应用数学和力学，第11卷第11期（1990年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

集值严格集-压缩映象的一致极限的不动点指数及其应用

丁协平 兰坤泉

（四川师范大学，1989年9月27日收到）

摘 要

在本文中，我们研究了一类集值严格集-压缩映象的一致极限映象．建立了这类一致极限映象的不动点指数理论，证明了某些正不动点定理．我们的定理推广了 Fitzpatrick 和 Petryshyn 的某些最近结果．

关键词 不动点指数 不动点定理 满射定理

一、引 言

Fitzpatrick, Petryshyn[1] 和 Petryshyn[2,3] 建立了 Banach 空间中集值凝聚映象的不动点指数理论，他们应用不动点指数理论获得了集值凝聚映象的正不动点存在性定理和多重正不动点定理．我们指出，在［1，2，3］中讨论的所有上半连续映象都被假设是映点到紧凸集．因此，这限制了在［1，2，3］中研究的映象类．

本文我们将讨论集值严格集压缩映象的一致极限类．其中包括集值凝聚映象和集值1-集-压缩映象．而且我们并不假设所讨论的映象是映点成紧凸集．我们也建立了一致极限映象的不动点指数理论．所得理论推广了［1，2，3］中对应的结果，应用所建立的不动点指数理论，证明了一致极限映象的一些正不动点定理，这些定理推广了［1，4，5］中一些结果；也获得了一致极限的区域不变性定理，它们改进和推广了［5，7］中相应结果．

二、预 备 知 识

设X是一实 Banach 空间，2^X表示X的所有非空子集族．对 $X_i\in 2^X(i=1,2,3,4)$且$x\in X$．令$d(x,X_1)=\inf\{\|y-x\|:y\in X_1\}$，$O[X_1,\varepsilon]=\{y\in X:d(y,X_1)<\varepsilon\}$，$d(X_1,X_2)=\sup\{d(x,X_2):x\in X_1\}$且$H(X_1,X_2)=\max\{d(X_1,X_2),d(X_2,X_1)\}$．$H$ 称为 X_1 和 X_2间的 Hausdorff 距离（见［6］）．H有如下性质：

（i） $H(X_1,X_2)\geqslant 0$；$H(X_1,X_2)=0\Longleftrightarrow \bar{X}_1=\bar{X}_2$；

（ii） $H(X_1,X_2)=H(X_2,X_1)$；

(iii) $H(X_1, X_2)\leqslant H(X_1, X_3)+H(X_3, X_2)$.

本文将需要H的下列性质：

引理2.1 (1) $d(x, X_1)\leqslant d(x, X_2)+H(X_1, X_2)$;

(2) $H(tX_1+(1-t)X_2, tX_3+(1-t)X_4)\leqslant tH(X_1, X_3)+(1-t)H(X_2, X_4)$, $t\in[0, 1]$;

(3) 如果X_1有界且X_2无界，则$H(X_1, X_2)=+\infty$;

(4) $H(X_1+t_1X_2, X_1+tX_2)\leqslant|t_2-t_1|\sup\{\|y\|\,|\,y\in X_2\}$　$(t_1\geqslant 0, t_2\geqslant 0)$;

证明 我们仅证(2)，其余可从H的定义推出。

(2)的证明　对每一个$t\in[0, 1]$, $x\in tX_1+(1-t)X_2$且$y\in tX_3+(1-t)X_4$，存在$x_i\in X_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$使得$x=tx_1+(1-t)x_2$, $y=tx_3+(1-t)x_4$，我们可得

$$d(x, tX_3+(1-t)X_4)\leqslant\|x-y\|\leqslant t\|x_1-x_3\|+(1-t)\|x_2-x_4\| \tag{2.1}$$

且有

$$\begin{aligned}d(x, tX_3+(1-t)X_4)&\leqslant td(x_1, X_3)+(1-t)d(x_2, X_4)\\&\leqslant tH(X_1, X_3)+(1-t)H(X_2, X_4)\end{aligned} \tag{2.2}$$

因此

$$d(tX_1+(1-t)X_2, tX_3+(1-t)X_4)\leqslant tH(X_1, X_3)+(1-t)H(X_2, X_4) \tag{2.3}$$

类似地有

$$d(tX_3+(1-t)X_4, tX_1+(1-t)X_2)\leqslant tH(X_1, X_3)+(1-t)H(X_2, X_4) \tag{2.4}$$

从(2.3)和(2.4)可知(2)成立。

定义2.1 称$\{A_n\}\subset 2^X$收敛于$A\in 2^X$，如果对$\forall\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$使得$H(A_n, A)<\varepsilon$，对所有$n\geqslant n_0$。

注2.1 因H是定义在$2^X\times 2^X$上，因此收敛序列的极限可能不唯一。

引理2.2 设$\{A_n\}\subset 2^X$且A_n紧，$n\in N$，如果$\{A_n\}$收敛于A，则A是相对紧集。

证明 假设$\{x_m\}\subset A$有界，由假设，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$使得对所有$n\geqslant n_0$，$H(A_n, A)<\varepsilon/2$。特别地，$H(A_{n_0}, A)<\varepsilon/2$。因$A_{n_0}$紧，存在$y_m\in A_{n_0}$使得$d(x_m, y_m)=d(x_m, A_{n_0})$，对所有$m\in N$。不失一般性，假设$y_m\to y_0$，因此存在$n_1\in N$使得$\|y_m-y_0\|<\varepsilon/2$, $m\geqslant n_1$，那么，

$$\begin{aligned}d(x_m, y_0)&\leqslant d(x_m, y_m)+d(y_m, y_0)<d(x_m, y_m)+\frac{\varepsilon}{2}\\&=d(x_m, A_{n_0})+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant H(A_{n_0}, A)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\end{aligned} \tag{2.5}$$

由此得$x_m\to y_0$，证毕。

令$D\subset X$, $L(D, 2^X)=\{T\,|\,T:D\to 2^X\}$且$E\subset L(D, 2^X)$。

定义2.2 映象$T\in L(D, 2^X)$称为E中映象的一致极限，如果存在序列$\{T_n\}\subset E$使得对$\forall\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当$n\geqslant n_0$时，对所有$x\in D$, $H(T_n(x), T(x))<\varepsilon$。此时记$T_n\xrightarrow{H}T$。

定义2.3 映象$T\in L(D, 2^X)$称为在$x_0\in D$拟上半连续(q·u·s·c)，如果对$\forall\varepsilon>0$，存在一个$\delta>0$使得$T(x)\subset O[T(x_0), \varepsilon]$，对所有$x\in D\cap O[x_0, \delta]$。$T\in L(D, 2^X)$称为在$D$上q·u·s·c，如果对任一$x\in D$，$T$是q·u·s·c。

令$C(D, 2^X)=\{T\,|\,T\in L(D, 2^X)$且$T$在$D$上q·u·s·c$\}$，

引理2.3 令$\{T_n\}\subset C(D, 2^X)$且$T\in L(D, 2^X)$. 如果$T_n\xrightarrow{H}T$, 则$T\in C(D, 2^X)$.

