

# 极正交各向异性圆板非线性弯曲的 定性分析及单调迭代解\*

尚新春 程昌钧

(兰州大学力学系, 1990年4月28日收到)

## 摘 要

本文对极正交各向异性圆板在任意轴对称载荷和边界条件下的非线性弯曲问题进行了较为系统的研究。首先, 将边值问题归结为等价的积分方程, 并且借助于广义函数得到了线性问题的一般解答。其次, 对导出的非线性积分方程解的性质作了较为细致的讨论, 例如边缘皱褶, 非负性和奇性等。然后, 构造了解的双边单调迭代格式, 并给出了迭代格式的收敛性判据和误差估计, 同时还讨论了解的全局存在唯一性。最后, 给出了一个数值例子来说明本文方法和结论的应用。本文某些结果是由作者新得到的。

**关键词** 非线性弯曲 定性分析 单调迭代解 收敛性判据 全局唯一性 误差估计

## 一、引 言

随着科技的发展, 各向异性板壳的非线性分析已引起人们的广泛兴趣<sup>[1]</sup>。但是, 有关极正交各向异性圆板非线性弯曲的文献是相当有限的。文[2]用摄动法和变分法得到了近似解析解, 文[1],[3],[4]分别用Chebyshev多项式, 配置法和打靶法给出一些数值解。文[4]还研究了解的某些定性性质例如边缘皱褶和唯一性等。文[5]在各向同性的情形下曾研究过边缘皱褶现象, [6]和[7]也曾指出过这一现象的可能性。文[8]和[9]曾讨论过解的唯一性问题。上述工作仍均局限于某些特殊载荷和边界条件情形。文[10]给出了各向异性情形下一个较为系统的分析。

本文对极正交各向异性圆板在任意轴对称载荷和一般边界条件下的非线性弯曲问题进行了较为系统的研究。首先, 应用von Kármán板理论和广义函数的性质, 将问题归结为二个耦合的二阶非线性常微分方程的两点边值问题。常见的边界条件仅依赖于两个边缘约束参数的选择。在有局部载荷作用的情形下上述边值问题的古典解将不存在, 因而有必要研究其广义解。为此, 将问题转化为研究一个 Hammerstein 型的等价积分方程。在物理和几何参数的允许值范围内积分核是非负和非奇异的。线性问题的解可利用广义函数的性质给出其解析

\* 叶开沅推荐。

表达式。其次，定性地分析了非线性积分方程的性质，并从较一般的情形证实和推广了数值方法<sup>[1]-[7]</sup>和定性方法<sup>[4],[11]</sup>所得到的相应结论。对某些具有物理和计算方面兴趣的问题作了较细致的讨论。例如皱褶，解的非负性和奇性等。另外，根据不动点原理给出解的全局存在唯一性条件。再次，利用本文所得到的定性结论给出“双边单调迭代”的求解方法，它是文[11]简单迭代法的推广。同时还讨论了这一方法的收敛性和误差估计等问题。尤为重要的是本文证明了两个迭代解子序列将分别给出精确解的上限近似和下限近似这一新结论。最后，作为一个例子，考虑了圆板受边缘弯矩载荷的非线性弯曲问题，它说明了本文结论与方法的实用性。

## 二、问题的数学提法

2.1 边值问题 极正交各向异性圆板轴对称非线性弯曲问题的基本方程为<sup>[3]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \left( r \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r} \right) \frac{dW^*}{dr} - \frac{rN^*}{D} \frac{dW^*}{dr} &= \frac{rQ^*(r)}{D} \\ \left( r \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r} \right) (rN^*) + \frac{E_\theta h}{2} \left( \frac{dW^*}{dr} \right)^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1a, b)$$

其中， $W^*$ 和 $N^*$ 是挠度和径向薄膜力， $E_r$ ， $E_\theta$ 和 $\nu_r$ ， $\nu_\theta$ 是径向、环向杨氏模量和泊松比。参数 $k^2 = E_\theta/E_r = \nu_\theta/\nu_r$ ， $D = E_r h^3/12(1-\nu_r\nu_\theta)$ 是抗弯刚度， $a$ 和 $h$ 是板的半径和厚度。

假定板的法向承受 i) 任意分布载荷  $q_\alpha^*(r)$  ( $\alpha=1, 2, \dots, I$ )；ii) 环向线分布力  $p_\beta^*$  ( $\beta=1, 2, \dots, J$ )；iii) 环向线分布力偶  $M_\gamma^*$  ( $\gamma=1, 2, \dots, K$ )；iv) 中心集中力  $P^*$ 。(如图 1 所示)

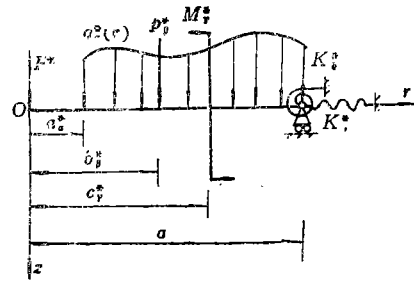


图 1 作用于圆板上的载荷

方程(2.1a)中的横向剪力 $Q_\alpha^*$ 可由平衡条件和广义函数得到，并可写成

$$\begin{aligned} Q_\alpha^*(r) = \frac{1}{r} \left\{ \sum_{\alpha=1}^I H(r-a_\alpha^*) \int_{a_\alpha^*}^r q_\alpha^*(r) r dr + \sum_{\beta=1}^J p_\beta^* b_\beta^* H(r-b_\beta^*) \right. \\ \left. + \sum_{\gamma=1}^K M_\gamma^* [c_\gamma^* \delta(r-c_\gamma^*) - H(r-c_\gamma^*)] + \frac{P^*}{2\pi} \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $\delta(r-r_0)$ 和 $H(r-r_0)$ 分别为 $\delta$ -函数和 Heaviside 函数。

$$H(r-r_0) = \begin{cases} 0 & r \leq r_0 \\ 1 & r > r_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

引入如下无量纲的变量和参数：

$$x=r/a, \quad \varphi(x) = -\frac{\lambda}{h} \frac{dW^*}{dx}, \quad \psi(x) = \frac{a^2}{D} N^* x \quad (2.4)$$

$$f(x) = \frac{\lambda a^3}{Dh} Q_\alpha^* x = \sum_{\alpha=1}^I H(x-a_\alpha) \int_{a_\alpha}^x q_\alpha(x) x dx + \sum_{\beta=1}^J p_\beta b_\beta H(x-b_\beta)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\kappa} M_{\nu} [c_{\nu} \delta(x-c_{\nu}) - H(x-c_{\nu})] + P \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中, } q_{\alpha}(x) &= \frac{\lambda a^4}{Dh} q_{\alpha}^*, \quad p_{\beta} = \frac{\lambda a^3}{Dh} p_{\beta}^*, \quad M_{\nu} = \frac{\lambda a^2}{Dh} M_{\nu}^* \\ P &= \frac{\lambda a^2}{2\pi Dh} P^*, \quad \lambda = [6(k^2 - \nu_0^2)]^{1/2} \\ 0 \leq a_{\alpha} &= a_{\alpha}^*/a < 1, \quad 0 < b_{\beta} = b_{\beta}^*/a < 1, \quad 0 < c_{\nu} = c_{\nu}^*/a \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

