i} \right) + \left( K_c - \frac{2}{3} \mu_c \right) \frac{\partial V_{ca}}{\partial x_a} \delta_{ij} \quad (2.2a)$$

$$\sigma_{dij} = \mu_d \left( \frac{\partial V_{di}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{dj}}{\partial x_i} \right) + \left( K_d - \frac{2}{3} \mu_d \right) \frac{\partial V_{da}}{\partial x_a} \delta_{ij} + \eta P_d \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon} \quad (2.2b)$$

其中

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{\partial V_{di}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{dj}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_{da}}{\partial x_a} \delta_{ij} \right) + \beta \left( \frac{\partial V_{da}}{\partial x_a} \right) \delta_{ij} \quad (2.3a)$$

$$\varepsilon = \left[ \left( \frac{\partial V_{di}}{\partial x_j} + \frac{\partial V_{dj}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial V_{da}}{\partial x_a} \delta_{ij} \right)^2 + 3\beta^2 \left( \frac{\partial V_{da}}{\partial x_a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2.3b)$$

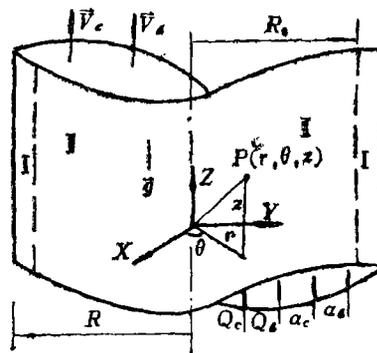
相间作用力

$$F_{ddi} = -F_{dci} = \alpha_d \left( \mu_c \nabla^2 V_{ci} - \frac{\partial p_c}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} k_1 \rho_c \alpha_d \left( \frac{dV_{ci}}{dt} - \frac{dV_{di}}{dt} \right) + \frac{3}{4} k_2 \alpha_d \mu_c \nabla^2 V_{ci} + \alpha_d \rho_c R_i \quad (2.4)$$

以上各式中符号说明参见文献[1].

### 2.2 问题的提出和简化

我们考虑一个垂直于地面安装的无穷长圆管中的密相两相流动问题。如图1所示,在这个流动中连续相和分散相各自的流量 $Q_c$ 和 $Q_d$ ,分散相在壁面处的剪应力 $\tau_w$ 以及分散相与壁面的摩擦系数 $\eta'$ 和碰撞恢复系数 $e'$ 是确定的。我们假设:(i)流动载体为不可压缩流体,(ii)流动中所有的物理参数都和温度无关,即在误差允许的范围内整个流动的温度是均匀的,(iii)流动是轴对称的,各相速度分量只有轴向分量 $V_{ci}$ 和 $V_{di}$ ,其它速度分量 $V_{d\theta}$ ,  $V_{dr}$ ,  $V_{c\theta}$ 和 $V_{cr}$ 皆为零;除了连续相的压力 $p_c$ 之外,所有的物理量皆为径向半径 $r$ 的函数;(iv)流动是无相变的。



区域 I 为宾汉区, 区域 II 为塞流区,

重力加速度 $\bar{g}$ ,  $\alpha_c + \alpha_d = 1$

图1 垂直圆管密相两相流动示意图

因为我们考虑的分散相颗粒是微小的,所以在流动时分散相颗粒具有一定的扩散作用(包括布朗运动等因素在内)。根据斐克(Fick)定律或分子运动理论<sup>[5]</sup>,在恒温扩散过程中两种分子的相对速度和分子的浓度梯度成正比。由我们的假定可知,流动中 $V_{cr}=V_{dr}=0$ ,即 $V_{or}-V_{dr}=0$ 。于是分散相颗粒沿管径 $r$ 方向的浓度梯度为零,从而在圆管整个截面上单位体积中分散相颗粒的数目在流动中不变, $\alpha_d$ 为常数。因为 $\alpha_c=1-\alpha_d$ ,所以,在整个流动截面上 $\alpha_c$ 也是常数。