证明 因$T_n\xrightarrow{H}T$, 对任一$\varepsilon>0$, 存在$n_0\in N$使得

$$H(T(x),\ T_{n_0}(x))<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(\text{对所有}x\in D\text{且}n\geqslant n_0)\tag{2.6}$$

又因T_{n_0}在D上q·u·s·c, 对任一给定的$x_0\in D$, 存在$\delta>0$, 使得

$$d(y_{n_0}(x),\ T_{n_0}(x))<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(\text{对所有}x\in D\cap O[x_0,\ \delta]\text{和}y_{n_0}(x)\in T_{n_0}(x))\tag{2.7}$$

对$x\in D\cap O[x_0,\ \delta]$, 任选$y(x)\in T(x)$, $y(x_0)\in T(x_0)$, $y_{n_0}(x)\in T_{n_0}(x)$, $y_{n_0}(x_0)\in T_{n_0}(x_0)$, 那么

$$\begin{aligned}d(y(x),\ T(x_0))&\leqslant\|y(x)-y_{n_0}(x)\|+\|y_{n_0}(x)-y_{n_0}(x_0)\|+d(y_{n_0}(x_0),\ T(x_0))\\&\leqslant\|y(x)-y_{n_0}(x)\|+\|y_{n_0}(x)-y_{n_0}(x_0)\|+H(T_{n_0}(x_0),\ T(x_0))\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}d(y(x),T(x_0))&\leqslant\|y(x)-y_{n_0}(x)\|+d(y_{n_0}(x),T_{n_0}(x_0))+H(T_{n_0}(x_0),\ T(x_0))\\&<\|y(x)-y_{n_0}(x)\|+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$d(y(x),\ T(x_0))\leqslant d(y(x),\ T_{n_0}(x))+\frac{2}{3}\varepsilon\leqslant H(T(x),\ T_{n_0}(x))+\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon\tag{2.10}$$

因此对所有$x\in D\cap O[x_0,\ \delta]$, $T(x)\subset O[T(x_0),\ \varepsilon]$. 由$x_0\in D$的任一性知, $T\in C(D,\ 2^X)$.

注2.2 在引理2.3的条件下, 如果进一步假设: 对任一$x\in D$和$n\in N$, $T_n(x)$是非空紧凸集, 但对每一$x\in D$, $T(x)$可能非闭或非凸, 见下例.

例1 设$D=[0,\ 1]\subset R^1$(R^1表实直线), 任选一固定的$\sigma\in\left(0,\ 1/10\right)$且令:

$$T_n(x)=\left[\frac{2\sigma}{9}+\frac{1}{n},\ \frac{2}{3}(1-x+\sigma)-\frac{1}{n}\right],\ \text{对}x\in D\text{且}n>\left[\frac{9}{2\sigma}\right]+1\tag{2.11}$$

$$T(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{2\sigma}{9},\ \dfrac{1}{3}(1-x+\sigma)\right)\cup\left(\dfrac{1}{3}(1-x+\sigma),\ \dfrac{2}{3}(1-x+\sigma)\right),\\[2mm] \qquad x\in D_1\cup D_3,\ D_1=\left[0,\ \dfrac{2\sigma}{9}\right),\ D_3=\left(\dfrac{2(1+\sigma)}{5},\ 1\right]\\[2mm]\left[\dfrac{2\sigma}{9},\ \dfrac{2}{3}(1-x+\sigma)\right],\ x\in D_2,\ D_2=\left[\dfrac{2\sigma}{9},\ \dfrac{2}{5}(1+\sigma)\right]\end{cases}\tag{2.12}$$

显然, 对任一$x\in D$和$n>\left[\dfrac{9}{2\sigma}\right]+1$, $T_n(x)$非空紧凸且$T_n\in C(D,\ 2^X)$. 事实上, 对任何$\varepsilon>0$, 和每一$x_0\in D$, 存在$\delta=\dfrac{3}{2}\varepsilon$使得对每一$x\in D\cap O[x_0,\ \delta]$, 有$T(x)\in O[T(x_0),\ \varepsilon]$.

下面证明$T_n\xrightarrow{H}T$. 事实上, 对每一$x\in D$且$z\in T(x)$,

$$d(z,\ T_n(x))=\begin{cases}0 & (z\in T_n(x))\\[1mm] \dfrac{2\sigma}{9}+\dfrac{1}{n}-z & \left(\dfrac{2\sigma}{9}<z<\dfrac{2\sigma}{9}+\dfrac{1}{n}\right)\\[1mm] z-\left[\dfrac{2}{3}(1-x+\sigma)-\dfrac{1}{n}\right] & \left(\dfrac{2}{3}(1-x+\sigma)-\dfrac{1}{n}<z<\dfrac{2}{3}(1-x+\sigma)\right)\end{cases}$$

因此，对所有$x\in D$

$$d(T(x),\ T_n(x))=\sup\{d(z,\ T_n(x))|z\in T(x)\}=\frac{1}{n} \tag{2.13}$$

对每一$x\in D$和$y\in T(x)$，如果$y=(1-x+\sigma)/3$，那么$d(y,\ T(x))=0$，如果$y\in T_n(x)$，且$y\neq x+\sigma+1$，那么$y\in T(x)$，因此，$d(y,\ T(x))=0$。从而

$$d(T_n(x),\ T(x))=0 \qquad (x\in D) \tag{2.14}$$

由(2.13)和(2.14)，得$H(T(x),\ T_n(x))=\frac{1}{n}$ $(x\in D)$。因此，$T_n\xrightarrow{H}T$。

但对任一$x\in D$，$T(x)$非闭，因此$T(x)$非紧。显然，$T(x)$也非凸。

引理2.4 假设$\{T_n\}\subset L(D,\ 2^X)$，$T\in L(D,2^X)$.如果$T_n\xrightarrow{H}T$，那么$T_n(D)$在Hausdorff距离$H$下收敛于$T(D)$。

证明 如果$T_n\xrightarrow{H}T$。那么对任一$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$使得$H(T_n(x),\ T(x))<\frac{\varepsilon}{2}$，对所有$x\in D$和$n\geqslant n_0$。而且对每一$x\in D$和$y\in T_n(x)$，

$$d(y,\ T(D))\leqslant d(y,\ T(x))\leqslant d(T_n(x),\ T(x))\leqslant H(T_n(x),\ T(x))<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.15}$$

因(1.15)对所有$y\in T_n(x)$和$x\in D$成立。由(2.15)得

$$d(T_n(D),\ T(D))\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \qquad (n\geqslant n_0) \tag{2.16}$$

类似地

$$d(T(D),\ T_n(D))<\varepsilon \qquad (n\geqslant n_0) \tag{2.17}$$

因此，$H(T(D),\ T_n(D))<\varepsilon$，对所有$n\geqslant n_0$，即$T_n(D)$收敛于$T(D)$。

引理2.5 设$\{T_n\}\subset L(D,\ 2^X)$是一有界序列，如果$T_n\xrightarrow{H}T$，则$T$也有界。

证明 由引理2.4和引理2.1(3)，易证引理2.5。

三、严格集压缩映象的一致极限的不动点指数

设X是一实 Banach 空间且$D\subset X$。定义

$\nu(D)=\inf\{d>0|D$能被有限个直径小于d的集所覆盖$\}$且$\chi(D)=\inf\{r>0|D$能被有限个半径小于r的球所覆盖$\}$。ν和χ分别称为非紧集测度和球测度。令Φ表ν或χ。那么下列性质成立：对任何D_1，$D_2\subseteq X$，$\lambda\in R^1$（实数集），$\Phi(D_1)=0$当且仅当D_1相对紧；$\Phi(\overline{\mathrm{co}}(D_1))=\Phi(D_1)$，这里$\overline{\mathrm{co}}(D_1)$表示$D_1$的闭凸包；$\Phi(D_1\cup D_2)=\max\{\Phi(D_1),\Phi(D_2)\}$；$\Phi(D_1+D_2)\leqslant\Phi(D_1)+\Phi(D_2)$，这里$D_1+D_2=\{x+y|x\in D_1,\ y\in D_2\}$；$\Phi(\lambda D_1)=|\lambda|\Phi(D_1)$，这里$\lambda D_1=\{\lambda x|x\in D_1\}$。