基本方程(2.1)的无量纲形式为

$$L_k(\varphi) - \varphi\psi = -f, \quad L_k(\psi) + \varphi^2 = 0 \quad (2.7a, b)$$

$$\text{其中, } L_k(\cdot) \equiv \left( x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - \frac{k^2}{x} \right) (\cdot)$$

$$= x^k \frac{d}{dx} x^{1-2k} \frac{d}{dx} x^k (\cdot) \quad (2.8)$$

无量纲的薄膜应力  $\sigma_r^*$ ,  $\sigma_{\theta}^*$  和弯曲应力  $\sigma_b^*$ ,  $\sigma_s^*$  以及中面径向位移和挠度均可由  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  表示成为

$$\sigma_r^* = \frac{a^2 h}{D} \sigma_r^{* *}, \quad \sigma_r^{* *} = \frac{a^2}{D} N_r^* = \frac{\psi}{x}, \quad \sigma_{\theta}^* = \frac{a^2 h}{D} \sigma_{\theta}^{* *} = \frac{a^2}{D} N_{\theta}^* = \frac{d\psi}{dx} \quad (2.9a, b)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_b^* &= \frac{\lambda a^2 h}{6D} \sigma_b^{* *} \left( \frac{h}{2} \right) = \frac{\lambda a^2}{Dh} M_r^* = \frac{d\varphi}{dx} + \nu_0 \frac{\varphi}{x} \\ \sigma_s^* &= \frac{\lambda a^2 h}{6D} \sigma_s^{* *} \left( \frac{h}{2} \right) = \frac{\lambda a^2}{Dh} M_{\theta}^* = \nu_0 \frac{d\varphi}{dx} + k^2 \frac{\varphi}{x} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$u = \frac{2\lambda^2 a}{h^2} u^* = \frac{r}{Eh} (N_{\theta}^* - \nu_0 N_r^*) = x \frac{d\psi}{dx} - \nu_0 \psi \quad (2.11)$$

$$w = \lambda \frac{W^*}{h} = \int_x^1 \varphi(\xi) d\xi \quad (2.12)$$

一般的边界条件可写成<sup>[3]</sup>

$$\varphi(0) = 0, \quad [(1 + \lambda_b) + \nu_0(1 - \lambda_b)]\varphi(1) + (1 - \lambda_b)\varphi'(1) = 0 \quad (2.13a, b)$$

$$\psi(0) = 0, \quad [(1 - \lambda_i) - \nu_0(1 + \lambda_i)]\psi(1) + (1 + \lambda_i)\psi'(1) = 0 \quad (2.14)$$

其中  $\lambda_i$ ,  $\lambda_b$  是与边缘约束有关的参数, 可由边缘约束的平动和转动弹簧刚度  $K_i^*$  和  $K_b^*$  来确定.

$$\left. \begin{aligned} K_i &= \frac{a}{E_{\theta} h} K_i^* = \frac{1 + \lambda_i}{1 - \lambda_i}, \quad K_b = \frac{a}{D} K_b^* = \frac{1 + \lambda_b}{1 - \lambda_b} \\ 0 \leq K_i &\leq +\infty, \quad 0 \leq K_b \leq +\infty \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$K_i$  和  $K_b$  取不同值可得相应的边界条件, 例如,  $K_b = 0$  ( $\lambda_b = -1$ ) 对应于简支边情形.

方程(2.7)和边界条件(2.13), (2.14)是一个非线性的两点边值问题, 它从数学上描述了极正交各向异性圆板在任意轴对称载荷和边界条件下的非线性轴对称弯曲状态.

2.2 等价积分方程 由(2.7)和(2.13), (2.14)可得

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_0(x) - \int_0^1 G_1(x, \xi) \varphi(\xi) \psi(\xi) d\xi \\ \psi(x) &= \int_0^1 G_2(x, \xi) \varphi^2(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \quad (2.16a, b)$$

显然, 在弱解意义下 (2.16) 等价于边值问题 (2.7) 和 (2.13), (2.14). 其中,  $\varphi_0(x)$  是 (2.7a) 和 (2.13) 线性化问题的解, 即小挠度理论的转角值.

$$\varphi_0(x) = \int_0^1 G_1(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.17)$$

积分核

$$G_j(x, \xi) = \frac{1}{2k} \begin{cases} (\xi/x)^k + \mu_j (x\xi)^k & (0 \leq \xi < x \leq 1) \\ (x/\xi)^k + \mu_j (x\xi)^k & (0 \leq x < \xi \leq 1) \end{cases} \quad (j=1, 2) \quad (2.18)$$

$$\text{其中} \quad \mu_1 = \frac{k - \nu_0 - K_0}{k + \nu_0 + K_0}, \quad \mu_2 = \frac{(k + \nu_0)K_1 - 1}{(k - \nu_0)K_1 + 1} \quad (2.19)$$

由(2.18)知  $G_j(x, \xi)$  除在  $(0, 0)$  点有限间断处, 均为区域  $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1\}$  上两变元的连续函数. 根据文[4]和[12], 泊松比  $\nu_r$  和  $\nu_\theta$  满足如下不等式:

$$\nu_r > 0, \quad \nu_\theta > 0, \quad \nu_r + \nu_\theta \leq 1 \quad (2.20)$$

$$\text{因此,} \quad 0 < k < \infty, \quad 0 < \nu_0 \leq k^2 / (1 + k^2) < 1, \quad k > \nu_0 \quad (2.21)$$

再由(2.19), (2.16)和(2.21)可得:

$$-1 \leq \mu_1 \leq \frac{k - \nu_0}{k + \nu_0} < 1, \quad -1 \leq \mu_2 \leq \frac{k + \nu_0}{k - \nu_0} \leq \frac{1 + k + k^2}{1 - k + k^2} \leq 3 \quad (2.22)$$

于是, 由(2.18)知

$$0 \leq G_1(x, \xi) \leq 1/k, \quad 0 \leq G_2(x, \xi) \leq 2/k \quad (2.23)$$

此式表明  $G_j(x, \xi)$  是非负和非奇异的.

将(2.16)中第二式  $\psi(x)$  代入第一式得到如下 Hammerstein 型非线性积分方程:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) - \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, \xi) G_2(\xi, \eta) \varphi^2(\eta) \varphi(\xi) d\eta d\xi \quad (2.24)$$

特别地  $k=1$  时它退化为文[10], [11]的相应方程.