对于分散相来说,因为宾汉流体应力特性的限制,其剪应力的绝对值不能小于极限应力 $\tau_B$ ,所以,在圆管的中心部分( $0 \leq r \leq R_0$ )会产生一个匀速运动的区域。这个区域通常被称为塞流区,因为它像一个瓶子那样作整体运动。在塞流区里,分散相的剪应力正如通常的摩擦力小于最大极限摩擦力那样小于极限剪应力 $\tau_B$ 。这个剪应力在圆管中心轴线上为零。在圆管的壁面附近( $R_0 \leq r \leq R$ )是宾汉区。在宾汉区和塞流区的分界面( $r=R_0$ )上,分散相的速度梯度为零,即 $dV_d/dr=0$ 。设分界面离中心轴线之距为 $R_0$ , $R_0$ 的大小由 $dV_d/dr=0$ 来确定。根据以上讨论可设在塞流区里分散相的速度为常数 $V_0$ ,在宾汉区里,分散相的剪应力为

$$\tau = -\tau_B + \mu_d dV_d/dr \quad (2.5)$$

依据颗粒在湍流场中的扩散和弥散规律<sup>[6]</sup>可知,在湍流场中颗粒与流体质点之间的相互作用,一方面产生附加湍流脉动,从而增加了湍流动能的耗散,另一方面又由于湍流动能耗散的增加,使流体中湍流衰减得更快。当颗粒为特别高浓度时,流体中湍流脉动几乎全部衰减掉,出现所谓“冻结”现象。由此可知,密相两相流动较稀相两相流动更加难以形成湍流。本文暂讨论连续相层流——分散相层流的密相两相流动状态。

综上所述,垂直圆管密相两相流动的封闭方程组及其定解条件可以写成

$$-\alpha_c \rho_c g + \alpha_c \left[ -\frac{\partial p_c}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\mu_{cr} \frac{dV_c}{dr}) \right] - \frac{3}{4} \alpha_d \mu_c k_2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_c}{dr} \right) - \alpha_d k \rho_c R_t = 0 \quad (2.6a)$$

$$-\alpha_d \rho_d g + \alpha_d \left[ -\frac{\partial p_d}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\mu_{dr} \frac{dV_d}{dr}) \right] + \frac{3}{4} \alpha_d \mu_c k_2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_c}{dr} \right) + \alpha_d k \rho_c R_t + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \sigma_{drz}) = 0 \quad (2.6b)$$

$$\text{塞流区}(r \leq R_0): \quad V_d = V_0 \quad (2.7a)$$

$$\text{宾汉区}(R_0 \leq r \leq R): \quad \sigma_{drz} = \mu_d dV_d/dr - \eta P_d \quad (2.7b)$$

交界面处( $r=R_0$ ):

$$(i) \quad \text{速度连续, 即 } V_{c+} = V_{c-} \quad (2.8a)$$

$$V_{d+} = V_{d-} \quad (2.8b)$$

(ii) 速度梯度连续, 即

$$dV_{c+}/dr = dV_{c-}/dr \quad (2.9a)$$

$$dV_{d+}/dr = dV_{d-}/dr \quad (2.9b)$$

其中“+”号表示宾汉区,“-”号表示塞流区。

在管壁处( $r=R$ ):

$$V_{cR} = 0 \quad (2.10a)$$

$$\eta P_a - \mu_a dV_a/dr|_R = \tau_w \quad (2.10b)$$

将(2.6a)和(2.6b)相加后再积分, 利用在中心轴上 $\mu_o dV_o/dr$ 有界和在 $r=R_o$ 处 $\sigma_{drz}$ 连续的条件, 有

$$-\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial p_o}{\partial z} + (\alpha_o \rho_o + \alpha_a \rho_a) g \right] r + \mu_o \frac{dV_o}{dr} + \sigma_{drz} = 0 \quad (2.11)$$

至此, 方程(2.6a)和(2.7a)构成塞流区的求解方程组, 方程(2.6a)、(2.7b)和(2.11)构成宾汉区的求解方程组, 式(2.8a)~(2.10b)形成整个流动区域的定解条件.

