

精确有限元法*

叶开沅 纪振义

(兰州大学力学系) (安徽建筑工业学院)

摘 要

本文提出构造有限单元的新方法——精确有限元法。它可以求解在任意边界条件下任意变系数正定或非正定偏微分方程。文中给出它的收敛性证明和计算偏微分方程的一般格式。用精确元法所得到的单元是一个非协调元, 单元之间的相容条件容易处理。与相同自由度普通有限元相比, 由精确元法所得到的解的高阶导数具有较高的收敛精度。文末给出数值算例, 所得到的结果均收敛于精确解, 并有较好的数值精度。

关键词 精确有限元 偏微分方程 热传导 薄板

一、引 言

工程和自然科学许多实际问题可归结为求解带有边值或初值问题的偏微分方程。一般地, 有限元求解偏微分方程是以变分法为基础的^[1], 需要偏微分方程是正定的。并且在单元之间需要满足一些必要的相容条件。例如, 对 $2k$ 阶方程, $k-1$ 阶法向导数须在单元之间连续。当 $k \geq 2$ 时, 找到满足于相容条件的形函数是很困难的。

在[2]中, 利用力学概念给出阶梯折算法, 用以求解非均匀弹性力学, [3]中给出散度型变系数微分方程矩阵迁移方法。[4]中提出精确解析法理论, 用以求解任意变系数常微分方程。文中给出的解析解可一致收敛于精确解。本文在[2~4]的基础上, 提出精确有限元法, 用于求解任意变系数偏微分方程。

精确元法不需用一般变分原理, 单元的刚度矩阵可直接从偏微分方程推出, 因此可用于求解任意变系数非正定偏微分方程。单元的插值函数仅需满足一个带有常系数的偏微分方程, 利用这一条件可减少单元的自由度。相容条件仅需待求的参数在单元之间的节点上连续, 因此容易满足。与相同自由度普通有限元法相比, 由精确有限元法所求得的解的高阶导数具有较高的精度。此外这一方法不需在单元域内进行数值积分, 节点载荷在工程中具有明显的物理意义。

文末给出三个数值算例, 所得到的结果均收敛于精确解, 并有较好的数值精度, 证明了本文理论的正确性。

* 1990年2月22日收到。

二、精确元的基本理论

一个 k 阶任意变系数线性偏微分方程可归结为一般形式

$$Aw = \sum_{\substack{m=0 \\ 0 \leq |u_m| + |v_m| \leq k}}^k D^{u_m}(P_{v_m}(x) D^{v_m} w(x)) = f(x) \quad (x \in \Omega) \quad (2.1)$$

式中 x 表示向量 (x_1, \dots, x_n) , Ω 表示 n 维空间, u_m 是一个多重指标表示为

$$u_m = (u_{1m}, u_{2m}, \dots, u_{nm})$$

其模

$$|u_m| = u_{1m} + u_{2m} + \dots + u_{nm}$$

算子

$$D^{u_m} = \frac{\partial^{|u_m|}}{\partial x_1^{u_{1m}} \dots \partial x_n^{u_{nm}}}, \quad D^{v_m} = \frac{\partial^{|v_m|}}{\partial x_1^{v_{1m}} \dots \partial x_n^{v_{nm}}}$$

此外, 我们定义

$$u = \max(|u_m|), \quad v = \max(|v_m|) \quad (m=0, 1, \dots, k)$$

并假定

$$k = u + v$$

利用精确元法, 把空间 Ω 分成 N 个单元, 设第 i 个单元的空间为 Ω_i . 在第 i 个单元上如果 $w(x)$ 的 v 阶偏导数及 $P_{v_m}(x) D^{v_m} w(x)$ 的 $u-1$ 阶偏导数连续, 则方程 (2.1) 可以转化为常系数偏微分方程

$$\bar{A}_i \bar{w}(x) = \sum_{\substack{m=0 \\ 0 \leq |u_m| + |v_m| \leq k}}^k D^{u_m}(P_{v_m}(\bar{x}_i) D^{v_m} \bar{w}) = f(x) \quad (x \in \Omega_i) \quad (2.2)$$

式中 \bar{x}_i 为单元的形心坐标. 因为 (2.1) 和 (2.2) 是线性方程, 因此内积

$$(\varphi, Aw - \bar{A}\bar{w}) = \left(\varphi, Aw - \sum_{i=1}^N \bar{A}_i \bar{w} \right) = 0 \quad (2.3)$$

式中 φ 是索伯列夫空间 $W_2^{(u,v)}(\Omega)$ 中的一个任意元素.

