

介质与结构三维动力相互作用分析的半解析 边界元—半解析有限元结合法*

朱建雄 曹志远 李国豪

(同济大学, 1989年12月2日收到)

摘 要

本文将半解析边界元—半解析有限元结合法用于介质与结构的动力相互作用研究。用半解析边界元法分析具有复杂地表面的半无限介质, 用半解析有限元法分析具有任意截面形状的柱体结构, 利用介质与结构交界面上的位移相容条件和力平衡条件, 将介质与结构联系起来。联立求解上述半解析边界元方程和半解析有限元方程, 对应每一时间步进, 可同时求出介质与结构交界面上的位移、速度、加速度和相互作用力以及地表面的运动情况。与目前广泛研究的边界元—有限元结合法相比, 本方法在介质与结构二个区域各降低了一维空间, 因而离散单元数和计算工作量大幅度减少, 人工输入数据非常简单。文中还考虑了地下结构的长跨比效应、厚度效应和介质效应。

关键词 结构与介质相互作用 半解析有限元 半解析边界元

一、引 言

地下结构的瞬态响应分析是一个十分复杂的问题, 这是因为地下结构埋置在岩土介质中, 三维结构与半无限岩土介质之间存在着相互耦合作用。文献[1]用积分变换法研究了平面波对无限长圆柱孔洞的散射问题, 文献[2]给出了无限长圆柱壳埋设于无限介质中并受到内压作用的瞬态响应; 文献[3]将半解析有限元法用于结构与介质的动力相互作用分析, 文献[4]用半解析边界元法研究冲击波在介质中的传播问题。文献[5]、[6]用边界元—有限元结合法研究介质与基础的动力相互作用问题。众所周知, 边界元法的特点是它很适合于解决无限介质问题, 而有限元法的优点是它很适合于解决结构非匀质、各向异性和弹塑性等复杂问题。将边界元法和有限元法结合起来求解, 往往同时兼有这二种数值计算方法的优点, 非常适合于结构与介质的动力相互作用研究。本文将探讨这一结合法的半解析化方法。

文中将介质—结构耦合系统用一组柱单元离散, 每一单元中同时包含介质(半解析边界元)和结构(半解析有限元)二部分。半解析边界元和半解析有限元都选取统一的半解析半

* 卢文达推荐。

上海市科学技术委员会资助课题。

离散试函数,保证了在介质与结构的交界面上同时满足位移相容条件和力平衡条件。由于在柱单元的环向采用Fourier级数作精确地描述,位移和面力试函数级数的收敛性好,计算精度高。进一步,为了将这种方法用于非轴对称物体的情况,本文提出了一个新的坐标变换函数。任一复杂截面形状柱体都可通过这种坐标变换映射成圆形柱体,半解析边界元-半解析有限元结合法只需对圆柱体作一维离散计算。这对三维动力相互作用问题具有很大适应性与明显优越性。

二、介质的半解析边界元法

三维弹性动力学问题的边界积分方程^[7]

$$c(\xi)u(\xi, t_F) + \int_{t_0}^{t_F} \int_S p^*(\xi, t_F; \mathbf{x}, t) u(\mathbf{x}, t) ds dt - \int_{t_0}^{t_F} \int_S u^*(\xi, t_F; \mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t) ds dt \quad (2.1)$$

式中, $u(\mathbf{x}, t)$ 和 $p(\mathbf{x}, t)$ 分别是未知的位移矢量和面力矢量。 $u^*(\xi, t_F; \mathbf{x}, t)$ 和 $p^*(\xi, t_F; \mathbf{x}, t)$ 分别是位移基本解矩阵和面力基本解矩阵。

对于轴对称物体,位移和面力试函数可分别取为半解析半离散形式

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=0}^M [L][Y_m][\psi_1\phi_1 I \quad \psi_1\phi_2 I \quad \psi_2\phi_1 I \quad \psi_2\phi_2 I] \begin{Bmatrix} u^{f-1,1} \\ u^{f-1,2} \\ u^{f,1} \\ u^{f,2} \end{Bmatrix}_m = [\phi]^T [\psi]^T \{U\} \quad (2.2)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=0}^M [L][Y_m][\psi_1\phi_1 I \quad \psi_1\phi_2 I \quad \psi_2\phi_1 I \quad \psi_2\phi_2 I] \begin{Bmatrix} p^{f-1,1} \\ p^{f-1,2} \\ p^{f,1} \\ p^{f,2} \end{Bmatrix}_m = [\phi]^T [\psi]^T \{P\} \quad (2.3)$$