### 2.3. 问题的求解

在相间相对速度较小的情况下, 相间阻力可以认为与相间速度差成比例, 这样, 相间阻力项 $R_i$ 有

$$4\pi\alpha^3\rho_o R_i/3 = 6\pi\mu_o\alpha(V_o - V_a) \quad (2.12)$$

我们引入无量纲参数

$$V_o^* = V_o/V_o, \quad V_a^* = V_a/V_o, \quad r^* = r/R, \quad \beta_o = [(9k\alpha_a/2)/(\alpha_o - 3k_2\alpha_a/4)]^{1/2}, \quad \xi = \beta_o r/a$$

这样塞流区的求解方程组(2.6a)和(2.7a)变为

$$\begin{cases} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dV_o^*}{d\xi} \right) - (V_o^* - V_a^*) - \frac{2}{9} \frac{\alpha_o}{\alpha_a} \frac{a^2}{k\mu_o V_o} \left( \frac{\partial p_o}{\partial z} + \rho_o g \right) = 0 & (2.13a) \\ V_o^* = 1 & (2.13b) \end{cases}$$

宾汉区的求解方程组(2.6a)、(2.7b)和(2.11)变为

$$\begin{cases} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left( \xi \frac{dV_o^*}{d\xi} \right) - (V_o^* - V_a^*) - \frac{2}{9} \frac{\alpha_o}{\alpha_a} \frac{a^2}{k\mu_o V_o} \left( \frac{\partial p_o}{\partial z} + \rho_o g \right) = 0 & (2.13a) \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial p_o}{\partial z} + (\alpha_o \rho_o + \alpha_a \rho_a) g \right] \frac{R^2}{V_o} r^* - \mu_o \frac{dV_o^*}{dr^*} = \mu_a \frac{dV_a^*}{dr^*} - \frac{R}{V_o} \eta P_a & (2.14a) \end{cases}$$

联立求解(2.13a)和(2.13b), 利用在 $r^*=0$ ,  $\xi=0$ 时,  $V_o^*(0)$ 有界的条件, 得塞流区的通解为

$$\begin{cases} V_o^* = 1 - \frac{2}{9} \frac{\alpha_o}{\alpha_a} \frac{a^2}{k\mu_o V_o} \left( \frac{\partial p_o}{\partial z} + \rho_o g \right) + CI_o(\xi) & (2.15a) \\ V_a^* = 1 & r \leq R_o & (2.13b) \end{cases}$$

其中 $C$ 为待定常数,  $I_o$ 为第一类零阶贝塞尔函数.

再联立求解(2.13a)和(2.14a), 利用常数变易法, 且令 $\xi^* = \xi \sqrt{1 + \mu_o/\mu_a}$ , 得宾汉区的通解为

$$\begin{cases} V_o^* = \frac{V_{aB}^*}{1 + \mu_o/\mu_a} + \frac{1}{4} \frac{R^2}{(\mu_o + \mu_a)V_o} \left[ \frac{\Delta p}{L} - (\alpha_o \rho_o + \alpha_a \rho_a) g \right] - \frac{R\eta P_a}{(\mu_o + \mu_a)V_o} \\ \quad + \frac{2}{9} \frac{\alpha_o}{k\alpha_a} \frac{a^2}{(\mu_o + \mu_a)V_o} \left( \frac{\Delta p}{L} - \rho_o g \right) + I_o(\xi^*) \left\{ \int_{\xi_R^*}^{\xi^*} \frac{d\xi^*}{\xi_R^* I_o^2(\xi^*) \xi^*} \right. \\ \quad \left. \cdot \int_{\xi_R^*}^{\xi^*} F(\xi^*) I_o(\xi^*) \xi^* d\xi^* + \int_{\xi_R^*}^{\xi^*} \frac{C' d\xi^*}{\xi_R^* I_o^2(\xi^*) \xi^*} + C'' \right\} & (2.16a) \\ V_a^* = V_{aB}^* - \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial p_o}{\partial z} + (\alpha_o \rho_o + \alpha_a \rho_a) g \right] \frac{R^2}{\mu_a V_o} (1 - r^{*2}) \end{cases}$$

$$-\frac{\mu_c V_c^*}{\mu_a} - \frac{R\eta P_d}{V_0 \mu_a} (1-r^*) \quad (2.16b)$$

或者

$$V_d^* = C'' - \frac{\mu_c V_c^*}{\mu_a} + \frac{R\eta P_d}{V_0 \mu_a} r^* + \frac{1}{4} \left[ \frac{\Delta p}{L} - (\alpha_c \rho_c + \alpha_d \rho_d) g \right] \frac{r^{*2} R^2}{\mu_a V_0} \quad (2.16b)'$$