为描述简单起见, 我们仅考虑 Ω 是一个二维空间, 即 $x = (x_1, x_2)$, 单元的网格划分如图 1 所示. 利用分部积分, 由 (2.3) 我们可得

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^k \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \varphi D^{u_m}(P_{v_m}(x) D^{v_m} w(x) - P_{v_m}(\bar{x}_i) D^{v_m} \bar{w}(x)) dx \\ &= (A^* \varphi, w - \bar{w}) + \sum_{m=0}^k (-1)^{|u_m|} \\ & \cdot \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (P_{v_m}(x) - P_{v_m}(\bar{x}_i)) D^{u_m} \varphi D^{v_m}(w(x) - \bar{w}(x)) dx \end{aligned}$$

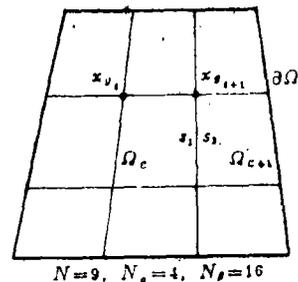


图 1 二维空间中单元网格划分

$$+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^u \oint_{\partial \Omega_i} \frac{\partial^{j-1} \varphi}{\partial n^{j-1}} (F^j w(x) - \bar{F}^j \bar{w}(x)) dx$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{z=1}^{N_a} (F_l^j w(x_{iz}) - \bar{F}_l^j \bar{w}(x_{iz})) \frac{\partial^{j-2} \varphi}{\partial x_1^{l-1} \partial x_2^{l-1}} \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^u \oint_{\partial \Omega_i} \frac{\partial^{j-1}}{\partial n^{j-1}} (w(x) - \bar{w}(x)) F_l^j * \varphi(x) ds \\
 & + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{z=1}^{N_a} \frac{\partial^{j-2}}{\partial x_1^{l-1} \partial x_2^{l-1}} (w(x_{iz}) - \bar{w}(x_{iz})) F_l^j * \varphi(x_{iz}) \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

式中 F_l^j, \bar{F}_l^j 和 $F_l^j *$ ($l=1, \dots, j$) 是由分部积分得到的微分算子, 在工程和自然科学中, 它们可具有明显的物理意义. $\partial \Omega_i$ 是单元的边界, A^* 是算子 A 的共扼算子, $\partial/\partial n$ 是单元边界上的法向导数, x_{iz} 是第 i 个单元上第 z 个角点的坐标, N_a 是单个单元的角点数. 合并同类项, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{z=1}^{N_a} (F_l^j w(x_{iz}) - \bar{F}_l^j \bar{w}(x_{iz})) \frac{\partial^{j-2} \varphi}{\partial x_1^{l-1} \partial x_2^{l-1}} \\
 & = \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{i=1}^{N_\beta} (R_l^j(x_{\theta i}) - \bar{R}_l^j(x_{\theta i})) \frac{\partial^{j-2} \varphi}{\partial x_1^{l-1} \partial x_2^{l-1}} \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{z=1}^{N_a} \frac{\partial^{j-2}}{\partial x_1^{l-1} \partial x_2^{l-1}} (w(x_{iz}) - \bar{w}(x_{iz})) \cdot F_l^j * \varphi(x_{iz}) \\
 & = \sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{i=1}^{N_\beta} \frac{\partial^{j-2}}{\partial x_1^{l-1} \partial x_2^{l-1}} (w(x_{\theta i}) - \bar{w}(x_{\theta i})) R_l^j * (x_{\theta i}) \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

式中 N_β 是 Ω 上单元公共角点的个数, $x_{\theta i}$ 是第 i 个公共角点的坐标.