式中, $\phi_1 = (1-\eta)/2$ 和 $\phi_2 = (1+\eta)/2$ 表示在轴对称体子午线上用分段多项式插值, $\psi_1 = (t_f - t)/\Delta t$ 和 $\psi_2 = (t - t_{f-1})/\Delta t$, $\Delta t = t_f - t_{f-1}$ 表示时间轴用线性插值。坐标转换矩阵

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

沿着轴对称体的环向用Fourier级数描述

$$[Y_m] = \begin{bmatrix} \cos m\theta & & \\ & \overline{\sin m\theta} & \\ & & \cos m\theta \end{bmatrix}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M$$

$$\overline{\sin m\theta} = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ \sin m\theta & m \neq 0 \end{cases}$$

将位移试函数(2.2)式和面力试函数(2.3)式代入边界积分方程(2.1)式,考虑边界上所

有节线后, 可得有关边界广义位移和面力的第 m 阶模态分量的 $3 \times J$ 个线性方程组

$$\begin{aligned} & \sum_{f=1}^F [H_{jP}^1] \{U^{f-1}\} + \sum_{f=1}^F [H_{jP}^2] \{U^f\} \\ & = \sum_{f=1}^F [G_{jP}^1] \{P^{f-1}\} + \sum_{f=1}^F [G_{jP}^2] \{P^f\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

式中, $[H_{jP}^2] = [\hat{H}_{jP}^2] + c(\xi_i)[Y_m]\delta_{jP}\delta_{ij}$, $f=1, 2, \dots, F$ 表示将时间轴 $[0, T]$ 分成 F 个区间, $j=1, 2, \dots, J$ 表示边界的离散数, $m=0, 1, \dots, M$ 表示解析函数的级数项数.

为了将半解析边界元与半解析有限元耦合, (2.4)式可写成分块矩阵形式

$$\begin{aligned} & [[H_{jP}^2] [H_{jPB}^2]] \begin{Bmatrix} \{U^f\} \\ \{U_{SB}^f\} \end{Bmatrix} - [[G_{jP}^2] [G_{jPB}^2]] \begin{Bmatrix} \{P^f\} \\ \{P_{SB}^f\} \end{Bmatrix} \\ & = \sum_{f=1}^F ([G_{jP}^1] \{P^{f-1}\} - [H_{jP}^1] \{U^{f-1}\}) \\ & \quad + \sum_{f=1}^{F-1} ([G_{jP}^2] \{P^f\} - [H_{jP}^2] \{U^f\}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

式中, $\{U_{SB}^f\}$ 和 $\{P_{SB}^f\}$ 分别是与结构界面处的介质边界上的位移和面力矢量, $\{U^f\}$ 和 $\{P^f\}$ 分别是非界面处介质边界上的位移和面力矢量.

三、结构的半解析有限元法

$t = F\Delta t$ 时刻的动力学方程^[8]

$$[M]\{\dot{U}_{SF}^F\} + [K]\{U_{SF}^F\} = \{R_{SF}^F\} + \{Q_{SF}^F\} \quad (3.1)$$

式中, $[M]$ 和 $[K]$ 分别是结构的质量矩阵和刚度矩阵, $\{U_{SF}^F\}$ 是 $t = F\Delta t$ 时刻的结构位移矢量, $\{R_{SF}^F\}$ 是 $F\Delta t$ 时刻结构与介质交界面上的相互作用力矢量, $\{Q_{SF}^F\}$ 是作用在结构上的外力矢量.

对于圆柱壳, 沿着它的环向可用解析函数级数来描述, 位移试函数取为^[8]

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} u(\eta, \theta, t) \\ v(\eta, \theta, t) \\ w(\eta, \theta, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^M \begin{bmatrix} \cos m\theta \\ \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\eta & \eta \\ 1-\eta & \eta \\ 1-\eta & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix}_m \\ & = [N]^T \{U\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