设$T\in L(D,\ 2^X)$，T称为k-Φ-压缩($k\geqslant0$)，如果对每一有界集$\Omega\subset D$，$\Phi(T(\Omega))\leqslant k\Phi(\Omega)$。特别地，称$k$-$\Phi$-压缩映象($k<1$)为严格-$\Phi$-压缩映象。$T$称为$\Phi$-凝聚（简称凝聚），如果对$\Omega\subseteq D$且$\Phi(\Omega)\neq0$，有$\Phi(T(\Omega))<\Phi(\Omega)$。

容易验证，每一全连续映象是0-Φ-压缩映象且每一严格-Φ-压缩映象是凝聚映象。

称映象$T\in L(D, 2^X)$是上半连续(u·s·c)，如果$T\in C(D, 2^X)$且对每一$x\in D$，$T(x)$是紧凸集。此定义与[1]中定义一致。

令$F\subseteq X$是闭凸集且$D\subset X$是有界开集满足$D\cap F\neq\phi$，用D_F，$\bar{D}_F$和$\partial_F(D_F)$分别表示$D\cap F$，以及D_F关于F的闭包和边界。闭集$F\subseteq X$称为楔形，如果对任意$\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，有$\alpha F+\beta F\subset F$。

令$S(D_F, 2^F)=\{T\mid T\in L(D_F, 2^F)$是 u·s·c 且严格-$\Phi$-压缩$\}$且$\bar{S}(D_F,2^F)=\{T\in L(D_F, 2^F)\mid$存在$\{T_n\}\subset S(D_F, 2^F)$使得$T_n\xrightarrow{H}T\}$且$S_1(D_F, 2^F)=\{T\mid T\in L(D_F, 2^F)$是 u·s·c 且1-$\Phi$-压缩$\}$，显然，$S(D_F, 2^F)\subset S_1(D_F, 2^F)$

引理3.1 (i) $S(D_F, 2^F)$是凸集；

(ii) $\bar{S}(D_F, 2^F)$也是凸集；

(iii) $S_1(D_F, 2^F)\subsetneqq\bar{S}(D_F, 2^F)$。

证明 (i) 对任何T_1，$T_2\in S(D_F, 2^F)$，假设T_i是k_i-Φ-压缩，$k_i<1$ $(i=1,2)$，那么$t\in[0, 1]$且$\Omega\subset D$，

$$\Phi[(tT_1+(1-t)T_2)(\Omega)]\leqslant\Phi(tT_1(\Omega))+\Phi((1-t)T_2(\Omega))$$
$$\leqslant t\bar{k}\Phi(\Omega)+(1-t)\bar{k}\Phi(\Omega)=\bar{k}\Phi(\Omega) \tag{3.1}$$

这里$\bar{k}=\max\{k_1, k_2\}<1$。容易证明，$tT_1+(1-t)T_2$是 u·s·c，因此

$tT_1+(1-t)T_2\in S(D_F, 2^F)$。

(ii) 对任何T_1，$T_2\in\bar{S}(D_F, 2^F)$，存在$\{T_1^{(n)}\}$，$\{T_2^{(n)}\}\subset S(D_F, 2^F)$使得$T_1^{(n)}\xrightarrow{H}T_1$，$T_2^{(n)}\to T_2$，即对任何$\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，使得对任何$x\in\bar{D}_F$和$n\geqslant n_0$，$H(T_1^{(n)}(x),T_1(x))<\varepsilon$，$H(T_2^{(n)}(x), T_2(x))<\varepsilon$。由引理2.2(2)得

$$H(tT_1^{(n)}(x)+(1-t)T_2^{(n)}(x),\ tT_1(x)+(1-t)T_2(x))\leqslant tH(T_1^{(n)}(x),\ T_1(x))$$
$$+(1-t)H(T_2^{(n)}(x),\ T_2(x))<\varepsilon\qquad(x\in\bar{D}_F,\ t\in[0,\ 1]\text{且}n\geqslant n_0) \tag{3.2}$$

因$S(D_F, 2^F)$凸，故$tT_1^{(n)}+(1-t)T_2^{(n)}\in S(D_F, 2^F)$，因此，对$\forall t\in[0,1]$,$tT_1+(1-t)T_2\in\bar{S}(D_F, 2^F)$，从而$\bar{S}(D_F, 2^F)$凸。

(iii) 假设$T\in S_1(D_F, 2^F)$且固定$y_0\in F$。令$T_n(x)=\left(1-\frac{1}{n}\right)T(x)+\frac{1}{n}y_0$,对任一$x\in\bar{D}_F$且$n\in N$，显然，$T_n\in S(D_F, 2^F)$。由引理2.1(2)和引理2.5，可推出

$$H(T(x),\ T_n(x))\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)H(T(x),\ T(x))$$
$$+\frac{1}{n}H(T(x),\ \{y_0\})=\frac{1}{n}M \tag{3.3}$$

其中 $M=\sup\{\|y-y_0\|\mid y\in T(\bar{D}_F)\}<+\infty$,因此,$T_n\xrightarrow{H}T$，从而$T\in\bar{S}(D_F, 2^F)$。由此得到，$S_1(D_F, 2^F)\subseteq\bar{S}(D_F, 2^F)$，再从例1知，$S_1(D_F, 2^F)\subsetneqq\bar{S}(D_F, 2^F)$。

下面对$T\in\bar{S}^T(D_F, 2^F)$建立不动点指数理论。

定义3.1 假设$T\in\bar{S}(D_F, 2^F)$使得$\tau=\inf\{d(x,T(x))\mid x\in\partial_F(D_F)\}>0$且选取$B\in S(D_F, 2^F)$使得

$$H(T(x),\ B(x))<\tau\qquad(\text{对所有}x\in\bar{D}_F) \tag{3.4}$$

因$T\in\bar{S}(D_F, 2^F)$，上述的B存在．下证

$$x\bar{\in}B(x)，对每一x\in\partial_F(D_F) \tag{3.5}$$

事实上，如果存在一$x_0\in\partial_F(D_F)$使得$x_0\in B(x_0)$，那么

$$H(T(x_0), B(x_0))\geqslant d(B(x_0), T(x_0))\geqslant d(x_0, T(x_0))\geqslant\tau \tag{3.6}$$