如果在任意相邻单元的边界 s_1 和 s_2 上有

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{s_1} \frac{\partial^{j-1} \varphi}{\partial n^{j-1}} \bar{F}_l^j \bar{w}(x) ds & = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{s_2} \frac{\partial^{j-1} \varphi}{\partial n^{j-1}} \bar{F}_l^j \bar{w}(x) ds \quad (j=1, \dots, u) \\
 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{s_1} \frac{\partial^{i-1}}{\partial n^{i-1}} \bar{w}(x) \cdot F_l^i * \varphi(x) ds & = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{s_2} \frac{\partial^{i-1}}{\partial n^{i-1}} \bar{w}(x) \cdot F_l^i * \varphi(x) ds \\
 & (i=1, \dots, v) \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

在边界 $\partial \Omega$ 上

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^{j-1} \varphi(x)}{\partial n^{j-1}} \bar{F}_l^j \bar{w}(x) ds & = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^{j-1} \varphi(x)}{\partial n^{j-1}} F_l^j w(x) ds \quad \left(\begin{array}{l} j=1, \dots, u \\ \text{当 } F_l^j w(x) \text{ 已知时} \end{array} \right) \\
 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^{i-1} \bar{w}(x)}{\partial n^{i-1}} F_l^i * \varphi(x) ds & = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial \Omega} \frac{\partial^{i-1} w(x)}{\partial n^{i-1}} F_l^i * \varphi(x) dx \\
 & (i=1, \dots, v; \text{当 } \partial^{i-1} w(x) / \partial n^{i-1} \text{ 已知时}) \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

以及在角点上

$$\bar{R}_l^j(x_{\theta i}) = R_l^j(x_{\theta i}) \quad (i=1, \dots, N_\beta; \text{当 } R_l^j(x_{\theta i}) \text{ 已知时})$$

$$\frac{\partial^{j-2}w}{\partial x_1^{j-1-1}\partial x_2^{j-1}}(x_{st}) = \frac{\partial^{j-2}w}{\partial x_1^{j-1-1}\partial x_2^{j-1}}(x_{st})$$

$$(i=1, \dots, N_\beta, \text{ 当 } \frac{\partial^{j-2}w}{\partial x_1^{j-1-1}\partial x_2^{j-1}}(x_{st}) \text{ 已知时}) \quad (2.8)$$

从方程(2.4)可以得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (A^* \varphi, w - \bar{w}) = 0 \quad (2.9)$$

这里已假定在 Ω 上 $F_i^j * \varphi(x)$ 和 $F_i^j w(x) (i=1, \dots, v, j=1, \dots, u)$ 连续, 并让未知边界条件对应的共扼边界条件等于零.

根据Hilbert-伴随算子逆定理, 当 A 在给定的边界条件下有逆算子 A^{-1} 时, 逆算子 $(A^*)^{-1}$ 在零共扼边界条件下也存在. 特别地, 当

$$A^* \varphi = w - \bar{w}$$

时有唯一解 $\varphi \in \omega_2^{(v)}(\Omega)$, 使 $F_i^j * \varphi(x)$ 在 Ω 上连续. 因此我们有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|w - \bar{w}\|_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (2.10)$$

在子空间 $\Omega - \Omega_\epsilon$ 中, 利用(2.10), 连续条件(2.6), 已知边界条件(2.7)~(2.8)和未知边界条件对应的零共扼边界条件, 可得

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} \varphi (Aw - \bar{A}w) d\Omega &= - \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\int_{\partial\Omega_\epsilon} \left(\sum_{j=1}^u \frac{\partial^{j-1}\varphi}{\partial n^{j-1}} (F_i^j w(x) - \bar{F}_i^j w(x)) \right) \right. \\ &+ \sum_{i=1}^v \frac{\partial^{i-1}}{\partial n^{i-1}} (w(x) - \bar{w}(x)) F_i^i * \varphi(x) ds \\ &+ \sum_{s=1}^{N_\epsilon} \left(\sum_{j=1}^u \sum_{l=1}^{j-1} (F_i^j w(x_{s\epsilon}) - \bar{F}_i^j w(x_{s\epsilon})) \frac{\partial^{j-2}\varphi}{\partial x_1^{j-1-1}\partial x_2^{j-1}} \right. \\ &\left. \left. + \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{i=1}^v \frac{\partial^{j-2}}{\partial x_1^{j-1-1}\partial x_2^{j-1}} (w(x_{s\epsilon}) - \bar{w}(x_{s\epsilon})) \cdot F_i^i * \varphi(x_{s\epsilon}) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