由(2.24)可有如下表达式:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_r^*(x) \\ \sigma_\theta^*(x) \\ u(x) \end{bmatrix} &= \left( \int_0^1 a_2(x, \xi) \varphi^2(\xi) d\xi - \int_0^1 a_3(x, \xi) \varphi^2(\xi) d\xi \right) \begin{bmatrix} 1/kx \\ 1/x \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad - \int_0^1 \begin{bmatrix} \beta_1(x, \xi) \\ \beta_2(x, \xi)/k \\ \beta_3(x, \xi) \end{bmatrix} \varphi^2(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_r^\dagger(x) \\ \sigma_\theta^\dagger(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{r0}^\dagger(x) \\ \sigma_{\theta0}^\dagger(x) \end{bmatrix} - \left( \int_0^1 a_1(x, \xi) \psi(\xi) \varphi(\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 a_3(x, \xi) \psi(\xi) \varphi(\xi) d\xi \right) \begin{bmatrix} 1/kx \\ 1/x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$-\int_0^x \left[ \begin{array}{c} \beta_4(x, \xi) \\ \beta_5(x, \xi) \end{array} \right] \psi(\xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (2.26)$$

其中,  $\psi(x)$  由(2.16)给出,  $\sigma_{\theta_0}^+(x)$ ,  $\sigma_{\theta_0}^-(x)$  是小挠度理论的弯曲应力, 可由下式确定:

$$\sigma_{\theta_0}^+(x) = \frac{d\varphi_0}{dx} + \nu_0 \frac{\varphi_0}{x}, \quad \sigma_{\theta_0}^-(x) = \nu_0 \frac{d\varphi_0}{dx} + k^2 \frac{\varphi_0}{x} \quad (2.27)$$

$\alpha_i(x, \xi)$  和  $\beta_i(x, \xi)$  为

$$\alpha_j(x, \xi) = \frac{1}{2}(1 + \mu_j x^k \xi^k) \quad (j=1, 2); \quad \alpha_3(x, \xi) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\xi} \right)^k \right] \quad (2.28)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_{1,2}(x, \xi) &= \frac{1}{2} \left[ 1 \mp \left( \frac{\xi}{x} \right)^k \right] \\ \beta_3(x, \xi) &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{k + \nu_0}{k - \nu_0} \left( \frac{\xi}{x} \right)^k \right] \\ \beta_{4,5}(x, \xi) &= \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{k - \nu_0}{k + \nu_0} \left( \frac{\xi}{x} \right)^k \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

可以验证这些核函数都是非负的且有上界.

如果  $\varphi(x)$  由(2.24)求得, 那么  $\psi(x)$  和其它物理量便可由相应的表达式得到. 至此, 边值问题(2.7)和(2.13), (2.14)被转化为寻求(2.24)的解.

### 2.3 线性问题的解

广义函数  $H(x-x_0)$  和  $\delta(x-x_0)$  具有如下性质:

1) 若  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上可积, 则有

$$\left. \begin{aligned} \int_y^1 H(\xi-x) F(\xi) d\xi &= \int_y^1 F(\xi) d\xi + H(x-y) \int_x^y F(\xi) d\xi \\ \int_y^1 H(x-\xi) F(\xi) d\xi &= H(x-y) \int_x^y F(\xi) d\xi \quad (0 \leq x, y \leq 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

2) 若  $F(x)$  是区间  $[0, 1]$  上的连续函数, 则有

$$\int_y^1 \delta(x-\xi) F(\xi) d\xi = H(x-y) F(x) \quad (0 \leq x, y \leq 1) \quad (2.31)$$

将(2.5)代入(2.17)经冗长的积分运算得到

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \frac{x^k}{2k(1+k)} \left\{ \sum_{\alpha=1}^I \left( \int_{a_\alpha}^1 q_\alpha(\eta) \eta \left[ \frac{1+k}{1-k} (1-\eta^{1+k}) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \mu_1 (1-\eta^{1+k}) \right] d\eta + H(x-a_\alpha) \int_{a_\alpha}^x q_\alpha(\eta) \eta \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left[ \frac{(1+k)\eta^{1+k} - 2kx^{1+k}}{1-k} - \eta^{1+k} x^{-2k} \right] d\eta \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\beta=1}^J p_\beta b_\beta \left( \left[ \frac{1+k}{1-k} (1-b_\beta^{1+k}) + \mu_1 (1-b_\beta^{1+k}) \right] \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + H(x-b_\beta) \left[ \frac{(1+k)b_\beta^{1-k} - 2kx^{1-k}}{1-k} - b_\beta^{1+k}x^{-2k} \right] \\
& + \sum_{\gamma=1}^K M_\gamma \left( \left[ \frac{1+k}{1-k} ((2-k)c_\gamma^{1-k} - 1) + \mu_1((2+k)c_\gamma^{1+k} - 1) \right] \right. \\
& + H(x-c_\gamma) \left[ \frac{-(1+k)(2-k)c_\gamma^{1-k} + 2kx^{1-k}}{1-k} \right. \\
& \left. \left. - (2+k)c_\gamma^{1+k}x^{-2k} \right] \right) \\
& + P \left[ \frac{(1+k) - 2kx^{1-k}}{1-k} + \mu_1 \right] \left. \right\} \quad (2.32)
\end{aligned}$$

特别地,  $k=1$  时有

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= \frac{x}{4} \left\{ \sum_{a=1}^I \left( \int_{a_a}^1 q_a(\eta) \eta [\mu_1(1-\eta^2) - 2\ln\eta] d\eta \right. \right. \\
& + H(x-a_a) \int_{a_a}^x q_a(\eta) \eta \left[ 1 + 2\ln\frac{\eta}{x} - \left(\frac{\eta}{x}\right)^2 \right] d\eta \Big) \\
& + \sum_{\beta=1}^J p_\beta b_\beta \left( [\mu_1(1-b_\beta^2) - 2\ln b_\beta] \right. \\
& + H(x-b_\beta) \left[ 1 + 2\ln\frac{b_\beta}{x} - \left(\frac{b_\beta}{x}\right)^2 \right] \Big) \\
& + \sum_{\gamma=1}^K M_\gamma \left( [\mu_1(3c_\gamma^2 - 1) + 2(1+\ln c_\gamma)] + H(x-c_\gamma) \right. \\
& \left. \left. \cdot \left[ 3\left(\frac{c_\gamma}{x}\right)^2 - 3 - 2\ln\frac{c_\gamma}{x} \right] \right) + P[(1+\mu_1) - 2\ln x] \right\} \quad (2.33)
\end{aligned}$$

将(2.17)代入(2.27)并由(2.32), (2.33)不难得到

结论2.1 (a)  $\varphi_0(x)$  在  $[0, 1]$  上连续.  $\varphi_0'(x)$ ,  $\sigma_{\theta_0}^+(x)$ ,  $\sigma_{\theta_0}^-(x)$  除在  $x=c_\gamma$  处有限间断外, 均在  $(0, 1]$  上连续, 并且, 在  $x=0$  处仅在如下两种情形会出现奇性:

$$1) \quad k < 1 \text{ 时, } \varphi_0'(x) = O(x^{k-1}), \quad \sigma_{\theta_0}^+(x) = O(x^{k-1}), \quad \sigma_{\theta_0}^-(x) = O(x^{k-1}) \quad (2.34)$$

$$2) \quad k = 1 \text{ 且 } P \neq 0 \text{ 时, } \varphi_0'(x) = O(\ln x), \quad \sigma_{\theta_0}^+(x) = O(\ln x), \quad \sigma_{\theta_0}^-(x) = O(\ln x) \quad (2.35)$$

(b) 若  $f(x) \geq 0$ , 则  $\varphi_0(x) \geq 0$ , 当且仅当  $f(x) \equiv 0$  时,  $\varphi_0(x) \equiv 0$

$$(c) \text{ 若 } f(x) \geq 0 \text{ 则 } \sigma_{\theta_0}^+(x) - k\sigma_{\theta_0}^-(x) \geq 0 \quad (2.36)$$