其中  $V_{da}^*$  为  $V_d^*$  在管壁处的值,  $\Delta p/L = -\partial p_c/\partial z$ ,  $C'$ ,  $C''$  和  $C'''$  为积分常数,

$$F(\xi^*) = \frac{1}{1 + \mu_c/\mu_a} \left\{ \frac{1}{4} \left[ \frac{\Delta p}{L} - (\alpha_c \rho_c + \alpha_d \rho_d) g \right] \frac{a^2}{V_0 \mu_a} \frac{\xi^{*2}}{\beta^{*2}} - \frac{R\eta P_d}{V_0 \mu_a} \frac{\xi^*}{\beta^*} \right\} \quad (2.17)$$

其中  $\beta^* = \beta_0 \sqrt{1 + \mu_c/\mu_a}$ .

由此可见, 式(2.15a)和(2.16a)的自变量是不相同的. 为了在  $r=R_0$  处衔接方便, 我们可让塞流区和宾汉区的自变量保持一致. 我们直接求解方程(2.13a)可得(2.16a)的替换式, 即

$$V_c^* = 1 + \frac{2}{9} \frac{\alpha_c}{k\alpha_d} \frac{a^2}{\mu_c V_0} \left( \frac{\Delta p}{L} - \rho_c g \right) + I_0(\xi) \left\{ \int_{\xi_{R_0}}^{\xi} \frac{d\xi_1}{I_0^2(\xi_1) \xi_1} \right. \\ \left. + \int_{\xi_{R_0}}^{\xi} (1-V_d^*) I_0(\xi_2) \xi_2 d\xi_2 + \int_{\xi_{R_0}}^{\xi} \frac{C' d\xi}{I_0^2(\xi) \xi} + C'' \right\} \quad (2.18)$$

于是, 我们运用定解条件确定待定常数. 在交界处 ( $r=R_0$ ), 利用连续条件, 有

$$(i) \text{ 当 } V_{c-}^* = V_{c+}^* \text{ 时, 有 } C = C'' \quad (2.19)$$

$$(ii) \text{ 当 } dV_{c-}^*/dr^* = dV_{c+}^*/dr^* \text{ 时, 有 } C' = 0 \quad (2.20)$$

(iii) 当  $V_{da+}^* = V_{da-}^* = 1$  时, 有

$$\frac{1}{2} \phi_1 \frac{R^2 r_0^{*2}}{\mu_a V_0} - \frac{R\eta P_d}{\mu_a V_0} r_0^* + \frac{\mu_c}{\mu_a} V_{c_0}^* + 1 = C'' \quad (2.21)$$

其中  $\phi_1 = \Delta p/L - (\alpha_c \rho_c + \alpha_d \rho_d) g$ ,  $r_0^* = R_0/R$ ,  $V_{c_0}^* = V_c^*|_{r_0^*}$

(vi) 当  $dV_{da+}^*/dr^* = dV_{da-}^*/dr^* = 0$  时, 有

$$\frac{1}{2} \phi_1 \frac{R^2 r_0^{*2}}{\mu_a V_0} - \frac{R\eta P_d}{\mu_a V_0} + \frac{\mu_c}{\mu_a} \left( \frac{dV_{c_0}^*}{dr^*} \right) \Big|_{r_0^*} = 0 \quad (2.22)$$

在壁面处 ( $r=R$ ), 利用边界条件, 有

(i) 当  $V_{cR}^* = 0$  时, 有

$$C = -\frac{B_1}{I_0(\xi_R)} - \int_{\xi_0}^{\xi_R} \frac{d\xi}{I_0^2(\xi) \xi} \int_{\xi_0}^{\xi} (1-V_d^*) I_0 \xi_1 d\xi_1 \quad (2.23)$$

其中  $B_1 = 1 + \frac{2}{9} \frac{\alpha_c}{k\alpha_d} \frac{a^2}{\mu_c V_0} \left( \frac{\Delta p}{L} - \rho_c g \right)$

(ii) 当  $\tau = \tau_w$  时, 有

$$\tau_w = \eta P_d - \mu_a \left. \frac{dV_d^*}{dr^*} \right|_R \quad (2.24a)$$

或者写成

$$\tau_w = \phi_1 R/2 + \mu_c (V_0/R) (dV_c^*/dr^*)|_R \quad (2.24b)$$

根据贝塞尔函数的渐近展开式, 有

$$\text{当 } \xi \text{ 很大时, } I_0(\xi) \sim e^\xi / \sqrt{2\pi\xi} \quad (2.25)$$