这与(3.4)矛盾．从而(3.5)成立．由[1]知，不动点指数$i_F(B, D_F)$存在．定义T关于F在D上的不动点指数$i_F(T, D_F)$如下：

$$i_F(T, D_F)=i_F(B, D_F) \tag{3.7}$$

下面证明$i_F(T, D_F)$与特别的B的选择无关．事实上，如果$B_1\in S(D_F, 2^F)$使得

$$H(T(x), B_1(x))<\tau(对所有x\in\bar{D}_F) \tag{3.8}$$

那么可证

$$i_F(B, D_F)=i_F(B_1, D_F) \tag{3.9}$$

现假设B是k-Φ-压缩（$k<1$）且B_1是k_1-Φ-压缩($k_1<1$)，定义

$$G:\bar{D}_F\times[0, 1]\to 2^F \tag{3.10}$$

$G(x, t)=tB(x)+(1-t)B_1(x)$．显然$G$是$\bar{k}$-$\Phi$-压缩，$\bar{k}=\max\{k, k_1\}<1$，从引理2.1(1)，(2)可知，对任一$(x, t)\in\partial_F(D_F)\times[0, 1]$，

$$\begin{aligned}d(x, G(x, t))&\geqslant d(x, T(x))-H(T(x), G(x, t))\\&\geqslant d(x,T(x))-tH(T(x),B(x))\\&\quad-(1-t)H(T(x), B_1(x))>\tau-t\tau-(1-t)\tau=0\end{aligned}$$

因此 $$x\bar{\in}G(x, t)，对(x, t)\in\partial_F(D_F)\times[0, 1] \tag{3.11}$$

从[1]中定理2.1知，(3.9)成立．

称$T\in\bar{S}(D_F, 2^F)$具有(*)性质：

(*) 如果存在$\{x_n\}\subset\bar{D}_F$使得$d(x_n,T(x_n))\to 0$，$n\to+\infty$，那么，存在一$x\in\bar{D}_F$使得$x\in T(x)$．

定理3.1 设$T\in\bar{S}(D_F, 2^F)$使得$\tau=\inf\{d(x, T(x))\mid x\in\partial_F(D_F)\}>0$，那么$T$的不动点指数具有如下性质：

(P_1) 如果$i_F(T, D_F)\neq 0$且T在$\bar{D}_F$上具有(*)性质，那么T在D_F中有一不动点；

(P_2) 如果$x_0\in D_F$，那么$i_F(\hat{x}_0, D_F)=1$，这里$\hat{x}_0$表示恒取x_0的映象；

(P_3) 如果$D=D^1\cup D^2$，其中D^1和D^2是互不相交的开集且使得$\tau^*=\inf\{d(x, T(x))\mid x\in D^*\}>0$，其中$D^*=(\bar{D}\backslash(D^1\cup D^2))_F$，那么

$$i_F(T, D_F)=i_F(T, D_F^1)+i_F(T, D_F^2);$$

(P_4) 如果G: $\bar{D}_F\times[0, 1]\to 2^F$满足

(a) 对每一$t\in[0, 1]$，$G_t\in\bar{S}(D_F, 2^F)$；

(b) 对每一$t\in[0, 1]$，存在$\delta_t>0$使得$d(x, G_t(x))\geqslant\delta_t$，对$x\in\partial_F(D_F)$；

(c) 对每一$t_0\in[0, 1]$，存在$\varepsilon>0$使得对任何$t_1\in[0, 1]\cap O[t_0, \varepsilon]$，下述结果成立：

$$d(x, E_{(t_0, t_1)}(x, \lambda))\geqslant\mu_\lambda \quad (对x\in\partial_F(D_F)) \tag{3.12}$$

其中 $E_{(t_0, t_1)}(x, \lambda)=\lambda B_{t_0}(x)+(1-\lambda)B_{t_1}(x)$，对$(x, t)\in\bar{D}_F\times[0, 1]$，$B_{t_i}\in S(D_F, 2^F)$且$H(B_{t_i}(x), G_{t_i}(x))<\delta_i(i=0, 1, x\in\bar{D}_F)$；则$i_F(G(\cdot, 1), D_F)=i_F(G(\cdot, 0), D_F)$．

证明 (P_1) 因$T\in\bar{S}(D_F, 2^F)$，存在$\{T_n\}\subset S(D_F, 2^F)$使得$T_n\xrightarrow{H}T$，即对$\forall\varepsilon>0$，存在$n_0\in N$，当$n\geqslant n_0$时，

$$H(T(x), T_n(x))<\varepsilon，对所有x\in\bar{D}_F \tag{3.13}$$

由假设知，

$$d(x, T(x))\geqslant\tau \tag{3.14}$$

从(3.13)，(3.14)以及定义3.1知，存在$n_1\geqslant n_0$使得对所有$n\geqslant n_1$，

$$i_F(T, D_F)=i_F(T_n, D_F)\neq 0 \tag{3.15}$$

由[1]中定理2.1知，存在$x_n\in D_F$使得$x_n\in T_n(x_n)$，对每一$n\geqslant n_1$，因此，

$$d(x_n, T(x_n))\leqslant d(x_n, T_n(x_n))+H(T_n(x_n), T(x_n))<\varepsilon(对n\geqslant n_1) \tag{3.16}$$

当$n\to+\infty$时得，$d(x_n, T(x_n))\to 0$，因T具有(*)性质，存在$x\in\bar{D}_F$使得$x\in T(x)$。由(3.14)知，$x\in D_F$，即存在$x\in D_F$使得$x\in T(x)$。

(P_2) 令$x_0\in D_F$且注意到$\hat{x}_0$是0-Φ-压缩，从定义3.1及在[1]中的定理2.1知，$i_F(\hat{x}_0,D_F)=1$。

(P_3) 注意到，$\inf\{d(x, T(x))|x\in\partial_F(D_F)\}\geqslant\inf\{d(x, T(x))|x\in D^*\}=\tau^*>0$且$\inf\{d(x, T(x))|x\in\partial_F(D_F^i)\}\geqslant\inf\{d(x,T(x))|x\in D^*\}=\tau^*>0$ $(i=1,2)$。选取$B\in S(D_F,2^F)$使得$H(T(x), B(x))<\tau^*$，对所有$x\in\bar{D}_F$，从定义3.1得，$i_F(T, D_F)=i_F(B, D_F)$；$i_F(T, D_F^i)=i_F(B, D_F^i)$ $(i=1, 2)$。由[1]中定理2.1得，

$$i_F(B, D_F)=i_F(B, D_F^1)+i_F(B, D_F^2)$$

因此，$i_F(T, D_F)=i_F(T, D_F^1)+i_F(T, D_F^2)$。

(P_4) 由假设，对每一$t_0\in[0,1]$，存在$\varepsilon>0$使得对任何$t_1\in[0, 1]\cap O[t_0,\varepsilon]$，($P_4$)(c)的结论成立。因$H(B_{t_i}(x), G_{t_i}(x))<\delta_{t_i}$，对所有$x\in\bar{D}_F(i=0,1)$。通过(b)和定义3.1得，$i_F(G_{t_i}, D_F)=i_F(B_{t_i}, D_F)$ $(i=0,1)$。从(3.12)和[1]中定理2.1知，对每一$t_1\in[0, 1]\cap O[t_0, \varepsilon]$，$i_F(B_{t_0}, D_F)=i_F(B_{t_1}, D_F)$，因此，对每一$t_1\in[0, 1]\cap O[t_0, \varepsilon]$，$i_F(G_{t_0}, D_F)=i_F(G_{t_1},D_F)$。注意到[0,1]是连通集，我们有，$i_F(G(\cdot,1), D_F)=i_F(G(\cdot,0), D_F)$。