且

$$\sigma_{\theta_0}^-(0) = k\sigma_{\theta_0}^-(0) + \frac{k-v_\theta}{k+1} P = \begin{cases} \frac{k^2+v_\theta}{k^2-1} P \geq 0 & (k > 1) \\ \text{const} > 0 & (k = 1 \text{ 且 } P = 0) \\ +\infty & (k < 1 \text{ 或 } k = 1 \text{ 且 } P \neq 0) \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\sigma_{\theta_0}^-(1) \leq 0, \quad \text{sign}(\sigma_{\theta_0}^-(1)) = \text{sign}\left(\mu_1 + \frac{k-v_\theta}{k+v_\theta}\right) \quad (2.38)$$

其中

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} > 0 & (x > 0) \\ = 0 & (x = 0) \\ < 0 & (x < 0) \end{cases}$$

是符号函数。

### 三、非线性问题解的性质

现在讨论非线性积分方程(2.24)以及(2.16), (2.25), (2.26), (2.12)解的一般性质。假定(2.24)在 $[0, 1]$ 上存在连续有界的解 $\varphi(x)$ 。因而, 其它物理量的解存在性得到保证。

**定理3.1** (a) 解 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_0(x)$ 具有相同的连续性和奇异性(见结论2.1)。(b) 若 $f(x) \geq 0$ 则(i)  $\varphi(x) \geq 0$ , 当且仅当 $f(x) \equiv 0$ 时 $\varphi(x) \equiv 0$ ; (ii)  $\varphi(x) \leq \varphi_0(x)$ ; (iii)  $0 \leq w(x) \leq w_0(x)$ ,  $w(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减。其中

$$w_0(x) = \int_x^1 \varphi_0(\xi) d\xi$$

**证明** 由(2.24)知 $\varphi'(x) - \varphi_0'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 故(a)显然。用反证法证(b)中(i)。先证 $\varphi(1) \geq 0$ , 设其不然,  $\varphi(1) < 0$ , 由 $\varphi(0) = 0$ 和 $\varphi(x)$ 的连续性必有一点,  $x_0 = \sup\{x | 0 \leq x \leq 1, \varphi(x) = 0\}$ 使得

$$\varphi(x_0) = 0, \varphi(x) < 0 \quad (x_0 < x \leq 1) \quad (3.1)$$

于是, 再由(2.7), (2.13b)和 $\varphi(x_0)$ 得到

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^1 K_1(x, \xi) f(\xi) d\xi - \int_{x_0}^1 K_1(x, \xi) \psi(\xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (x_0 \leq x \leq 1) \quad (3.2)$$

其中,

$$K_1(x, \xi) = \frac{1}{2kx^k \xi^k (1 + \mu_1 x^{2k})} \begin{cases} (\xi^{2k} - x_0^{2k})(1 + \mu_1 x^{2k}) & (x_0 \leq \xi < x \leq 1) \\ (x^{2k} - x_0^{2k})(1 + \mu_1 \xi^{2k}) & (x_0 \leq x < \xi \leq 1) \end{cases} \quad (3.3)$$

且 $K_1(x, \xi) \geq 0$ 。由 $\psi(x) \geq 0$ (见(2.16b), (2.23))和条件 $f(x) \geq 0$ 以及 $\varphi(x) < 0$ , 从(3.2)式导出 $\varphi(x) \geq 0$ (在 $[x_0, 1]$ 中), 这与(3.1) $\varphi(x) < 0$ 相矛盾。其次, 证 $\varphi(x) \geq 0$ ,  $x \in [0, 1]$ 。设其不然, 至少有一点 $\bar{x} \in (0, 1)$ 使 $\varphi(\bar{x}) < 0$ , 结合 $\varphi(1) \geq 0$ 知在 $(\bar{x}, 1]$ 必有 $\varphi(x)$ 的零点。根据确界定理存在两点 $x_1 = \sup\{x | 0 \leq x < \bar{x}, \varphi(x) = 0\}$ ,  $x_2 = \inf\{x | \bar{x} < x \leq 1, \varphi(x) = 0\}$ 使得

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0, \varphi(x) < 0 \quad (x_1 < x < x_2) \quad (3.4)$$

再由(2.7a)和(3.4a)可得

$$\varphi(x) = \int_{x_1}^{x_2} K_2(x, \xi) f(\xi) d\xi - \int_{x_1}^{x_2} K_2(x, \xi) \psi(\xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (x_1 \leq x \leq x_2) \quad (3.5)$$

其中

$$K_2(x, \xi) = \frac{1}{2kx^k \xi^k (x_2^{2k} - x_1^{2k})} \begin{cases} (\xi^{2k} - x_1^{2k})(x_2^{2k} - x^{2k}) & (x_1 \leq \xi < x \leq x_2) \\ (x^{2k} - x_1^{2k})(x_2^{2k} - \xi^{2k}) & (x_1 \leq x < \xi \leq x_2) \end{cases} \quad (3.6)$$

由于 $K_2(x, \xi) \geq 0$ ,  $\psi(x) \geq 0$ ,  $f(x) \geq 0$ 和 $\varphi(x) < 0$ , 从(3.5)式导出 $\varphi(x) \geq 0$ ,  $x \in (x_1, x_2)$ 这与(3.4) $\varphi(x) < 0$ 相矛盾。即证(b)中(i)。将(b)中(i)用于(2.24), (2.12)知(b)中(ii), (iii)为显然。

定理3.1中结论(b)(i)是本文的基本结论。在 $k=1$ 和均布载荷情形下, Keller和Reiss<sup>[11]</sup>曾给出 $\varphi(x) \geq 0$ 的证明, 文[4]将它用于 $k \neq 1$ 的情形。由于[4], [11]中的证明必须假定 $\varphi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的二次连续可微函数, 因此, 在本文所考虑的较一般载荷情形下文[4], [11]的方法将会失效。事实上, 由结论2.1和定理3.1中的(a)知, 当有局部载荷 $M_r$ 作用时,  $\varphi(x)$ 的古典解是不存在的。本文的证明是针对广义解而言的。

沃尔密尔(Vol'mir)<sup>[7]</sup>曾指出: 当 $W^*(0)/h \geq 2.4$ 时承受均布载荷的固定夹紧圆板其二次摄动解呈现中心下凹, 即 $\varphi(x) < 0 (0 < x < \epsilon \ll 1)$ 。但是, 实验并没有观察到这一现象。定理3.1的结论(b)(i)在较一般情形下从理论上证明了中心下凹并不是挠度解本身所固有的特征。它可能与摄动法的收敛性有关。(b)中(ii), (iii)表明线性理论用于弯曲板的刚度设计是偏于安全的。

定理3.2 (a)  $\sigma_r^n(x)$ 和 $\sigma_\theta^n(x)$ 在 $(0, 1]$ 上连续, 且满足不等式

$$(i) \quad \sigma_\theta^n(x) - k\sigma_r^n(x) \leq 0, \quad \sigma_r^n(x) \geq \sigma_r^n(1)x^{k-1} \geq 0 \quad (3.7a, b)$$

(ii) 当 $k \leq 1$ 时,  $\sigma_r^n(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 且

$$\sigma_r^n(x) \geq \sigma_\theta^n(x) \quad (3.8)$$

(iii) 当 $k=1$ 且 $\varphi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的单调递增函数时,  $\sigma_\theta^n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减。

$$(b) \quad \sigma_\theta^n(0) = k\sigma_r^n(0) = \begin{cases} 0 & (k > 1) \\ \text{const} > 0 & (k = 1) \\ +\infty & (k < 1) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$(1 + \mu_2)\sigma_\theta^n(1) + k(1 - \mu_2)\sigma_r^n(1) = 0, \quad \text{sign}(\sigma_\theta^n(1)) = \text{sign}(\mu_2 - 1) \quad (3.10)$$