这里 ϵ 是 Ω 中的任一个单元, 由 $F_i^j * \varphi, \frac{\partial^{j-1}\varphi}{\partial n^{j-1}}$ 和 $\frac{\partial^{j-2}\varphi}{\partial x_1^{j-1-1}\partial x_2^{j-1}}$ 的任意性, 我们可得

$$\left. \begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial^{j-1}\varphi}{\partial n^{j-1}} \bar{F}_i^j w(x) ds &= \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial^{j-1}\varphi}{\partial n^{j-1}} F_i^j w(x) ds \quad (j=1, \dots, u) \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial^{i-1}}{\partial n^{i-1}} \bar{w}(x) \cdot F_i^i * \varphi(x) ds &= \int_{\partial\Omega_\epsilon} \frac{\partial^{i-1}}{\partial n^{i-1}} w(x) \cdot F_i^i * \varphi(x) ds \\ &\quad (i=1, \dots, v) \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{F}_i^l w(x_{s\epsilon}) &= F_i^l w(x_{s\epsilon}) \quad (j=1, \dots, u; l \leq j-1) \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial^{i-2}}{\partial x_1^{i-1-1}\partial x_2^{i-1}} \bar{w}(x_{s\epsilon}) &= \frac{\partial^{i-2}}{\partial x_1^{i-1-1}\partial x_2^{i-1}} w(x_{s\epsilon}) \\ &\quad (i=1, \dots, v; l \leq i-1) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

由(2.12)式不难得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\partial^{i-1}}{\partial n^{i-1}} \bar{w}(x) = \frac{\partial^{i-1}}{\partial n^{i-1}} w(x) \quad (i=1, \dots, v) \quad (2.13)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{F}^j \bar{w}(x) = F^j w(x) \quad (j=1, \dots, u) \quad \left. \begin{array}{l} \text{在 } \partial\Omega_0 \text{ 上} \\ \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

对于 \$\Omega\$ 上的一个任意闭子空间 \$\bar{\Omega}_0\$, 我们也可获得(2.13)和(2.14). 因此可得到在一固定点, 对任意的法线单位矢量 \$n\$, (2.13)和(2.14)式仍成立. 利用这个结论, 我们从(2.14)中的第一式可以得到 \$w(x)\$ 的第 \$i\$ 阶偏导数 \$D^i w(x)\$ 收敛于精确解 \$D^i w (i=1, \dots, v)\$, 从(2.14)中的第二式可以求出精确解 \$v+j-1\$ 阶偏导数 \$D^{v+j-1} w(x)\$ 的值 \$(j=1, \dots, u)\$.

三、精确元法的一般格式

现在, 我们利用精确元法求解方程(2.1). 为简单起见, 仍以二维空间为例. 可取单元形状为三角形和四边形, 如图 2 所示.

我们不难得到第 \$i\$ 在个单元上, 满足(2.2)的解为

$$w(x) = \sum_{j=1}^n \phi_{ij}(x) C_{ij} + \phi_i^*(x) \quad (x \in \Omega_i) \quad (3.1)$$

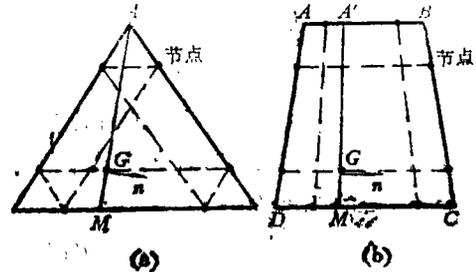


图2 三角形和四边形单元

这里 \$\phi_{ij}(x)\$ 是基本解, \$\phi_i^*(x)\$ 是特解, \$C_{ij}\$ 是待定常数. 当 \$N \rightarrow \infty\$ 时, \$w(x)\$ 应当能够满足连续条件(2.6)和边界条件(2.7). 我们在单元的边界上设置 \$m\$ 个边节点. 为了得到高阶收敛精度, 它们应当放在高斯求积的节点 \$\xi_k^{(m)} (k=1, \dots, m)\$ 上. 适当地选择待定系数 \$C_{ij}\$ 的个数和值, 矢量

$$\left. \begin{array}{l} \{W\} = \left\{ w \quad \frac{\partial w}{\partial n} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \quad \dots \quad \frac{\partial^v w}{\partial n^v} \right\}^T \\ \{\bar{F}_u\} = \{ \bar{F}_1^u w(x) \quad \bar{F}_2^u w(x) \quad \dots \quad \bar{F}_m^u w(x) \}^T \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