下面给出(P_4)的一种特殊情况：

(P_4)′ 在(P_4)中，如果条件(c)用下述条件代替：

(c)′ 如果$G(x,\cdot):[0,1]\to 2^F$关于$x\in\partial_F(D_F)$一致连续，那么，(P_4)的结论成立。

证明 只须证明由(c)′可推出(P_4)的(c)成立。对任何给定的$t_0\in[0,1]$，从(c)′知，存在$\varepsilon>0$使得对任何$t_1\in[0,1]\cap O[t_0,\varepsilon]$，

$$H(G_{t_0}(x), G_{t_1}(x))<\delta_{t_0}/4，对所有x\in\partial_F(D_F)$$

且

$$d(x,G_{t_1}(x))\geqslant d(x,G_{t_0}(x))-H(G_{t_0}(x),G_{t_1}(x))$$
$$>\delta_{t_0}-\frac{\delta_{t_0}}{4}=\frac{3}{4}\delta_{t_0} \quad (对所有 x\in\partial_F(D_F))。$$

令$t_1\in[0,1]\cap O[t_0,\delta_{t_0}]$，选取$B_{t_i}\in S(D_F,2^F)$ $(i=1,2)$，使得

$$H(G_{t_i}(x), B_{t_i}(x))<\delta_{t_0}/8(对所有x\in\bar{D}_F\ (i=1,2))。$$

令$E_{(t_0,t_1)}(x,\lambda)=\lambda B_{t_0}(x)+(1-\lambda)B_{t_1}(x)$，对任何$(x,\lambda)\in\bar{D}_F\times[0,1]$，那么，

$$\begin{aligned}d(x,E_{(t_0,t_1)}(x,\lambda))&\geqslant d(x,G_{t_0}(x))-H(G_{t_0}(x), E_{(t_0,t_1)}(x,\lambda))\\&\geqslant d(x,G_{t_0}(x))-\lambda H(G_{t_0}(x), B_{t_0}(x))-(1-\lambda)H(G_{t_0}(x), B_{t_1}(x))\\&\geqslant d(x,G_{t_0}(x))-\lambda H(G_{t_0}(x), B_{t_0}(x))-(1-\lambda)H(G_{t_0}(x),G_{t_1}(x))\\&\quad-(1-\lambda)H(G_{t_1}(x),B_{t_1}(x))>\delta_{t_0}-\frac{\delta_{t_0}}{2}\lambda-(1-\lambda)\frac{\delta_{t_0}}{4}-(1-\lambda)\frac{\delta_{t_0}}{4}=\frac{\delta_{t_0}}{2}>0,\end{aligned}$$

对所有$x\in\partial_F(D_F)$，$\lambda\in[0,1]$。因此(P_4)的(c)成立，

四、不动点定理

定理4.1 设$T\in\bar{S}(D_F,2^F)$且T满足下列条件：

(i) T在$\bar{D}_F$上具有(*)性质；

(ii) T满足如下的(LS)条件：

(LS)：存在$e_0\in D_F$和$\delta>0$使得$d(x,tT(x)+(1-t)e_0)\geqslant\delta$，对$x\in\partial_F(D_F)$和$t\in(0,1)$.

那么T在$\bar{D}_F$中有一不动点.

证明 如果存在$\{x_n\}\subset\partial_F(D_F)$使得$d(x_n, T(x_n))\to 0$，$n\to+\infty$，从(*)性质知，存在$x\in\bar{D}_F$使$x\in T(x)$. 结论成立.

现假设存在$\delta_1>0$使得$d(x,T(x))\geqslant\delta_1$，$x\in\partial_F(D_F)$. 因$e_0\in D_F$，存在$\delta_0>0$使得$d(x,e_0)\geqslant\delta_0$，$x\in_F(D_F)$，又因$T\in\bar{S}(D_F,2^F)$，存在$\{T_n\}\subset S(D_F,2^F)$和$n_0\in N$使得

$$\left.\begin{aligned}&H(T_n(x),T(x))<\delta^*,\quad x\in\bar{D}_F,\\&\delta^*=\min\left\{\frac{\delta_0}{2},\ \frac{\delta_1}{2},\ \frac{\delta}{2}\right\}\quad n\geqslant n_0.\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

令$G_t(x)=tT(x)+(1-t)e_0$，$(x,t)\in\bar{D}_F\times[0,1]$，$G_t^{(n)}(x)=tT_n(x)+(1-t)e_0,(x,t)\in\bar{D}_F\times[0,1]$ $(n\in N)$，那么

$$\begin{aligned}d(x,G_t^{(n)}(x))&\geqslant d(x,G_t(x))-H(G_t(x),\ G_t^{(n)}(x))\\&\geqslant\delta-tH(T_n(x),T(x))\geqslant\delta-\delta^*>0\\&(x\in\partial_F(D_F),t\in[0,1],n\geqslant n_0)\end{aligned}\tag{4.2}$$

但

$$\begin{aligned}H(G_t^{(n)}(x),G_t(x))&\leqslant tH(T_n(x),T(x))\\&+(1-t)H(\{e_0\},\{e_0\})<\delta^*\quad(x\in\bar{D}_F,\ n\geqslant n_0,\ t\in[0,1])\end{aligned}\tag{4.3}$$

令$E_{(t_0,t_1)}(x,\lambda)=\lambda G_{t_0}^{(n)}(x)+(1-\lambda)G_{t_0}^{(n)}(x)$，$(x,\lambda)\in\bar{D}_F\times[0,1]$，$n\in N$，$t_0$，$t_1\in[0,1]$. 那么，$E_{(t_0,t_1)}(x,\lambda)=(\lambda t_0+(1-\lambda)t_1)T_n(x)+(\lambda(1-t_0)+(1-\lambda)(1-t_1))e_0$，$(x,\lambda)\in\bar{D}_F\times[0,1]$. 因$\lambda t_0+(1-\lambda)t_1+\lambda(1-t_0)+(1-\lambda)(1-t_1)=1$，因此，$\lambda t_0+(1-\lambda)t_1\leqslant 1$，由(4.2)知，$d(x,E_{(t_0,t_1)}(x,\lambda))\geqslant\delta-\delta^*$，$x\in\partial_F(D_F)$. 显然，$G_t\in\bar{S}(D_F,2^F)$，$t\in[0,1]$，因为$\bar{S}(D_F,2^F)$是凸集，根据定理3.1($P_4$)知，$i_F(T,D_F)=i_F(\hat{e}_0,D_F)=1$. 由(*)性质及定理3.1($P_1$)知，存在$x\in D_F$使得$x\in T(x)$. 定理得证.

推论4.1 在定理4.1中，(LS)条件被下述(LS)′条件代替：

(LS)′ (a) 假设$T(\partial_F(D_F))$紧；

(b) 存在$e_0\in D_F$使得对任何$t\in(0,1)$，存在$\delta_t>0$使得$d(x,tT(x)+(1-t)e_0)\geqslant\delta_t>0$，$x\in\partial_F(D_F)$.

那么定理4.1的结论成立.