将连续相速度在  $r^* = r_0^*$  处作泰勒级数展开, 有

$$V_c^* = V_{c0}^* + \left. \frac{dV_c^*}{dr^*} \right|_{r_0^*} (r^* - r_0^*) + \frac{1}{2} \left( \left. \frac{d^2V_c^*}{dr^{*2}} \right|_{r_0^*} \right) (r^* - r_0^*)^2 + \dots \quad (2.26)$$

在宾汉区运用近似式

$$\xi_0 \sqrt{1 + \frac{r^* - r_0^*}{r_0^*}} \sim \xi_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r^* - r_0^*}{r_0^*}\right) \sim \xi_0 \quad (2.27)$$

同时借助于(2.16b)', (2.21)、(2.25)和(2.26), 我们可以计算出

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{I_0^2(\xi)\xi} \int_{\xi_0}^{\xi} (1 - V_d^*) I_0 \xi_1 d\xi_1 = B_2 \frac{\exp[-\xi_R y]}{I_0(\xi_0)} \left( -y^2 - \frac{2}{\xi_R^2} + \frac{1}{\xi_R^2} \exp[-\xi_R y] + \frac{1}{\xi_R} \exp[\xi_R y] \right) \quad (2.28)$$

其中

$$y = r^* - r_0^*, \quad y_R = 1 - r_0^*, \quad \xi_R = \beta_0 R/a, \quad \xi_0 = \beta_0 R_0/a$$

$$B_2 = \frac{1}{2r_0^*} \frac{R\eta P_d}{\mu_d V_0} - \frac{1}{2r_0^*} \left( \left. \frac{dV_c^*}{dr^*} \right|_{r_0^*} \frac{\mu_0}{\mu_d} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\mu_d} \left( \left. \frac{d^2V_c^*}{dr^{*2}} \right|_{r_0^*} \right) \right)$$

由于在一般情形下,  $\mu_0 \ll \mu_d$ , 因此,  $O(\mu_0/\mu_d)$  以上量级的小量可以略去。从而整理以上所得各式, 我们就得以下的解析表达式

$$\begin{cases} r_0^* = \eta P_d / \tau_w & (2.29) \\ V_{dR}^* = 1 - \frac{1}{2} \frac{R\eta P_d}{\mu_d V_0} \left( \frac{\tau_w}{\eta P_d} + \frac{\eta P_d}{\tau_w} - 2 \right) & (2.30) \\ \Delta p / L = 2\tau_w / R + (\alpha_o \rho_o + \alpha_d \rho_d) g & (2.31) \end{cases}$$

以及各相的速度解析表达式

塞流区 ( $r \leq R_0$ )

$$\begin{cases} V_c^* = B_1 \left( 1 - \frac{I_0(\xi)}{I_0(\xi_R)} \right) - B_2 \frac{I_0(\xi)}{I_0(\xi_0)} \left( -y_R^2 \exp[-\xi_R y_R] - \frac{2 \exp[-\xi_R y_R]}{\xi_R^2} + \frac{1}{\xi_R^2} \exp[-2\xi_R y_R] + \frac{1}{\xi_R^2} \right) & (2.32) \\ V_d^* = 1 & (2.33) \end{cases}$$

宾汉区 ( $r \geq R_0$ )

$$\begin{cases} V_c^* = B_1 \left( 1 - \frac{I_0(\xi)}{I_0(\xi_R)} \right) + B_2 \left[ -y^2 - \frac{2}{\xi_R^2} + \frac{1}{\xi_R^2} \exp[-\xi_R y] + y_R^2 \exp[-\xi_R (y_R - y)] + \frac{2}{\xi_R^2} \exp[-\xi_R (y_R - y)] - \frac{1}{\xi_R^2} \exp[-\xi_R (2y_R - y)] \right] & (2.34) \\ V_d^* = V_{dR}^* - \frac{1}{2} \frac{R\eta P_d}{\mu_d V_0} (1 - r^*) \left[ 2 - \frac{1 + r^*}{r_0^*} \right] & (2.35) \end{cases}$$