为了与介质的半解析边界元方程联立求解, 需要建立起位移矢量 $\{U^f\}$ 和相互作用力矢量 $\{R^f\}$ 的关系式. 为此, 将位移和速度分别展开成Taylor级数形式

$$\{U^f\} = \{U^{f-1}\} + \Delta t \{\dot{U}^{f-1}\} + \frac{(\Delta t)^2}{3} \{\ddot{U}^{f-1}\} + \frac{(\Delta t)^3}{6} \{\dot{U}^f\} \quad (3.3)$$

$$\{\dot{U}^f\} = \{\dot{U}^{f-1}\} + (\{\ddot{U}^{f-1}\} + \{\dot{U}^f\})\Delta t/2 \quad (3.4)$$

将(3.1)、(3.3)和(3.4)式联立求解,建立起 $\{U_{SF}^F\}$ 与 $\{R_{SF}^F\}$ 的关系式

$$\begin{aligned} & \left[[K] + \frac{6}{(\Delta t)^2} [M] \right] \{U_{SF}^F\} = \{R_{SF}^F\} + \{Q_{SF}^F\} \\ & + [M] \left[\frac{6}{(\Delta t)^2} \{U_{SF}^{F-1}\} + \frac{6}{\Delta t} \{\dot{U}_{SF}^{F-1}\} + 2\{\ddot{U}_{SF}^{F-1}\} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

上式中只有 $t=F\Delta t$ 时刻的位移矢量 $\{U_{SF}^F\}$ 和相互作用力矢量 $\{R_{SF}^F\}$ 是未知的,它与半解析边界元方程(2.5)式联立,可同时求得结构上的位移和相互作用力.然后通过(3.3)和(3.4)式求取速度和加速度.

四、用于非轴对称物体的情况

在第二、三节中,针对旋转轴对称形状介质和结构,分别建立起半解析边界元和半解析有限元的离散化算式.进一步,为了将它们用于非轴对称形状物体,我们提出了一个坐标变换函数.通过这种坐标变换,可将任一非轴对称物体映射成一圆柱形物体.半解析边界元法或半解析有限元法只需对变换后的圆柱形物体作一维离散计算.这个坐标变换只需要知道真实物体边界上若干节点值,变换后这些点将全部落在单位圆柱面上.根据不同精度要求,可选取任意多的节点作坐标变换.

通过如下坐标变换式可将直角坐标系 Oxy 中的任意曲线映射成极坐标系 $OR\theta$ 上的单位圆

$$x = \sum_i N_i(\theta) x_i, \quad y = \sum_i N_i(\theta) y_i \quad (4.1)$$

式中, x_i 和 y_i 是任意曲线上已知的节点直角坐标值. $N_i(\theta)$ 是相应的形状函数,它具有以下性质

(i) $N_i(\theta)$ 是三角级数函数,不同于通常有限元法中采用的拉格朗日多项式.

(ii) $N_i(\theta)$ 在节点 i ,其值为1;在其余的节点 j ($j \neq i$),其值为0.即: $N_i(\theta_i) = 1$; $N_i(\theta_j) = 0$.式中 θ_i 是单位圆上节点 i 的极坐标值.

文献[9]导出了任意节点的形状函数

$$N_q(\theta) = \sum_{p=0}^{Q/2} c_p \cos p(\theta - \theta_q) \quad (4.2)$$

$$\text{式中, } c_p = \begin{cases} 1/Q & p=0 \text{ 或 } p=Q/2 \\ 2/Q & p=1, 2, \dots, Q/2-1 \end{cases}$$

这样,(4.1)式可写成

$$x = \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{Q/2} c_p \cos p(\theta - \theta_q) x_q, \quad y = \sum_{q=1}^Q \sum_{p=0}^{Q/2} c_p \cos p(\theta - \theta_q) y_q \quad (4.3)$$

式中,节点数 $Q=4, 8, 16, 32, 64, \dots, 2^{n+1}, \dots$. x_q 和 y_q 是任意曲线上的 Q 个节点的直角坐标值, θ_q 是单位圆上均匀分布的 Q 个节点的角度值.