证明 如果存在$\{x_n\}\subset\partial_F(D_F)$使得$d(x_n,T(x_n))\to 0$，$n\to+\infty$，由(*)性质知存在$x\in\bar{D}_F$使得$x\in T(x)$. 结论成立. 现假设存在$\delta_1>0$使得$d(x,T(x))\geqslant\delta_1$，$x\in\partial_F(D_F)$. 因$e_0\in D_F$，存在$\delta_0>0$使得$d(x,e_0)\geqslant\delta_t$，$x\in\partial_F(D_F)$. 令$G_t(x)=tT(x)+(1-t)e_0$，$(x,t)\in\bar{D}_F\times[0,1]$. 显然，$G_t\in\bar{S}(D_F,2^F)$，$t\in[0,1]$. 对任何$t_0\in[0,1]$，令$\mu=\dfrac{\delta_{t_0}}{2M+\|e_0\|}$其中$M=\sup\{\|y\|\,|\,y\in T(x),\ x\in\partial_F(D_F)\}$. 那么，当$t\in[0,1]\cap O[t_0,\mu]$时，

$$H(G_t(x),G_{t_0}(x))\leqslant|t-t_0|(M+\|e_0\|)<\delta_{t_0}/2 \qquad (\text{对 } x\in\partial_F(D_F)).$$

由定理 3.1(P_4)′ 知，$i_F(T,D_F)=i_F(\hat{e}_0,D_F)=1$。再由(*)性质和定理3.1($P_1$)知，存在 $x\in D_F$ 使得 $x\in T(x)$。

推论4.2 设 $\partial_F(D_F)\subset X$ 有界且 $T\in\bar{S}(D_F,2^F)$。假设 $T:\partial_F(D_F)\to 2^F$ 是 $1-\Phi$-压缩使得对每一个 $x\in\partial_F(D_F)$，$T(x)$ 是闭集，如果 T 在 $\bar{D}_F$ 上具有(*)性质且满足：

(LS)″ 存在 $e_0\in D_F$ 使得 $x\bar{\in}tT(x)+(1-t)e_0$，$x\in\partial_F(D_F)$，$t\in(0,1)$。

那么定理4.1的结论成立。

证明 如果存在 $\{x_n\}\subset\partial_F(D_F)$ 使得 $d(x_n,T(x))\to 0$，$n\to+\infty$，那么由(*)性质知存在 $x\in\bar{D}_F$ 使得 $x\in T(x)$。

现假设存在 $\delta_1>0$，使得

$$d(x,T(x))\geqslant\delta_1>0,\ \text{对所有 } x\in\partial_F(D_F). \tag{4.4}$$

令 $g(x,t)=x-tT(x)-(1-t)e_0$，$(x,t)\in\bar{D}_F\times[0,1]$。如果 $\overline{\theta\in g(\partial_F(D_F)\times[0,1])}$，那么存在 $(x_n,t_n)\in\partial_F(D_F)\times[0,1]$ 且 $z_n\in T(x_n)$ 使得 $x_n-t_nz_n-(1-t_n)e_0\to 0$，$n\to+\infty$。因 $\{t_n\}\subset[0,1]$。可假设 $t_n\to t_0$，又因 $T(\partial_F(D_F))$ 有界，因此，$x_n-t_0z_n\to(1-t_0)e_0$。显然 $t_0\neq 1$ 且 $t_0\neq 0$，如果 $t_0=1$，这与(4.4)矛盾；如果 $t_0=0$，那么 $e_0\in\partial_F(D_F)$，此与 $e_0\in D_F$ 矛盾。故 $0<t_0<1$。因 $\{x_n\}$ 有界且 $\{x_n\}\subset\{x_n-t_0z_n+t_0z_n\}\subset\{x_n-t_0z_n\}+t_0\{z_n\}\subset\{x_n-t_0z_n\}+t_0T\{x_n\}$，从而，

$$\Phi(\{x_n\})\leqslant t_0\Phi(T\{x_n\})\leqslant t_0\Phi(\{x_n\})$$

因此 $\{x_n\}$ 是相对紧集。不妨假设 $x_n\to x_0\in\partial_F(D_F)$。因 $T\in\bar{S}(D_F,2^F)$，T 在 $\bar{D}_F$ 上是 q·u·s·c。又因 $T(x)$ 闭，$x\in T(x)$。故 $T(x)$ 紧。$x\in\partial_F(D_F)$。从而 $\theta\in g(x_0,t_0)$。即 $x_0\in t_0T(x_0)+(1-t_0)e_0$，这与条件(LS)′矛盾，因此 $\theta\bar{\in}g(\partial_F(D_F)\times[0,1])$。即存在 $\delta>0$ 使得

$$d(x,tT(x)+(1-t)e_0)\geqslant\delta>0,\ \text{对所有 } x\in\partial_F(D_F)\ t\in[0,1].$$

从定理4.1知推论4.2的结论成立。

推论4.3 设 $D\subset X$ 有界且 $T:\bar{D}_F\to 2^F$ 有界，u·s·c且 1-Φ-压缩，如果 T 在 $\bar{D}_F$ 上具有(*)性质且满足(LS)″。那么定理4.1的结论成立。

注4.1 在[4]中，上面的推论4.3是在假设 $F=X$ 且 T 是单值 1-Φ-压缩映象的条件下得到证明。

推论4.4 设 $D\subset X$ 有界且 $T:\bar{D}_F\to 2^F$ 有界，u.s.c且凝聚。如果 T 满足(LS)″，那么定理4.1的结论成立。

证明 因 T 是u.s.c且凝聚，因此 $T\in S_1(D_F,2^F)$。假设 $\{x_n\}\subset\bar{D}_F$ 使得 $d(x_n,T(x_n))\to 0$，$n\to+\infty$。因 T 凝聚，故对 $x\in\bar{D}_F$，$T(x)$ 紧，因此存在 $y_n\in T(x_n)$ 使得 $d(x_n,y_n)=d(x_n,T(x_n))\to 0$，$n\to+\infty$。但 $\{x_n\}$ 有界且 $\{x_n\}\subset\{x_n-y_n\}+\{y_n\}\subset\{x_n-y_n\}+T\{x_n\}$，因此 $\Phi\{x_n\}\leqslant\Phi(T\{x_n\})$，从而 $\{x_n\}$ 相对紧，因 T 凝聚。不妨假设 $x_n\to x_0$，$n\to+\infty$。因 T 是 u.s.c，故 $x_0\in T(x_0)$。又因(*)条件成立，从推论4.3知，存在 $x\in\bar{D}_F$ 使得 $x\in T(x)$。

注4.2 在[1]中，推论3.4是在 X 是Banach空间的情况下得到证明。当 $F=X$，推论4.4推广了[5]中定理3.2。

下面的例子能用定理4.1判断，但不能用[1]中定理1.1。

例2 设 $F=[0,+\infty)$，$D=(1,1)$，那么 $\bar{D}_F=[0,1]$，$\partial_F(D_F)=\{1\}$。选定一个 $\sigma\in\left(0,\frac{1}{10}\right)$。令 $D_1=\left[0,\frac{2\sigma}{9}\right)$，$D_2=\left[\frac{2\sigma}{9},\frac{2}{5}(1+\sigma)\right]$ 且 $D_3=\left(\frac{2}{5}(1+\sigma),1\right]$。令

$$T(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{2\sigma}{9},\ \dfrac{1}{3}(1-x+\sigma)\right)\cup\left(\dfrac{1}{3}(1-x+\sigma),\ \dfrac{2}{3}(1-x+\sigma)\right), & \\ & (x\in D_1\cup D_3)\\ \left[\dfrac{2\sigma}{9},\ \dfrac{2}{3}(1-x+\sigma)\right] & (x\in D_2)\end{cases}$$

由例1知，$T\in\bar{S}(D_F,2^F)$。不难证明T具有定理4.1中的(*)性质。选取 $e_0=\sigma/3$，那么$d(1,tT(1)+(1-t)e_0)\geqslant1-2\sigma/3>0$，对$t\in(0,1)$。从定理4.1知，存在$x\in\bar{D}_F$使 $x\in T(x)$。因对每一个$x\in D_1\cup D_3$，$T(x)$非紧非凸，因此[1]中定理1.1不能用于判断此结论。