(c)  $u(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 且

$$u(0) = 0, \quad u(1) \leq 0 \quad (3.11)$$

证明 由(2.25)易见 $\sigma_r^n(x)$ ,  $\sigma_\theta^n(x)$ 的连续性和(3.7a)。再由(2.9a)和 $\psi(x) \geq 0$ 有 $\sigma_r^n(x) \geq 0$ , 注意到

$$\frac{d}{dx} \sigma_r^n = \frac{1}{x} (\sigma_\theta^n - k\sigma_r^n) + \frac{k-1}{x} \sigma_r^n \quad (3.12)$$

可得结论(a)(ii)。由(3.12)有

$$\frac{d}{dx} (x^{1-k} \sigma_r^n) = x^{1-k} \left( \frac{d}{dx} \sigma_r^n - \frac{k-1}{x} \sigma_r^n \right) \leq 0 \quad (3.13)$$

故(3.7)为真。在(2.25)中令 $k=1$ 有

$$\frac{d}{dx} \sigma_\theta^n = \frac{1}{x^3} \int_0^x [\xi \varphi(\xi) - x \varphi(x)] d\xi \quad (3.14)$$

从而有(a)(iii)。 (3.9), (3.10)和(3.11)可由(2.25)取 $x \rightarrow 0_+$ 和 $x \rightarrow 1$ 的极限得到。

根据定理3.2可知薄膜应力 $\sigma_r^n(x)$ ,  $\sigma_\theta^n(x)$ 在 $x=0$ 处, 当 $k < 1$ 时取最大值(无穷大); 当 $k > 1$ 时取绝对值最小(零); 当 $k=1$ 时,  $\sigma_r^n(x)$ 绝对值最大, 若 $\varphi(x)$ 单调递增, 则 $\sigma_\theta^n(x)$ 亦取最大绝对值。(3.10)表明当 $\mu_2 < 1$ 即 $K_r^* < E_0 h / \alpha v_0$ 时 $\sigma_\theta^n$ 为负, 这意味着有可能产生边缘皱褶现象。即产生边缘皱褶的必要条件是 $\mu_2 < 1$ 。这里, 在较一般情形下得出了文[4]的相应结论, 并从理论上证明了文[5]~[7]中的相应数值结果。

定理3.3 (a)  $\sigma_r^!(x)$ ,  $\sigma_\theta^!(x)$ 与 $\sigma_r^!_0(x)$ ,  $\sigma_\theta^!_0(x)$ 具有相同的连续性和奇异性(见结论2.1)。并且, 若 $f(x) \geq 0$ , 则

$$\sigma_\theta^! - k\sigma_r^! \leq \sigma_\theta^!_0 - k\sigma_r^!_0 \geq 0 \quad (3.15)$$

$$\text{特别 } k=1 \text{ 时, } \sigma_r^!(x) - \sigma_r^!_0(x) \geq \sigma_r^!(0) - \sigma_r^!_0(0) \quad (3.16)$$



$$\sigma_+^!(0) - \sigma_{+0}^!(0) \leq \sigma_+^!(x) - \sigma_{+0}^!(x) \leq \sigma_+^!(1) - \sigma_{+0}^!(1) \quad (3.17)$$

$$(b) \quad \sigma_+^!(0) = k\sigma_+^!(0) + \frac{k-\nu_0}{k+1} P = \begin{cases} \frac{k^2 + \nu_0}{k^2 - 1} P & (k > 1) \\ \text{const} > 0 & (k = 1 \text{ 且 } P = 0) \\ \infty & (k < 1 \text{ 或 } k = 1 \text{ 且 } P \neq 0) \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\sigma_+^!(0) - \sigma_{+0}^!(0) = k(\sigma_+^!(0) - \sigma_{+0}^!(0)) = \begin{cases} 0 & (k > 1) \\ \text{const} \leq 0 & (k \leq 1 \text{ 且 } f(x) \geq 0) \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\left(\mu_1 - \frac{k-\nu_0}{k+\nu_0}\right)(\sigma_+^!(1) - \sigma_{+0}^!(1)) = k\left(\mu_1 + \frac{k-\nu_0}{k+\nu_0}\right)(\sigma_+^!(1) - \sigma_{+0}^!(1)) \quad (3.20)$$

当  $f(x) \geq 0$  时,

$$\sigma_+^!(1) - \sigma_{+0}^!(1) \geq 0, \quad \text{sign}(\sigma_+^!(1) - \sigma_{+0}^!(1)) = -\text{sign}\left(\mu_1 + \frac{k-\nu_0}{k+\nu_0}\right) \quad (3.21)$$

由 (2.26) 和 (2.36)~(2.38) 不难证明上述结论。

这里, 从一般情形证明了文[1], [3]的一些数值结果。例如, 当  $k < 1$  或  $k = 1$  或  $P \neq 0$  时弯曲应力  $\sigma_+^!$ ,  $\sigma_{+0}^!$  会在  $x=0$  处出现奇性, 尽管[1]和[3]用摄动法和配置法分别针对数值解曾指出过这一点, 但是, 这里的 (3.18) 式给出了较为一般的定性结论。

#### 四、双边单调迭代和解的存在唯一性

现在, 讨论 (2.24) 的求解。应用简单迭代<sup>[11]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(x) &= \varphi_0(x) - \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, \xi) G_2(\xi, \eta) [\varphi^{(n)}(\eta)]^2 \varphi^{(n)}(\xi) d\xi d\eta \\ \varphi^{(0)}(x) &= 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

由 (2.16b) 和 (2.12), (2.25), (2.26) 构造如下迭代格式:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_+^{(n)}(x) \\ \sigma_+^{(n)}(x) \\ u^{(n)}(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \int_0^1 a_2(x, \xi) [\varphi^{(n)}(\xi)]^2 d\xi \\ - \int_x^1 a_3(x, \xi) [\varphi^{(n-1)}(\xi)]^2 d\xi \\ - \int_0^x \begin{bmatrix} \beta_1(x, \xi) \\ \beta_2(x, \xi)/k \\ \beta_3(x, \xi) \end{bmatrix} [\varphi^{(n-1)}(\xi)]^2 d\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/kx \\ 1/x \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_+^{(n)}(x) \\ \sigma_+^{(n)}(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma_{+0}^{(n)}(x) \\ \sigma_{+0}^{(n)}(x) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int_0^1 a_1(x, \xi) \psi^{(n-1)}(\xi) \varphi^{(n-1)}(\xi) d\xi \\ - \int_x^1 a_3(x, \xi) \psi^{(n)}(\xi) \varphi^{(n)}(\xi) d\xi \\ - \int_0^x \begin{bmatrix} \beta_4(x, \xi) \\ \beta_5(x, \xi) \end{bmatrix} \psi^{(n)}(\xi) \varphi^{(n)}(\xi) d\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/kx \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$w^{(n)}(x) = \int_x^1 \varphi^{(n)}(\xi) d\xi \quad (4.4)$$

在 (4.2)~(4.4) 中  $n=1, 2, \dots$  并且

$$\psi^{(n)}(\xi) = \int_0^1 G_2(x, \xi) [\varphi^{(n)}(\xi)]^2 d\xi \quad (4.5)$$

$\alpha_i(x, \xi)$ ,  $\beta_i(x, \xi)$  由 (2.28), (2.29) 给出,  $\varphi_0(x)$  见 (2.32), (2.33) 式.