能够在两相邻单元的内边节点上连续,

$$\left. \begin{array}{l} \{W_1\} = \left\{ w \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial^{v-2} w}{\partial x_2^{v-2}} \right\}^T \\ \{\bar{F}_1\} = \{ \bar{F}_2^1 w(x) \quad \bar{F}_3^1 w(x) \quad \bar{F}_4^1 w(x) \quad \dots \quad \bar{F}_m^1 w(x) \}^T \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

在单元的角节点上满足角点条件(2.8), 以及在单元边界节点上满足边界条件

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^{i-1} w(x)}{\partial n^{i-1}} = \frac{\partial^{i-1} w(x)}{\partial n^{i-1}} \quad (i=1, \dots, v \text{ 当 } \frac{\partial^{i-1} w(x)}{\partial n^{i-1}} \text{ 已知时}) \\ \bar{F}^j w(x) = F^j w(x) \quad (j=1, \dots, u \text{ 当 } F^j w(x) \text{ 已知时}) \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

如果以上条件成立, 连续条件(2.6)和(2.7)可以满足并有 \$2m+1\$ 阶精度. 利用在单元节点的连续条件和边界条件可以得到未知量是 \$C_{ij}\$ 的线性代数方程组. 求解这组代数方程组, 可以得到 \$C_{ij}\$ 的值. 利用(3.1)式即可求出 \$\{W\}\$, \$\{W\}\$, \$\{\bar{F}_u\}\$ 和 \$\{\bar{F}_1\}\$, 它们按照(2.13)和(2.14)式收敛于精确解.

在工程中大多数问题可以归结为 \$u=v\$ 的情况. 例如固体力学中的非均匀弹性力学和非均匀板壳的平衡问题. 对这类情况, \$\{x\}\$ 和 \$\{\bar{F}\}\$ 及 \$\{W_1\}\$ 和 \$\{\bar{F}_1\}\$ 分别具有相同维数, 假定它们分别为 \$n_1\$ 和 \$n_2\$. 可以求出(3.1)式中的

$$n = (mn_1 + n_2) N.$$

我们定义矢量

$$\left. \begin{aligned} \{\delta\} &= \{\omega_1^1 \ \omega_1^2 \ \dots \ \omega_1^n \ \omega_2^1 \ \omega_2^2 \ \dots \ \omega_{N_e}^n \ \omega_{11} \ \omega_{12} \ \dots \ \omega_{N_e}\}^T \\ \{\bar{F}\} &= \{\bar{F}_1^1 \ \bar{F}_1^2 \ \dots \ \bar{F}_1^n \ \bar{F}_2^1 \ \bar{F}_2^2 \ \dots \ \bar{F}_{N_e}^n \ \bar{F}_1 \ \bar{F}_2 \ \dots \ \bar{F}_{N_e}\}^T \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

这里 ω_i^j 和 \bar{F}_i^j 表示 $\{W_i\}^T$ 和 $\{\bar{F}_i\}^T$ 在单元的第 i 个边上第 j 个边节点上的值, ω_{1i} 和 \bar{F}_i 表示 $\{W_1\}^T$ 和 $\{\bar{F}_1\}^T$ 在单元的第 i 个角节点的值。

把(3.1)代入(3.5),可以得到

$$\{\delta\} = [\phi_0]\{C\} + \{P_0\} \quad (3.6)$$

$$\{\bar{F}\} = [F_0]\{C\} + \{R_0\} \quad (3.7)$$

这里 $[\phi_0]$ 和 $[F_0]$ 是 $n \times n$ 阶已知矩阵, $\{P_0\}$ 和 $\{R_0\}$ 是 n 维已知矢量, $\{C\} = \{C_{11} \ C_{12} \ \dots \ C_{1n}\}^T$ 。从(3.6)可以得到

$$\{C\} = [\phi_0]^{-1}\{\delta\} - [\phi_0]^{-1}\{P_0\} \quad (3.8)$$

把(3.8)代入(3.7)得

$$\{\bar{F}\} = [F_0][\phi_0]^{-1}\{\delta\} + (\{R_0\} - [F_0][\phi_0]^{-1}\{P_0\}) \quad (3.9)$$