定理4.2 设$F\subset X$是一楔形且$D\subset X$是一开集，假设$T\in\bar{S}(D_F,2^F)$使得$(I-T)(D_F)$有界。如果下述条件成立：

(L_1) 存在$\delta>0$，$\omega\in F$，$\omega\neq\theta$使得$d(x,T(x)+t\omega)\geqslant\delta$，对任何$t\geqslant0$且$x\in\partial_F(D_F)$；

(L_2) 令$T_t=T+t\omega$ $(t\geqslant0)$，那么T_t在D_F上具有(*)性质，对任何$t\geqslant0$。

那么$i_F(T,D_F)=0$。

证明 假设$i_F(T,D_F)\neq0$且$\beta>0$。定义

$$G(x,t)=T(x)+t\beta\omega,\ (x\in\bar{D}_F,\ t\in[0,1])$$

因F是楔形，类似于引理3.1(iii)的证明知，$G_t\in\bar{S}(D_F,2^F)$，由引理2.1(4)知，

$$H(G_{t_1}(x),G_{t_0}(x))\leqslant|t_1-t_0|\beta\|x\|,\ (x\in\bar{D}_F,\ t_1,t_0\in[0,1])$$

注意到(L_1)，由定理3.1(P_4)′知，

$$i_F(T,D_F)=i_F(T+\beta\omega,D_F)\neq0$$

从定理3.1(P_1)知，存在$x_\beta\in D_F$使得$x_\beta\in T(x_\beta)+\beta\omega$，因此，对每一个$n\in N$，可选取$\{x_n\}\subset D_F$使$x_n\in T(x_n)+n\omega$，因$\|n\omega\|\to+\infty$，$n\to+\infty$，从而推出$(I-T)(D_F)$无界，此与假设矛盾。故$i_F(T,D_F)=0$。

令$W=\{(\Omega^1,\Omega^2)\,|\,\Omega^1,\Omega^2$是$X$的两个开集使得$\Omega^1\subset\Omega^2$或$\Omega^2\subset\Omega^1\}$。

定理4.3 设$F\subset X$是一楔形且$(\Omega^1,\Omega^2)\in W$，且$D=\Omega^1\cup\Omega^2$，$D^1=\Omega^1\cap\Omega^2$。假设$\theta\in D^1$且$\bar{D}^1\subset D$。如果$T\in\bar{S}(D_F,2^F)$使得T在$(\bar{D}\backslash D^1)_F$是具有(*)性质且满足下列条件：

(1) 存在 $\delta_1>0$ 和 $e_0\in\Omega_F^1$ 使得 $d(x,tT(x)+(1-t)e_0)\geqslant\delta_1$，对任何$x\in\partial_F(\Omega_F^1)$和$t\in(0,1)$；

(2) 存在$\delta_2>0$和$\omega\in F$，$\omega\neq\theta$使得$d(x,T(x)+t\omega)\geqslant\delta_2$，对任何$t>0$和$x\in\partial_F(\Omega_F^2)$，

(3) 令$T_t(x)=T(x)+t\omega$，对所有$x\in\bar{\Omega}_F^2$和$t\geqslant0$，那么T_t在$\bar{\Omega}_F^2$上具有(*)性质，对任何$t>0$。

则T在$(\bar{D}\backslash D^1)_F$中有一不动点。

证明 不失一般性。假设$D=\Omega^2$，$D^1=\Omega^1$。令$D^*=[\bar{D}\backslash(D^1\cup(D\backslash\bar{D}^1))]_F$，则$D^*\subset(\bar{D}\backslash D^1)_F$。又令$f=I-T$，如果$\theta\in f(D^*)$，类似于定理3.1的证明，存在$x\in(\bar{D}\backslash D^1)_F$使$x\in T(x)$。结论成立。

假设$\theta\notin f(D^*)$，因$\partial_F(D_F)\subset D^*$且$\partial_F(D_F^1)\subset D^*$，故存在$\tau_i>0$ $(i=1,2)$使得$\tau_1=d(\theta,f(\partial_F(D_F)))\geqslant d(\theta,f(D^*))>0$且$\tau_2=d(\theta,f(\partial_F(D_F^1)))\geqslant d(\theta,f(D^*))>0$。类似于定理4.1和4.2的证明可得，$i_F(T,D_F^1)=1$和$i_F(T,D_F)=0$。根据定理3.1($P_3$)可得，$i_F(T,(D\backslash\bar{D}^1)_F)\neq0$。再由定理3.1($P_1$)及(*)性质，推出存在$x\in(D\backslash\bar{D}^1)_F$使得$x\in T(x)$。

注4.3 定理4.3是[1]中推论3.3的推广。

五、区域不变性定理和满射性定理

定理5.1 假设$F\subset X$是一楔形且$T\in\bar{S}(D_F,2^F)$。如果下述条件成立：

(i) $i_F(T,D_F)\neq 0$;

(ii) 对任何给定$r<\tau$且$\forall y\in O_y(0,r)=O[0,r]\cap F$，$T_y=T+\hat{y}$在$D_F$上具有(*)性质，其中$\tau=\inf\{d(x,T(x))\,|\,x\in\partial_F(D_F)\}$。

那么$B_F(0,r)\subset(I-T)(D_F)$。

证明 因$i_F(T,D_F)\neq 0$知$\tau>0$，对任何给定的$y\in B_F(0,r)$，定义$G(x,t)=T(x)+ty$，$(x,t)\in\bar{D}_F\times[0,1]$。不难证明$G_t\in\bar{S}(D_F,2^F)$，$t\in[0,1]$。由引理2.1(4)知，

$$H(G_{t_0}(x),G_{t_1}(x))\leqslant|t_1-t_0|\,\|y\|,\quad x\in\bar{D}_F\text{且}t_1,t_0\in[0,1] \tag{5.1}$$

特别地，

$$H(G_0(x),G_t(x))\leqslant t\|y\|<\tau,\quad x\in\bar{D}_F\text{且}t\in[0,1] \tag{5.2}$$

根据(5.2)，$G(x,\cdot):[0,1]\to 2^F$关于$x\in\bar{D}_F$一致连续，从(4.1)可得，

$$d(x,G_t(x))\geqslant d(x,T(x))-H(T(x),G_t(x))>\tau-\tau=0,$$
$$(x\in\partial_F(D_F),\ t\in[0,1]) \tag{5.3}$$

由定理3.1$(P_4)'$知，

$$i_F(T,D_F)=i_F(T+y,D_F)\neq 0$$

又由定理3.1(P_1)知，存在$x\in D_F$使得$x\in T(x)+y$，即$y\in x-T(x)\subset(I-T)(D_F)$。

推论5.1 假设$T\in\bar{S}(D_F,2^F)$使得

(1) 对任何$x_0\in D_F$，$g_0\in T(x_0)$，存在$r_{g_0}>0$和$R_{g_0}>0$使得对任意$r\in O[0,R_{g_0})$和$y_{g_0}\in B_F(0,r)$，$T+\hat{g}_0+\hat{y}_{g_0}$在$\bar{B}_{\bar{D}_F}[x_0,r_{g_0}](=\bar{D}_F\cap O[x_0,r_{g_0}])$上具有(*)性质；