**定理 4.1** 假定 (2.24) 在  $[0, 1]$  上存在连续有界解  $\varphi(x)$ , 若  $f(x) \geq 0$  且

$$\varphi^{(2)}(x) = \varphi_0(x) - \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, \xi) G_2(\xi, \eta) [\varphi_0(\eta)]^2 \varphi_0(\xi) d\xi d\eta \geq 0 \quad (4.6)$$

则由 (4.1)~(4.5) 得到的迭代解序列具有如下性质:

(i) 两个迭代解子序列是单调的, 即

$$0 \leq \varphi^{(2s)}(x) \leq \varphi^{(2s+2)}(x) \leq \dots, \dots \leq \varphi^{(2s+1)}(x) \leq \varphi^{(2s-1)}(x) \leq \varphi_0(x) \quad (4.7)$$

(ii) 两个迭代解子序列分别给出解  $\varphi(x)$  的上限近似和下限近似, 即

$$\varphi^{(2s)}(x) \leq \varphi(x) \leq \varphi^{(2s+1)}(x) \quad (s=0, 1, 2, \dots) \quad (4.8)$$

(iii) 迭代解序列  $\sigma_0^{(n)}$ ,  $\sigma_0^{(n)}$ ,  $u^{(n)}$ ,  $w^{(n)}$ ,  $\sigma_0^{(n)}$ ,  $\sigma_0^{(n)}$  和  $\psi^{(n)}(x)$  亦具有与  $\varphi^{(n)}(x)$  相同的单调性质 (见 (4.7) 式) 和双边逼近性质 (见 (4.8) 式).

注意到积分核  $G_j$  ( $j=1, 2$ ) 的非负性, 用数学归纳法, 由  $0 = \varphi^{(0)}(x) \leq \varphi(x) \leq \varphi^{(1)}(x) = \varphi_0(x)$  出发, 不难由 (4.1) 证明 (4.7), (4.8). 同理由 (4.2)~(4.5) 和 (2.25), (2.26), (2.16), (2.12) 可证定理中的结论 (iii).

这里, 推广了 [11] 中的简单迭代法, 其中定理 4.1 的结论 (ii), (iii) 是本文所得到的新结论. 它对于实际求解无疑有重要意义. 鉴于迭代格式 (4.1)~(4.5) 所给出的迭代序列具有双边单调逼近精确解的特征, 故称其为“双边单调迭代解”.

下面讨论双边单调迭代解的收敛性条件和误差估计以及非线性问题解的存在唯一性.

考察非线性映象

$$Az(x) = \varphi_0(x) - \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, \xi) G_2(\xi, \eta) [z(\xi)]^2 z(\eta) d\xi d\eta \quad (4.9)$$

其中  $\varphi_0(x)$  是由 (2.32), (2.33) 给出的  $[0, 1]$  上的连续函数,  $z \in \Gamma$ ,  $\Gamma = \{z | z \in C[0, 1], 0 \leq z \leq \varphi_0 \text{ 且 } \varphi_0(x) \text{ 满足 (4.6)}\}$ . 由 (4.9) 和 (4.6) 知, 对  $\forall z \in \Gamma$ ,  $Az(x) \in C[0, 1]$  且  $0 \leq Az(x) \leq \varphi_0(x)$ , 即算子  $A: \Gamma \rightarrow \Gamma$ . 此外, 由 (4.9) 有

$$\|Az_1 - Az_2\| \leq \rho \|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_1, z_2 \in \Gamma \quad (4.10)$$

其中,  $\|\cdot\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |\cdot|$  为空间  $C[0, 1]$  的范数, 并且

$$\rho = \max_{0 \leq x \leq 1} \left( \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, \xi) G_2(\xi, \eta) [\varphi_0^2(\eta) + 2\varphi_0(\eta)\varphi_0(\xi)] d\xi d\eta \right) \quad (4.11)$$

因而, 若  $\rho < 1$ , 则  $A$  为压缩映象.

**定理 4.2** 若  $f(x) \geq 0$ ,  $\rho < 1$  且  $\varphi_0(x)$  满足条件 (4.6). 则有

(a) 方程 (2.24) 有唯一的连续有界解  $\varphi(x)$ ;

(b) 由 (4.1) 给出的迭代解在  $[0, 1]$  上按“双边单调逼近”的方式一致收敛到 (2.24) 的唯一性  $\varphi(x)$ . 同样, 由 (4.2)~(4.5) 给出的各力学量的迭代解亦在  $[0, 1]$  上双边单调地一致收敛到各自的唯一解.

(c) 对于  $\varphi^{(n)}(x)$  有如下显式误差估计式:

$$|\varphi^{(n)}(x) - \varphi(x)| \leq |\varphi^{(n+1)}(x) - \varphi^{(n)}(x)| \leq \rho^n |\varphi_0| \quad (n=1, 2, \dots) \quad (4.12)$$

事实上, 根据Banach不动点定理<sup>[14]</sup>, 在 $\Gamma$ 内有 $A$ 的唯一不动点, 即方程 (2.24) 存在局部唯一解 $\varphi(x)$  (在 $C[0, 1]$ 上), 且满足 $0 \leq \varphi(x) \leq \varphi_0(x)$ . 假如 (2.24) 还有其他的连续有界解 $\bar{\varphi}(x) \neq \varphi(x)$ , 则至少有一点 $x' \in [0, 1]$ 使得 $\bar{\varphi}(x') > \varphi_0(x')$ 或者 $\bar{\varphi}(x') < 0$ . 但是, 由定理3.1知这是不可能的. 因此,  $\Gamma$ 中的局部唯一解 $\varphi(x)$ 亦是 $C[0, 1]$ 全空间上的唯一解, 即证结论(a). 注意到定理4.1的结论(ii), 由 (2.24), (4.1) 和 (4.9)~(4.11) 可得 (4.12).  $\{\varphi^{(n)}(x)\}$ 的一致收敛性可由 (4.12) 得证, 再由 (2.25), (2.26), (2.12), (2.16) 和 (4.2)~(4.5) 可证结论 (b).

定理4.2的结论 (b) 在一般情形下推广了[11]的相应结论, (a), (c) 是本文给出的新结论. 例如, (4.12) 式给出迭代次数与误差的显式关系, 这对于求解 $\varphi(x)$ 来说无疑是一个重要结论.

## 五、数值例子

本节将给出一个算例以说明前一节结论和方法的应用.

考虑一极正交圆板承受边缘弯矩载荷 $M > 0$ 且边缘弹性支承 (非夹紧) 的非线性弯曲问题.