各相的速度解析曲线可见图2和图3。图中的无量纲参数为  $\alpha_o = \alpha_d = 0.5$ ,  $\beta = 4$ ,  $R/a = 100$ ,  $\mu_0/\mu_d = 9.07 \times 10^{-4}$ ,  $\mu_d V_0 / \eta P_d R = 3.14 \times 10^{-3}$ ,

$$\frac{2}{9} \frac{\alpha_o}{k\alpha_d} \left( -\frac{\partial p_o}{\partial z} - \rho_o g \right) \frac{a^2}{\mu_o V_0} = 30.9$$

根据贝塞尔函数的性质, 我们可得在  $\xi$  很大时, 有

$$I_0(\xi)/I_0(\xi_R) \sim \exp[-\xi_R(1 - r^*)] \quad (2.36)$$

于是, 在塞流区,  $r^* \leq r_0^* \leq 1$ , 且  $\xi_R$  很大, 由式(2.36)可得

$$I_0(\xi)/I_0(\xi_R) \sim 0 \quad (2.37)$$

从而, 式(2.32)可近似为

$$V_c^* = 1 - \frac{2}{9} \frac{\alpha_o}{k\alpha_d} - \frac{\alpha^2}{\mu_o V_o} \left( \frac{\partial p_o}{\partial z} + \rho_o g \right) \quad (2.38a)$$

或者写成为

$$\alpha_d(V_o - V_c) = -K \partial H / \partial z \quad (2.38b)$$

其中

$$K = \frac{2}{9} \frac{\alpha_o}{k} \frac{\alpha^2 \rho_o g}{\mu_o}, \quad H = \frac{p_o}{\rho_o g} + z$$

式(2.38b)显示出 $V_o$ 代表塞流区分散相的速度，式的左边 $\alpha_d(V_o - V_c)$ 代表某一分散相截面上连续相的平均速度，即相当于连续相在分散相的渗流速度， $H$ 相当于水头， $K$ 相当于渗流系数，故，式(2.38b)代表了著名的达西渗流定律。

### 三、结 束 语

综上所述，我们得出以下结论：(i)垂直圆管中密相两相流动规律除了在离管壁面很近的薄区之外是与达西渗流定律完全一致的；(ii)式(2.38b)就是著名的达西定律，这说明文献[1]提出的密相两相流动理论体系在某些特殊条件下是可用的，其假设是合理的；(iii)这个密相两相流动的数学模型不仅适用于气固两相流动，而且对于分散相“颗粒”外形保持不变的一些两相流动也适用；(iv)至于这个数学模型能否普遍地适用，有待于更多的例子加以验证。