从(3.9)式,我们可得到单元的刚度矩阵

$$[K_0] = [F_0][\phi_0]^{-1} \quad (3.10)$$

和单元节点的载荷向量

$$\{R_0\} = \{R_0\} - [F_0][\phi_0]^{-1}\{P_0\} \quad (3.11)$$

总刚和单元节点载荷的合成以及边界条件的处理可以和一般有限元方法相同^[1]。问题最后归结为求解一组线性代数方程,它可以由普通的全带宽高斯消去法或被前法^[6]进行求解。

当方程(2.1)中的 $P_{v_m}(x)$ ($m=0, \dots, k$)是常量时,我们可以证明在单元的边界上(2.12)和(2.13)式有 $2m$ 阶收敛精度,在单元的边节点上及单元内部边节点的连线上的任一点 G (见图2),对于固定的法线矢量 n , (2.14)式 $m+1$ 阶收敛精度。

确定 G 点的 n 如图2所示。对于三角形单元,由角点 A 和 G 点确定的线段 \overline{AM} ,它的单位法线矢量和 n 相同。对四边形单元,在 G 点的 n 则和 $\overline{A'M'}$ 的单位法线矢量相同。在图2(b)中,应使

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{DM'}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{M'C}}$$

四、算 例

算例1 求解变系数非正定偏微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

式中

$$(Q_x)_{y=0} = 1, (w)_{x=0, y=1} = \ln 0.5 + \ln y, (w)_{x=y=0} = 2 \ln x \quad (4.1)$$

$$Q_x = x \frac{\partial w}{\partial x} n_x - y \frac{\partial w}{\partial y} n_y \quad (4.2)$$

n_x 和 n_y 分别为边界外法线与 x 和 y 轴的方向余弦。(4.1)有精确解

$$w = \ln x + \ln y$$

利用本文的方法,在第 i 个单元上方程(4.1)可转化为常系数方程

$$x_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - y_i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (4.3)$$

这里 x_i 和 y_i 是单元形心坐标。我们构造一个三角形单元如图 3 所示。由 (3.2) 式我们可得 w 和

$$\bar{Q}_n = x_i \frac{\partial w}{\partial x} n_x - y_i \frac{\partial w}{\partial y} n_y$$

须在单元节点上连续。由 (2.14) 式可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{w} = w, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{Q}_n = Q_n$$

这里 w 和 Q_n 在单元节点上有二阶收敛精度。

当

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 y$$

时, w 满足方程 (4.3), 取

$$\{\delta\} = \{w_1 \ w_2 \ w_3\}^T, \quad \{P_n\} = \{Q_{n1} \ Q_{n2} \ Q_{n3}\}^T$$

由 (3.10) 式即可获得单刚矩阵 $[K_e]$ 。用 3×3 网格进行计算, 如图 3 所示。在表 1 中给出精确元法所得到的解, 并和精确解作了比较。

表 1 方程 (4.1) 中 w 和 Q_n 的值 ($x=0.415$)

y		0	0.0825	0.165	0.247	0.330	0.415
w	本文解	-4.882	-3.362	-2.645	-2.286	-1.982	-1.759
	精确解	$-\infty$	-3.374	-2.681	-2.275	-1.988	-1.759
Q _n	本文解	1.000	-1.351	0.9570	-1.407	1.013	-1.403
	精确解	1.000	-1.414	1.000	-1.414	1.000	-1.414

算例 2 求解热传导方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) &= 0, \quad u(1,t) = 0 \\ u(x,0) &= \sin \pi x \quad (x \in [0,1]) \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