如图1(a)所示,在极坐标系 $OR\theta$ 下的单位圆,通过坐标变换(4.3)式后,映射成在直角坐标系 Oxy 中的相应结构形状,节点数 $Q=4$.图中实线是变换后的结构形状,虚线是真实结构形状.经过(4.3)式变换后,在4个节点上仍然是精确满足真实结构形状,节点之间的

连线是近似原结构边界。由于坐标变换式所选节点较少，坐标变换后的曲线（实线）与原结构（虚线）有较大误差。为了提高坐标变换的精度，图1(b)用8个节点作坐标变换。从图可见，经过变换后的曲线已相当接近真实结构形状。图1(c)是用16节点坐标变换的情况，此时坐标变换后的曲线（实线）基本上同真实结构形状（虚线）重合。

在实际计算时，只要已知真实结构边界上 Q 个节点的直角坐标值 x_q 和 y_q ($q=1, 2, \dots, Q$)后，坐标变换(4.3)式可由极坐标下的形状函数 $N_q(\theta)$ 所完全决定，从极坐标下的单位圆立刻可定出直角坐标下的真实结构边界。因此，对任一复杂形状物体的分析均可直接在极坐标

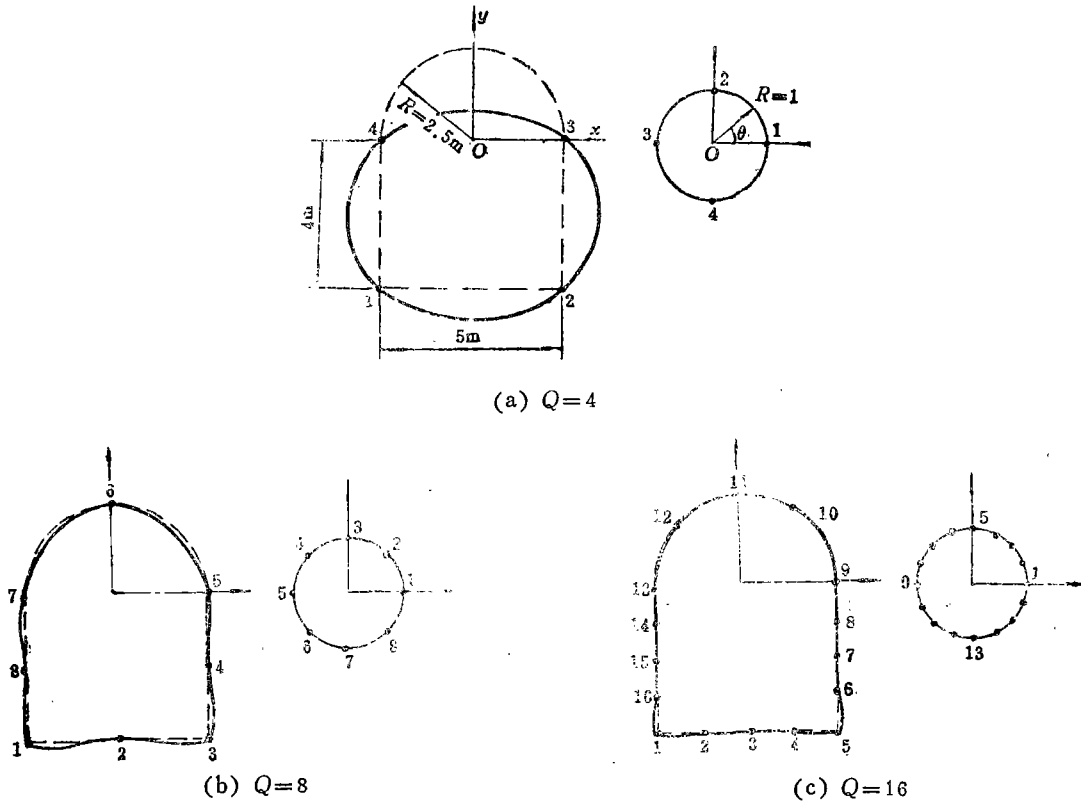


图1 任意形状曲线映射成单位圆

系下进行。当用半解析边界元、半解析有限元离散计算时，可直接在极坐标系下，对单位圆柱作一维离散，而不必离散真实结构。

五、介质与结构系统的半解析边界元—半解析有限元结合法

在介质与结构的交界面上，位移必须相等，节点力必须平衡。令交界面上的位移矢量和面力矢量分别为 $\{U_I\}$ 和 $\{P_I\}$ ，则可写出下列条件

$$\text{位移相容条件} \quad \{U_I\} = \{U_{SB}\} = \{U_{SF}\} \quad (5.1)$$

$$\text{节点力平衡条件} \quad \{P_I\} = \{P_{SB}\} = -\{P_{SF}\} \quad (5.2)$$

上式中的 $\{P_{SF}\}$ 是作用在结构上的表面力矢量，文献[9]导出了它与节点力矢量 $\{R_{SF}\}$ 之间的关系

$$\{R_{SF}\} = [A]\{P_{SF}\} \quad (5.3)$$

$$\text{式中,} \quad [A]^T = \int [\phi][N]^T ds$$

将位移相容条件和节点力平衡条件分别代入半解析边界元方程(2.5)式和半解析有限元方程(3.5)式

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [H_{FF}^2] & [H_{FF,B}^2] & -[G_{FF,B}^2] \\ 0 & [K] + \frac{6}{(\Delta t)^2}[M] & [A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^F\} \\ \{U_I^F\} \\ \{P_I^F\} \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} [G_{FF}^2]\{P^F\} + \sum_{j=1}^F ([G_{Fj}^2]\{P^{j-1}\} - [H_{Fj}^2]\{U^{j-1}\}) \\ + \sum_{j=1}^{F-1} ([G_{Fj}^2]\{P^j\} - [H_{Fj}^2]\{U^j\}) \\ \{Q^F\} + [M] \left[\frac{6}{(\Delta t)^2}\{U^{F-1}\} + \frac{6}{\Delta t}\{\dot{U}^{F-1}\} + 2\{\ddot{U}^{F-1}\} \right] \end{Bmatrix} \quad (5.4) \end{aligned}$$

$$\{\dot{U}_I^F\} = \frac{3}{\Delta t}\{U_I^F\} - \frac{3}{\Delta t}\{U_I^{F-1}\} - 2\{\dot{U}_I^{F-1}\} - \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{U}_I^{F-1}\} \quad (5.5)$$

$$\{\ddot{U}_I^F\} = \frac{6}{(\Delta t)^2}\{U_I^F\} - \frac{6}{(\Delta t)^2}\{U_I^{F-1}\} - \frac{6}{\Delta t}\{\dot{U}_I^{F-1}\} - 2\{\ddot{U}_I^{F-1}\} \quad (5.6)$$

对应每一时间步进,由(5.4)、(5.5)和(5.6)式可同时求得结构与介质交界面上的位移、速度、加速度、相互作用力和地表面的运动情况。

六、工程应用

1. 地下圆柱壳与介质的相互作用分析

设有一半径为 a , 长度为 L 的圆柱壳结构埋置于无限介质中, 壳内受到阶跃爆炸波的作用, 如图 2 所示。地下结构是钢壳, 有关参数给定如下: 弹性模量 $E_s = 2.1 \times 10^{11} \text{N/m}^2$, 密度 $\rho_s = 7840 \text{kg/m}^3$, 泊松比 $\nu_s = 0.25$, 壳厚 $h = 0.22 \text{m}$ 。周围介质是花岗岩, 有关参数给定如下: 弹性模量 $E_m = 6.2 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, 密度 $\rho_m = 2679 \text{kg/m}^3$, 泊松比 $\nu_m = 0.25$ 。

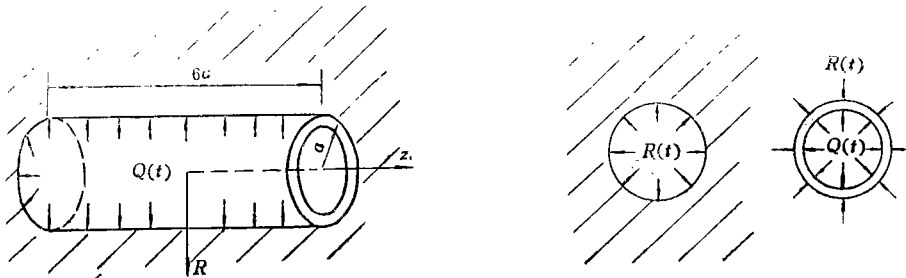


图 2

用一组半解析边界元—半解析有限元耦合单元离散结构—介质系统。在其柱面上用 6 个单元离散, 二端部平面上用 4 个单元离散。时间步长取为 $\Delta t = 0.095 \text{ms}$ 。

图 3 给出了地下结构上的径向位移响应值。图中计算考虑结构长度与跨度(直径)之比 $L/D = 2, 20$ 二种情况, 实线是 $L/D = 20$ 的计算结果, 虚线是 $L/D = 2$ 的计算结果。Parnes^[2]