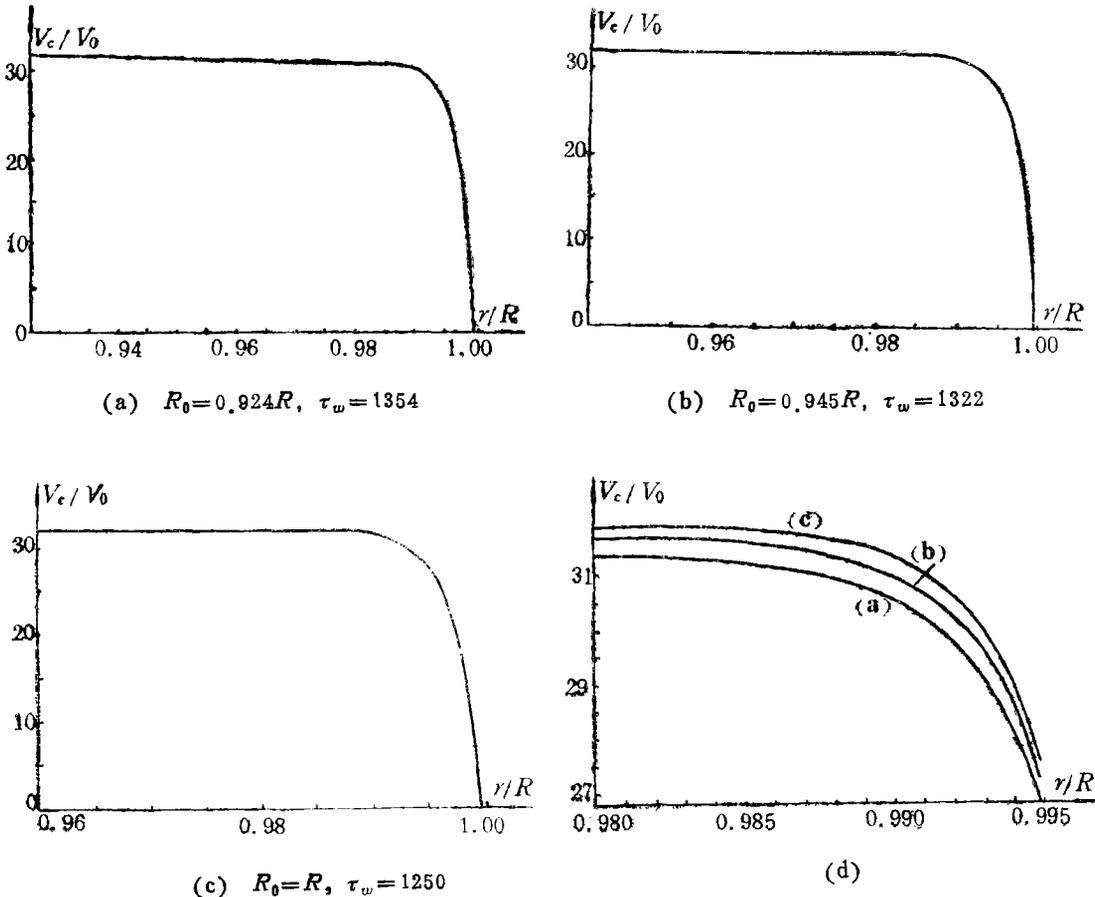


图2 连续相速度沿管径方向分布曲线

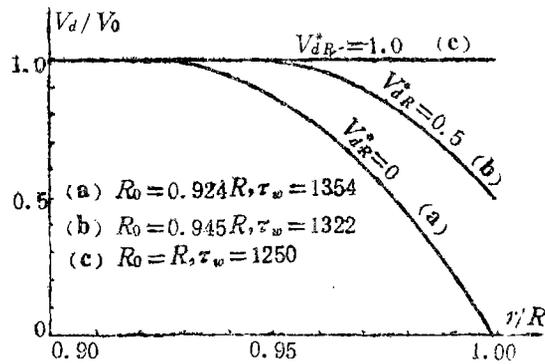


图3 分散相速度沿管径方向的分布曲线

## 参 考 文 献

- [1] 林多敏、蔡树棠, 密相两相流基本方程组的封闭性和分散相在壁面处的剪应力, 应用数学和力学, 10, 8 (1989), 649—656.
- [2] Michaelides, E. E., A model for prediction of time-average quantities in fluid-solid mixtures, *Arch. Mech.*, 36, 3 (1984), 393—405.
- [3] 范正翹、陈越南, 《多相流体力学与传热中的数值计算方法》, 浙江大学力学系, 杭州, 全国物理化学流体力学讲习班 (1984).
- [4] Pai, S. I., *Two-Phase Flow*, Vieweg (1977).
- [5] Chapman, S. and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge (1970).
- [6] Hinze, J. O., *Turbulence*, McGraw-Hill Book Company (1975).

## An Analytic Solution of Dense Two-Phase Flow in a Vertical Pipeline

Lin Duo-min

(Shanghai Inst. Appl. Math. Mech.; Shanghai University of Technology, Shanghai)

Tsai Shu-tang

(University of Science and Technology of China, Hefei; Shanghai Inst. Appl. Math. Mech., Shanghai)

### Abstract

According to a mathematical model for dense two-phase flows presented in the previous paper<sup>[1]</sup>, a dense two-phase flow in a vertical pipeline is analytically solved, and the analytic expressions of velocity of each continuous phase and dispersed phase are respectively derived. The results show that when the drag force between two phases depends linearly on their relative velocity, the relative velocity profile in the pipeline coincides with Darcy's law except for the thin layer region near the pipeline wall, and that the theoretical assumptions in the dense two-phase flow theory mentioned are reasonable.

**Key words** dense two-phase flow, vertical pipe two-phase flow, two-phase flow analytical solution, two-phase flow model application