它有精确解

$$u = \exp[-\pi^2 t] \sin \pi x$$

我们利用精确元法构造一个矩形单元, 单元及其网格划分如图 4 所示。

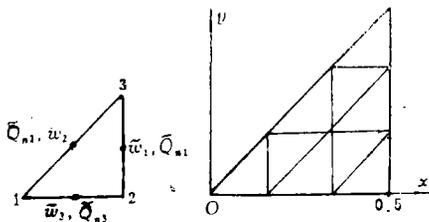


图 3 方程 (4.1) 三角形单元和网格划分

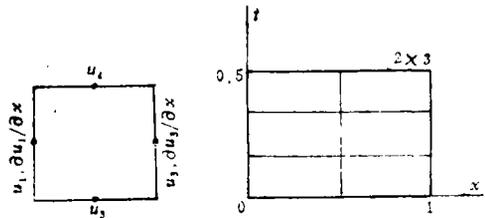


图 4 热传导方程的矩形单元及网格划分

令

$$u = c_1 + c_2 x + c_3 \left(t + \frac{x^2}{2} \right) \quad (4.5)$$

可满足方程(4.4)。由(4.5)式可得

$$\begin{pmatrix} u_3 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 1 & \Delta x & \frac{1}{2}(\Delta t + \Delta x^2) \\ 0 & 1 & \Delta x \\ 1 & \frac{1}{2}\Delta x & \Delta t + \frac{\Delta x^2}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta x^2 & -2\Delta t\Delta x & 4\Delta t \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 4\Delta x & -8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

式中 Δx 和 Δt 分别是单元沿 x 和 t 轴的边长,记号

$$a = \frac{1}{4\Delta t - \Delta x^2}$$

利用(4.6)式可求出(4.4)的解。我们采用 2×3 , 6×9 和 18×27 三种网格进行计算。表2给出了 $x=1$ 时 $\partial u/\partial x$ 在节点处的值,表3则给出了当 $t=0.5$ 时 u 在节点上的值。可以看出由本文方法获得的 u 和 $\partial u/\partial x$ 均具有二阶收敛速度。

表 2 热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的值 ($x=1$)

t		0.0833	0.1944	0.2500	0.3056	0.4167	0.4722
$\frac{\partial u}{\partial x}$	2×3	-1.997(44%)		-0.1174(-55%)		-0.0069(-86%)	
	6×9	-1.424(3.2%)	-0.4559	-0.2580(-3.18%)	-0.1460	-0.0468(-9.1%)	-0.0265
	18×27	-1.379(-0.088%)	-0.4611	-0.2667(0.08%)	-0.1529	-0.0507(-1.4%)	-0.0296
	精确解	-1.380	-0.4610	-0.2665	-0.1540	-0.0514	-0.0297

表 3 热传导方程 u 的值 ($t=0.5$)

x		0.0833	0.2500	0.4167	0.5833	0.7500	0.9167
$u \times 10^3$	6×9	1.540	4.208	5.748(-17.3%)	5.748	4.208	1.540
	18×27	1.827	4.991	6.818(-1.89%)	6.818	4.993	1.803
	精确解	1.862	5.087	6.949	6.949	5.087	1.862

算例3 一个带有任意边界条件和载荷的非均匀薄板弯曲问题。它的弹性定理为

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \\ M_x &= -D(x, y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D(x, y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(x, y) (1 - \nu(x, y)) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

平衡方程为
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (4.8)$$

式中 w 为板的挠度; Q_x 和 Q_y 为横向剪力; M_x, M_y 和 M_{xy} 为弯矩和扭矩分量; $D(x, y)$ 和 $\nu(x, y)$ 为弯曲刚度和泊松比。

把(4.7)代入(4.8),我们可以得到一个关于 w 的四阶偏微分方程。利用精确元法,在第 i 个单元上,带有变系数 $D(x, y)$ 和 $\nu(x, y)$ 的偏微分方程(4.8)可以变为

$$D_i \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q(x, y) \quad (4.9)$$

我们构造一个三角形单元如图 5 所示, 在单元节点上的法向弯矩, 扭矩和在角点的集中力可以表示为

$$M_n = M_x n_x^2 + 2M_{xy} n_x n_y + M_y n_y^2, \quad M_{n_s} = M_x (n_x^2 - n_y^2) + (M_y - M_{xy}) n_x n_y$$

$$R_i = M_{n_{sj}} - M_{n_{sk}} \quad (i, j, k \text{ 是循环指标})$$

挠度 w 采用二次完全多项式为插值函数。通过

$$\{R_1 \ R_2 \ R_3 \ s_1 M_{n_1} \ s_2 M_{n_2} \ s_3 M_{n_3}\}^T = [K_e] \{w_1 \ w_2 \ w_3 \ \theta_{n_1} \ \theta_{n_2} \ \theta_{n_3}\}^T$$