(2) $i_F(T+\hat{g}_0,\ B_{D_F}(x_0,r_{g_0}))\neq 0$。

则$(I-T)(D_F)$是关于F的相对开集。

证明 对任意$g_0\in(I-T)(D_F)$，存在$x_0\in D_F$使$g_0\in T(x_0)$，由(1)，(2)知，存在$r_{g_0}>0$使得$i_F(T+\hat{g}_0,B_{D_F}(x_0,r_{g_0}))\neq 0$，从而得$\tau_{g_0}=\inf\{d(x,T(x))\,|\,x\in\partial_F(B_{D_F}(x_0,r_{g_0}))\}>0$，由(2)，存在$R_{g_0}>0$。令$r<\min\{\tau_{g_0},R_{g_0}\}$，那么对任何$y_{g_0}\in B_F(0,r)$，$T+\hat{g}_0+\hat{y}_{g_0}$在$B_{D_F}(x_0,r_{g_0})$上具有(*)性质，从定理3.1推得$B_F(g_0,r)\subset(I-T)(D_F)$。从而$(I-T)(D_F)$是关于$F$的相对开集。

推论5.2 设$T\in\bar{S}(F,2^F)$且下述条件成立：

(1) 存在$r_0>0$使得对每一个$\rho\geqslant r_0>0$和$f\in F$，$T_f=T+\hat{f}$在$B_F(0,\rho)$上具有(*)性质；

(2) $\lim\limits_{\rho\to+\infty}|i_F(T,B_F(0,\rho))|>0$；

(3) 令$G=I-T$。对任何有界集$M\subset F$，$G^{-1}(M)=\{x\in F\,|\,G(x)\cap M\neq\phi\}$有界；

则$(I-T)F=F$，特别地当$F=X$时，$(I-T)X=X$。

证明 由(2)，存在$r_1\geqslant r_0$，当$r\geqslant r_1$时，$i_F(T,B_F(0,r))\neq 0$。下证$\tau_R=\inf\{d(x,T(x))\,|\,x\in\partial_F(B_F(0,R))\}\to+\infty$，$R\to+\infty$。事实上，假设结论不成立，则存在$\{x_n\}\subset\partial_F(B_F(0,R_n))$，$y_n\in T(x_n)$，$R_n\to+\infty$，对$n\in N$。且$K>0$使得$\|x_n-y_n\|\leqslant K$，由(3)，$\{x_n\}$有界。此与条件$\|x_n\|=R_n\to+\infty$矛盾。故$\tau_R\to+\infty$，$R\to+\infty$。

对任何$y\in F$，因$G^{-1}(y)$有界，选取$R^1>r_0$使得$\tau_{R^1}>2\|y\|+1$。从定理5.1推知，$y\in(I-$

$T)(B_F(0,R^1))$。因此$(I-T)F=F$。

定理5.2 在推论5.2中，(3)被下述更弱的条件代替：

(3)′当$\{x_n\}\subset F$使得$\|x_n-y_n\|\to g\in F$，其中$y_n\in T(x_n)$，那么$\{x_n\}$有界。

则推论5.2的结论成立。

证明 类似于推论5.2的讨论，存在$r_1\geqslant r_0$使得$i_F(T,B_F(0,r))\neq 0$，对任何$r\geqslant r_1$。令$y\in F$和$G(x,t)=T(x)+ty$，$x\in\bar{D}_F$，$t\in[0,1]$。不难证明$G_t\in\bar{S}(D_F,2^F)$，对任何$t\in[0,1]$，且$G(x,\cdot)$关于$x\in\partial_F(D^d)$一致连续。

现在证明，存在$\delta>0$和$r_y\geqslant r_1$使得$\tau_{r_y}=\inf\{d(x,T(x)+ty)\mid x\in\partial_F(B_F(0,r_y))\}\geqslant\delta>0$。如果不成立，那么存在$r_y^{(n)}\to+\infty$，$n\to+\infty$，$x_n\in\partial_F(B_F(0,r_y^{(n)}))$，$y_n\in T(x_n)$和$t_n\in[0,1]$使得$\|x_n-y_n-t_ny\|\to 0$，$n\to+\infty$，因$t_n\in[0,1]$，不妨假设$t_n\to t_0$，则$\|x_n-y_n-t_0y\|\to 0$，$n\to+\infty$。从(3)知$\{x_n\}$有界。这与条件$\|x_n\|=r_y^{(n)}\to+\infty$矛盾。从定理3.1($P_4$)′知，

$$i_F(T+\hat{y},\ B_F(0,r_y))=i_F(T,B_F(0,r_y))\neq 0$$

由定理3.1(P_1)知，存在$x\in F$使$x\in T(x)+y$。

注5.1 定理5.2是[7]中定理4和[5]中推论4.1的推广。

推论5.3 设$T\in\bar{S}(F,2^F)$使得定理5.2的(3)′和推论5.2的(2)成立。假设存在$r\geqslant r_0$和$\delta>0$使得

(LS) $d(x,tT(x))\geqslant\delta>0$，对$t\in(0,1)$和$x\in\partial_F(B_F(0,r))$。

则$(I-F)F=F$，特别地，当$F=X$时，$(I-T)X=X$。

证明 因T满足推论5.2的(2)，类似于推论5.2的证明，存在$\delta_1>0$使得对任何$x\in\partial_F(B_F)(0,r))$，$d(x,T))\geqslant\delta_1$。令$\delta_2=\min\{\delta,r,\delta_1\}$。那么$d(x,tT(x))\geqslant\delta_2>0$，$t\in[0,1]$和$x\in\partial_F(\bar{B}_F(0,r))$，类似于定理4.1的证明得$i_F(T,B_F(0,r))\neq 0$。由定理5.2知结论成立。

参 考 文 献

[1] Fitzpatrick, P. M. and W. V. Petryshyn, Fixed point theorems and the fixed point index for multivalued mappings in cones, *J. London Math. Soc.*, **12**,2 (1975), 75—85.

[2] Petryshyn, W. V., Some results on multiple positive fixed points of multivalued condensing mappings, *Contemporary Math.*, **21** (1983), 171—177.

[3] Petryshyn, W. V., Multiple positive fixed points of multivalued condensing mappings with some applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **124** (1987), 237—253.

[4] Petryshyn, W. V., Fixed point theorems for various classes of 1-set-contraction and 1-ball-contractive mappings in Banach spaces, *Trans. Am. Math. Soc.*, **182** (1973), 323—352.

[5] Petryshyn, W. V. and P. M. Fitzpatrick, A degree theory, fixed point theorems, mapping theorems for multivalued noncompact mappings, *Trans. Am. Math. Soc.*, **194** (1974), 1—25.

[6] Castaing, C. and M. Valadier, Convex analysis and measurable multifunctions, *Lecture Notes in Math.*, New York, 580, (1977).

[7] Zhang Qing-yong, Subjetivity for multivalued 1-Φ-contractive fields, *Kexue Tongbao*, **31**, 24 (1986).

Fixed Point Index of Uniform Limit of Set-Valued Strict Set-Contractive Mappings and Its Applications

Ding Xie-ping Lan Kun-quan

(Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu)

Abstract

In this paper, the class of uniform limit mappings of set-valued, strict set-contractive mappings is discussed. Furthermore, the fixed point index theory for the uniform limit mappings is established. Using the fixed point index theory, some positive fixed point theorems are proved. Our theorems generalize some results in [1,4,5,7].

Key words fixed point index, fixed point theorem, subjectivity theorem