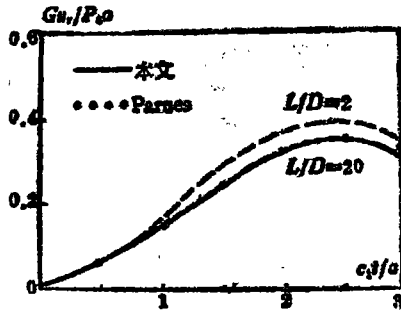


图3 地下圆柱壳的位移响应

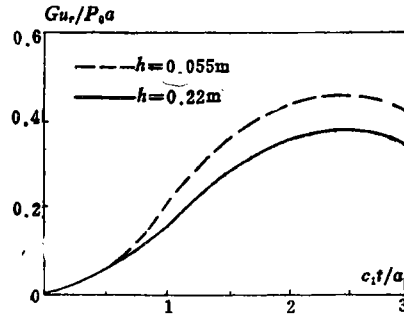


图4 地下圆柱壳的位移响应

用积分变换法计算了无限长地下圆柱壳的瞬态响应问题，现将其结果也在图3中给出。从中我们可以看出，当 $L/D=20$ 时，本方法的计算结果与Parnes的二维解析解相当接近。但当 $L/D=2$ 时，二者有较大差别，说明Parnes结果不能再适用。由此可见，当地下结构的长度与跨度比大于20时，三维结构可以近似用二维理论分析，但当地下结构的长度与跨度比接近于2时，必须采用三维理论分析。

图4分别给出了地下圆柱壳厚度 $h=0.055\text{m}$ 和 0.22m 二种情况下的瞬态响应值。从图我们可以看出，厚的刚性较大的地下结构使位移响应值大为降低，而较薄的柔性结构降低位移响应值较小。

图5给出的位移响应值考虑了介质效应，其中实线考虑了结构与介质的相互作用，虚线是在无介质情况下的计算结果。图中结果表明，考虑介质的瞬态响应值比不考虑介质的约降

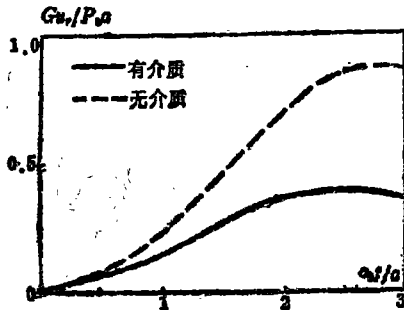


图5 地下圆柱壳的位移响应

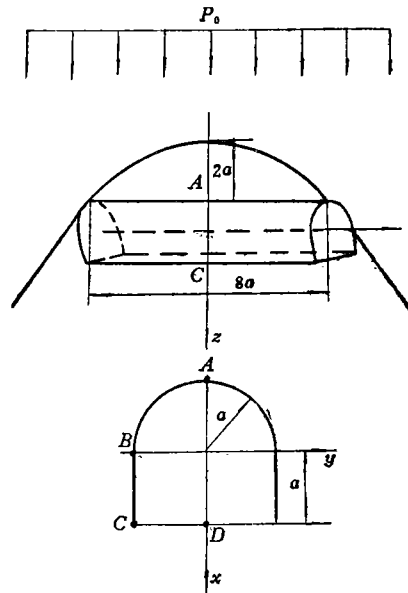


图6

低一半。这是因为当阶跃爆炸波作用于壳体上时，能量通过壳体向周围无限介质散射，介质受到扰动部分不断增大。

2. 山体内马蹄形截面结构与介质的相互作用分析

如图6所示，抛物拱形山体内埋置有一马蹄形截面柱壳结构，在山顶上作用有突加爆炸载荷。结构和介质的弹性参数同上例。

为了将马蹄形截面结构映射成圆柱壳，需要在结构和介质边界上选取如下8个节点作坐标变换： $(a, 0)$ ， (a, a) ， $(a/2, a)$ ， $(0, a)$ ， $(-a, 0)$ ， $(0, -a)$ ， $(a/2, -a)$ ， $(a, -a)$ 。变换情况如图1(b)所示。变换后的圆柱壳-介质系统用8个半解析边界元-半解析有限元耦