我们可以得到单元刚度矩阵 $[K_e]$, 它是一个正定矩阵。式中 s_i 和 θ_{n_i} 分别是第 i 个边的边长和法向转角。在单元之间, w 的法向导数连续这一条件在这里不需满足。

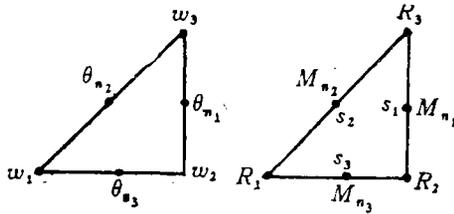


图5 三角形板单元

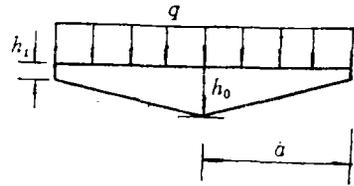


图6 变厚度圆薄板

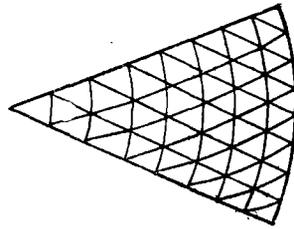


图7 圆薄板网格划分

计算一个在简支边界条件下变厚度圆板, 如图 6 所示。我们分别考虑板承受的均布载荷和在圆心处承受集中力 P 两种情况。由于板的对称性, 我们仅计算板的 $1/8$ 。网格划分如图 7 所示。 w 和径向弯矩 M_r 在表 4 中给出。这里 $\nu(x, y) = 0.25$ 及圆板的半径为 a 。

表 4 变厚度圆板 w 和 M_r 的值 ($\nu = 0.25$)

$\frac{h_0}{h_1}$	均布荷载 q						集中力 P			
	$w E h_0^3 / q a^4 (r=0)$		$M_r / q a^2 (r=0)$		$M_r / q a^2 (r = \frac{a}{2})$		$w E h_0^3 / P a^2 (r=0)$		$M_r / P (r = \frac{a}{2})$	
	本文解	[6]解	本文解	[6]解	本文解	[6]解	本文解	[6]解	本文解	[6]解
1.00	0.752	0.738	0.203	0.203	0.152	0.154	0.604	0.582	0.0701	0.069
1.50	1.287	1.260	0.248	0.257	0.177	0.176	0.957	0.930	0.0880	0.088
2.33	2.12	2.04	0.292	0.304	0.199	0.196	1.46	1.39	0.104	0.102

以上三个算例表明, 精确元法可用于非正定偏微分算子, 并可获得满意的结果。

参 考 文 献

- [1] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, Third Edition (1977).
- [2] 叶开沅, 非均匀变厚度弹性力学的若干问题的一般解, IV. 非均匀变厚度梁的弯曲, 稳定性和自由振动, 兰州大学学报力学专号, 1 (1979), 133—157.
- [3] 纪振义, 矩阵迁移法收敛性的条件及其证明, 工程力学, 5, 3 (1988), 20—29.
- [4] 纪振义、叶开沅, 任意变系数微分方程的精确解析法, 应用数学和力学, 10, 10 (1989), 841—851.
- [5] Hood, P., Frontal solution program for unsymmetric matrices, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 10 (1976), 377—379.
- [6] Timoshenko, S., and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plate and Shell*, McGraw-Hill Book Company, Second Edition (1959).

Exact Finite Element Method

Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

Ji Zhen-yi

(Anhui Architectural Industry College, Hefei)

Abstract

In this paper, a new method, exact element method for constructing finite element, is presented. It can be applied to solve nonpositive definite or positive definite partial differential equation with arbitrary variable coefficient under arbitrary boundary condition. Its convergence is proved and its united formula for solving partial differential equation is given. By the present method, a noncompatible element can be obtained and the compatibility conditions between elements can be treated very easily. Comparing the exact element method with the general finite element method with the same degrees of freedom, the high convergence rate of the high order derivatives of solution can be obtained. Three numerical examples are given at the end of this paper, which indicate all results can converge to exact solution and have higher numerical precision.

Key words exact finite element, partial differential equation, heat conduction, thin plate