此时,  $\mu_1 \approx -1$ , 由 (2.5) 和 (2.33) 有

$$f(x) = M\delta(x-1) > 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (5.1)$$

$$\varphi_0(x) = Ax^k = \varphi^{(1)}(x) \quad (5.2)$$

其中, 载荷参数

$$A = \frac{1 + \mu_1}{2k} M = \|\varphi_0(x)\| = \max_{0 \leq x \leq 1} \varphi_0(x) > 0 \quad (5.3)$$

将 (5.2) 代入 (4.6) 有

$$\varphi^{(2)}(x) = Ax^k(1 - A^2 g_1(x)) \quad (5.4)$$

其中,

$$g_1(x) = T_1 + T_2 x^{k+1} + T_3 (x^{k+1})^2 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{4k^2} \left[ \left( \frac{\mu_1}{3k+1} + \frac{1}{k+1} \right) \left( \frac{\mu_2}{3k+1} + \frac{1}{k+1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\mu_1}{4k+2} + \frac{1}{2k+2} \right) \left( \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{k+1} \right) \right] \\ T_2 &= \frac{1}{4k^2} \left( \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{k+1} \right) \left( \frac{\mu_2}{3k+1} + \frac{1}{k+1} \right) \\ T_3 &= \frac{1}{4k^2} \left( \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{2k+2} \right) \left( \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{k+1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

$$\text{由 (2.22) 有} \quad T_1 > 0, \quad T_2 < 0, \quad T_3 > 0, \quad T_2 + T_3 < 0 \quad (5.7)$$

$$\text{因此,} \quad T_1 = \max_{0 \leq x \leq 1} g_1(x) = g_1(0) \quad (5.8)$$

故有结论, 如果 $A < A_1 = 1/\sqrt{T_1}$ , 那么条件 (4.6) 可被满足, 即有定理4.1的结论成立.

将 (5.2) 代入 (4.11) 可得

$$\rho = A^2 \max_{0 \leq x \leq 1} g_2(x) \quad (5.9)$$

$$\text{其中} \quad g_2(x) = S_1 x^k + S_2 x^{k+1} + S_3 x^{2k+1} + S_4 x^{2k+2} \quad (5.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{4k^2} \left[ \left( \frac{\mu_1}{2k+1} + 1 \right) \left( \frac{\mu_2}{3k+1} + \frac{1}{k+1} \right) + \left( \frac{\mu_1}{3k+1} + \frac{1}{k+1} \right) \left( \frac{2\mu_2}{2k+1} + 2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\mu_1}{3k+2} + \frac{1}{k+2} \right) \left( \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{2}{2k+1} - 2 \right) \right] \\
 S_2 &= \frac{1}{4k^2} \left( \frac{1}{2k+1} - 1 \right) \left( \frac{\mu_2}{3k+1} + \frac{1}{k+1} \right) \\
 S_3 &= \frac{1}{4k^2} \left( \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{k+1} \right) \left( \frac{2\mu_2}{2k+1} + 2 \right) \\
 S_4 &= \frac{1}{4k^2} \left( \frac{1}{3k+2} - \frac{1}{k+2} \right) \left( \frac{1}{3k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{2}{2k+1} - 2 \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

由 (2.22) 有

$$S_1 \geq 0, S_2 \leq 0, S_3 \leq 0, S_4 \geq 0, S_2 + S_3 + S_4 \leq 0 \quad (5.12)$$

因此,  $g_2(x) \leq x^k [S_1 + (S_2 + S_3 + S_4)x^{2k+2}] \leq S_1$

$$\text{记 } A_2 = (\max_{0 < x < 1} g_2(x))^{-1/2} \geq 1/\sqrt{S_1} \quad (5.13)$$

如果  $A < 1/\sqrt{S_1} \leq A_2$ , 由 (5.9) 知  $\rho < 1$ . 比较 (5.6) 和 (5.11) 知

$$S_1 \geq T_1 \quad (5.14)$$

因此, 当  $A < 1/\sqrt{S_1}$  时, 定理 4.2 中的条件均可被满足, 故有定理 4.2 的结论成立.

根据 (5.2), (5.4) 和 (5.5), 假设  $\varphi^{(n)}(x)$  具有形式

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{N(n)} A_i^{(n)} x^{(i+1)k+i} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (5.15)$$

将 (5.15), (5.2) 代入 (4.1) 得到

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \sum_{i=0}^{3N(n)+2} A_i^{(n+1)} x^{(i+1)k+i} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (5.16)$$

此式表明将  $\varphi^{(n)}(x)$  假设成 (5.15) 的形式是正确的. (5.16) 中系数  $A_i^{(n+1)}$  ( $i=0, 1, 2, \dots, 3N(n)+2$ ) 可由如下递推公式得到:

$$A_0^{(1)} = A \quad (5.17)$$

$$\left. \begin{aligned}
 B_i^{(n)} &= \frac{1}{2k} U_{i-1}^{(n)} \left( \frac{1}{(i+2)k+i} - \frac{1}{i(k+1)} \right) \\
 &\quad (i=1, 2, \dots, 2N(n)+1) \\
 B_0^{(n)} &= \frac{1}{2k} \sum_{s=0}^{2N(n)} U_s^{(n)} \left( \frac{\mu_2}{(s+3)k+s+1} + \frac{1}{(s+1)k+s+1} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

其中

$$U_i^{(n)} = \sum_{\substack{i+j=s \\ 0 \leq i \leq N(n) \\ 0 \leq j \leq N(n)}} A_i^{(n)} A_j^{(n)} = \begin{cases} \sum_{i=0}^s A_i^{(n)} A_{s-i}^{(n)} & (0 \leq s \leq N(n)) \\ \sum_{i=s-N(n)}^{N(n)} A_i^{(n)} A_{s-i}^{(n)} & (N(n)+1 \leq s \leq 2N(n)) \end{cases} \quad (5.19)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0^{(n+1)} &= A_0^{(1)} - \frac{1}{2k} \sum_{s=0}^{3N(n)+1} V_s^{(n)} \left( \frac{\mu_1}{(s+3)k+s+1} - \frac{1}{(s+1)k+s+1} \right) \\ A_i^{(n+1)} &= -\frac{1}{2k} V_{i-1}^{(n)} \left( \frac{1}{(i+2)k+i} - \frac{1}{i(k+1)} \right) \\ &\quad (i=1, 2, \dots, 3N(n)+2) \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

其中

$$V_s^{(n)} = \sum_{\substack{i+j=s \\ 0 \leq i \leq N(n) \\ 0 \leq j \leq 2N(n)}} A_i^{(n)} B_j^{(n)} = \begin{cases} \sum_{i=0}^s A_i^{(n)} B_{s-i}^{(n)} & (0 \leq s \leq N(n)) \\ \sum_{i=0}^{N(n)} A_i^{(n)} B_{s-i}^{(n)} & (N(n)+1 \leq s \leq 2N(n)+1) \\ \sum_{i=s-2N(n)-1}^{N(n)} A_i^{(n)} B_{s-i}^{(n)} & (2N(n)+2 \leq s \leq 3N(n)+1) \end{cases} \quad (5.21)$$

将 (5.15) 式中的  $n$  换成  $n+1$  后与 (5.16) 进行比较得

$$N(n+1) = 3N(n) + 2 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (5.22a)$$

再由 (5.12), (5.13) 显然有

$$N(1) = 1 \quad (5.22b)$$

用归纳法可由 (5.22) 解出

$$N(n) = 2 \sum_{i=0}^{n-2} 3^i = 3^{n-1} - 1 \quad (5.23)$$

将 (5.15) 代入 (4.2)~(4.5) 可得其它量的迭代解。

综上所述, 有结论: 若  $A < 1/\sqrt{S_1}$ , 则方程 (2.24) 关于本书算例的解是存在唯一的, 并且可表成

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{3^n-1} A_i^{(n)} x^{(i+1)k+i} \quad (5.24)$$