合单元离散,用4个边界锥单元离散抛物拱形山体表面边界。时间步长 $\Delta t=0.19\text{ms}$ 。图7分别给出了 $c_1t/a=1,2,3,4$ 时刻整个马蹄形截面结构的变形情况,虚线表示变形前结构,实线表示变形后结构。从图可见,在 $c_1t/a=1$ 时,结构变形很小,虚线与实线基本重合。在 $c_1t/a=2$ 时,结构二端首先受到应力波作用而产生较大变形。在 $c_1t/a=3$ 时,应力波开始作用到结构跨中部分,结构中间部分也开始变形。在 $c_1t/a=4$ 时,整个结构都有较大变形,这种变形主要是由在非平面应力波作用下,结构的弯曲变形和结构沿冲击波波阵面传播方向的平移运动所产生的。

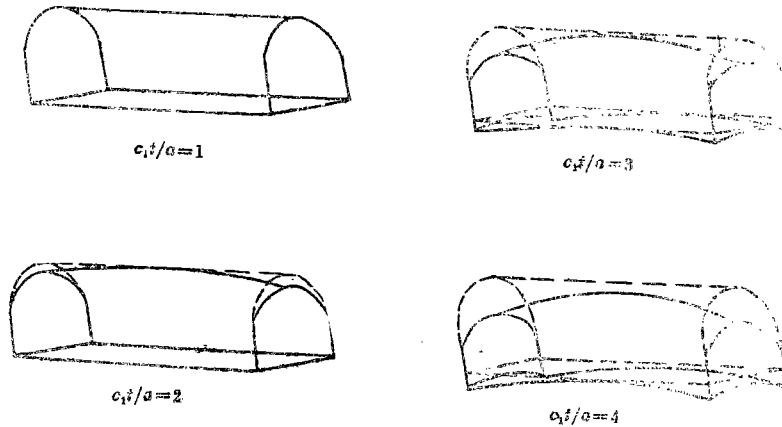


图7 马蹄形截面柱壳的变形情况

参 考 文 献

- [1] Baron, M. L. and A. T. Matthews, Diffraction of a pressure wave by a cylindrical cavity in an elastic medium, *Journal of Applied Mechanics*, Series E, 28, 3 (1961), 347—354.
- [2] Parnes, R., Dynamic response of imbedded cylindrical shell, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 97, 2 (1971), 421—439.
- [3] 曹志远, 张佑致, 结构与内流体相互作用问题的半解析方法, *应用数学和力学*, 6, 1 (1985), 1—8.
- [4] 朱建雄、曹志远, 核爆炸冲击波在三维介质中的传播, *地震工程与工程振动*, 3, 2 (1983), 8—16.
- [5] Spyrakos, C. C. and D. E. Beskos, Dynamic response of flexible strip-foundations by boundary and finite elements, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 5, 2 (1986), 84—95.
- [6] Karabalis, D. L. and D. E. Beskos, Dynamic response of 3-D flexible foundations by time domain BEM and FEM, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 4, 2 (1985), 91—101.
- [7] Eringen, A. C. and E. S. Suhubi, *Elastodynamics*, Academic Press, New York (1975).
- [8] Cheung, Y. K., *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press (1976).
- [9] 朱建雄, 在爆炸冲击波作用下任意截面形状地下结构与具有复杂地表面的半空间介质的三维动力相互作用研究, 同济大学博士学位论文 (1988).

Dynamic Response of Underground Structures by Time Domain SBEM and SFEM

Zhu Jian-xiong Cao Zhi-yuan Li Guo-hao

(*Tongji University, Shanghai*)

Abstract

The dynamic interaction problems of three-dimensional linear elastic structures with arbitrary shaped section embedded in a homogeneous, isotropic and linear elastic half space under dynamic disturbances are numerically solved. The numerical method employed is a combination of the time domain semi-analytical boundary element method (SBEM) used for the semi-infinite soil medium and the semi-analytical finite element method (SFEM) used for the three-dimensional structure. The two methods are combined through equilibrium and compatibility conditions at the soil-structure interface. Displacements, velocities, accelerations and interaction forces at the interface between underground structure and soil medium produced by the diffraction of wave by an underground structure for every time step are obtained. In dynamic soil-structure interaction problems, it is advantageous to combine the SBEM and the SFEM in an effort to produce an optimum numerical hybrid scheme which is characterized by the main advantages of the two methods. The effects of the thickness, the ratio of length and diameter of underground structure and the soil medium on dynamic responses are discussed.

Key words dynamic interaction of structure and medium, semi-analytical finite element method, semi-analytical boundary element method