迭代解  $\varphi^{(n)}(x)$  (见 (5.15), (5.17)~(5.21)) 按“双边单调逼近”的方式一致收敛到精确解  $\varphi(x)$ 。此外, 有误差估计

$$\|\varphi^{(n)}(x) - \varphi(x)\| \leq A(A^2 S_1)^n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (5.25)$$

对于其它未知量也有类似结论。

当给定载荷参数  $A$ , 材料参数  $k$ ,  $\nu_0$  和边缘约束参数  $K_i, K_b$  后, 可由 (5.24) 对  $\varphi(x)$  进行数值求解。这里取  $\nu_0 = 0.2$ ,  $k = 0.75, 1, 2$ , 边缘为可移简支。

我们知道 Kármán 板理论作了如下简化假设:

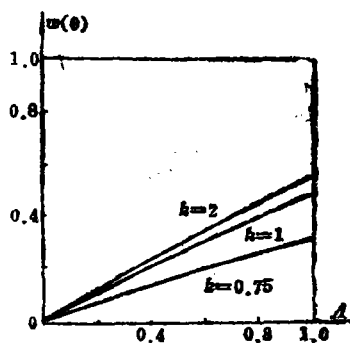
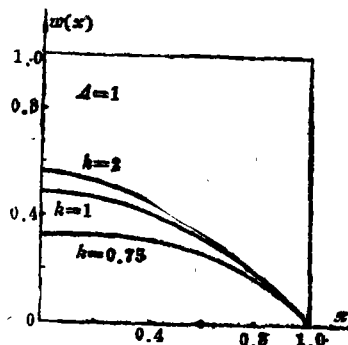
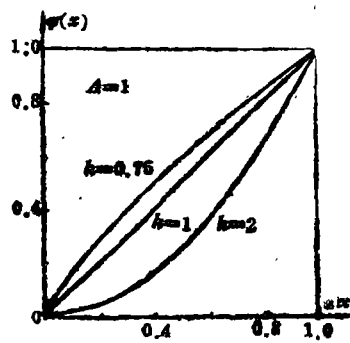
$$\varphi^* \approx \sin \varphi^* \approx \tan \varphi^* \quad (5.26)$$

$$\text{其中,} \quad \varphi^* = \frac{h}{a\sqrt{6(k^2 - \nu_0^2)}} \varphi \quad (5.27)$$

在相对误差不超过 5% 的限制下 (5.26) 成立的大致范围是  $\varphi^* \in [0^\circ, 5^\circ]$ 。虽然, 本文迭代

解在 $\varphi^* > 5^\circ$ 时仍可收敛, 但是, 当 $\varphi^* \gg 5^\circ$ 时, Kármán理论将不适用。基于这点考虑, 这里不打算计算较大载荷参数下的解。取 $h/a=0.2$ ,  $A=1$ , 对于 $k=2, 1, 0.75$ 分别得到 $\varphi^*(x)$ 的最大值为 $2.5^\circ, 4.7^\circ, 6.3^\circ$ 。  $1/\sqrt{S_1}$ 分别为7.1697, 2.9631, 2.8612。因此, 对于本节算例来说当 $0 \leq A \leq 1$ 时Kármán板理论可以适用, 而且解在此范围亦是存在唯一的。

挠度响应曲线由图2所示, 转角 $\varphi(x)$ 和挠度 $w(x)$ 的解依赖于参数 $k$ 的曲线由图3, 图4给出。

图2 挠度~载荷曲线关于 $k$ 的影响图3  $k$ 对挠度解 $w(x)$ 的影响图4  $k$ 对转角解 $\varphi(x)$ 的影响

## 参 考 文 献

- [1] Nash, Y. and R. S. Alwar, Nonlinear dynamic analysis of orthotropic circular plates, *Int. J. Solid Structures*, 16 (1980), 433-443.
- [2] Nowinski, J., Cylindrically orthotropic circular plates, *ZAMP*, 11 (1960), 218-228.
- [3] Gandhi, M. L., P. C. Dumir and Y. Nath, Nonlinear axisymmetric static analysis of orthotropic thin circular plates with elastically restrained edge, *Computer Structures*, 20 (1985), 841-853.
- [4] Shilkrut, D., Investigations of axisymmetric deformation of geometrically nonlinear, rotationally orthotropic, circular plates, *Int. of Non-Linear Mech.*, 18 (1983), 95-118.
- [5] Cheo, L. S. and E. L. Reiss, Unsymmetric wrinkling of circular plates, *Q. Appl. Math.*, 75 (1973), 75-91.
- [6] Yanowitch, M., Nonlinear buckling of circular plates, *Comm. Pure Appl. Math.*, 9 (1958), 661.
- [7] Vol'mir, A. S., *Flexible Plates and Shells*, Moscow (1956). (in Russian)
- [8] Reiss, E. L., A uniqueness theorem for the nonlinear axisymmetric bending of circular plates, *AIAA J.*, 1 (1963), 2650-2652.
- [9] Weinitschke, H. J., On uniqueness of axisymmetric deformations of elastic plates and shells, *SIAM J. Math. Anal.*, 19 (1988), 580-592.
- [10] 尚新春、程昌钧, 圆板非线性轴对称弯曲的定性分析 (待发表)。
- [11] Keller, H. B. and E. L. Reiss, Iterative solutions for the nonlinear bending of circular plates, *Comm. Pure Appl. Math.*, 11 (1958), 273-298.
- [12] Lekhnitskii, S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden-Day Sense in Mathematical Physics, Julius J. Brandstuffer, Ed. (1963), 85.

- [13] Lekhnitskii, S. G., *Anisotropic Plates*, Moscow (1957). (in Russian)
- [14] Mason, J., *Methods of Functional Analysis for Application in Solid Mechanics*, Elsevier Sci. Pubs. B. V., Amsterdam (1985), 82—83.
- [15] Roseau, M, *Equations Differentielles*, Masson (1976).中译本,《常微分方程》,叶彦谦译,上海科学技术出版社出版(1981).
- [16] Oden, J. T., *Qualitative Methods in Nonlinear Mechanics*, Noordhoff Int. Pubs. Leyden (1977).
- [17] Weinitschke, H.J., Some mathematical problems in the nonlinear theory of elastic membranes, plates and shells, *Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics*, G. Fichera, Ed. Pitman Pub. London (1976).

## Qualitative Investigation and Monotonic Iterative Solutions for Nonlinear Bending of Polar Orthotropic Circular Plates

Shang Xin-chun    Cheng Chang-jun

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou)

### Abstract

This paper presents a systematical investigation of the nonlinear bending of polar orthotropic circular plates under arbitrarily axisymmetric loads and a variety of boundary conditions. Firstly, the boundary value problem reduces to the equivalent integral equations, and the solutions to the linearized problem are given by means of generalized functions. Secondly, the general properties of the solutions of the nonlinear integral equations are investigated in detail, such as, wrinkling, non-negativity, and singularity etc. Then, the monotonic iterative solutions are formally given and the convergence criteria and the global uniqueness of the solutions are discussed. The error estimate of the iterative process is obtained. Finally, a special example is discussed, which shows that the conclusions and methods of this paper are valid. Several results in the paper are presented for the first time.

**Key words** nonlinear bending, qualitative analyses, monotonic iterative solutions, convergence criteria, global uniqueness, estimation of error