

# 时空与庞加莱图解\*

林 金

(中国科学技术促进发展研究中心, 1989年4月5日收到)

## 摘 要

本文探索空间技术经验与时空理论之间的关系, 引入一种时空观念的非传统途径。这个途径基于对雷达测量原理机制和非线性多普勒效应的分析, 从空间测量的角度可以对洛伦兹因子 $\sqrt{1-v^2/c^2}$ 和四维间隔 $t^2-x^2/c^2$ 的物理意义进行解释。引入“几何平均”时间间隔定义, 得到与狭义相对论可比较的结果, 时空关系表现在庞加莱图上。

## 一、雷达测量参数与事件参数

$A$ 和 $B$ 两飞船处于相对运动中, 设每艘飞船自带时钟、雷达和计算机。为讨论简单起见(参见附录A) 令 $A$ 和 $B$ 在两时钟的零时刻处于空间同一位置, 设在这重合点后两飞船处于相对匀速直线运动状态。

令 $A$ 雷达于 $A$ 钟指示 $t_1^A$ 时刻向 $B$ 发射一电磁信号, 当 $A$ 钟指示 $t_2^A$ 时刻时 $A$ 接收到从 $B$ 的反射信号。

关键问题是:  $B$ 是在什么时间收到 $A$ 发出的信号? 当然,  $B$ 本身可以直接从 $B$ 钟的读数,  $t_1^B$ , 得知 $A$ 发来信号到达的时间,  $B$ 并可将此数据存入 $B$ 飞船的计算机以备事后验证之用。在 $B$ 使用无线通讯手段将此数据 $t_1^B$ , 告知 $A$ 之前 $A$ 暂时无法知道 $B$ 钟指示的读数 $t_1^B$ ,  $A$ 可以利用他的第一手信息,  $t_1^A$ 和 $t_2^A$ , 来计算 $B$ 是在什么时间收到信号的, 并期望计算将与 $B$ 报来的数据一致。

应当强调, 雷达技术的基本测量信息是时间, 对 $A$ 来说, 发射信号时刻 $t_1^A$ 和接收信号时刻 $t_2^A$ 是仅有的原始第一手测量信息, 所有其它的量诸如 $B$ 接收到从 $A$ 来的信号的时刻和 $B$ 相对于 $A$ 的距离和速度等都是从 $t_1^A$ 和 $t_2^A$ 这两个原始数据计算出来的, 而不是由 $A$ 直接测量到的, 这些其它的量将称之为事件参数, 而观察者的第一手参数 $t_1^A$ 和 $t_2^A$ 称之为雷达参数。

## 二、基本假设

假设电磁信号传播速度相对于发信号的物体为常数 $c$ , 反射信号的传播速度是相对于反射信号的物体为常数 $c$ 。

这基本假设可用于两种基本情况:

\* 余桑推荐, 1986年4月第一次收到。

### I、第一基本情况

信号源和反射信号的物体处于相对匀速直线运动状态。

### II、第二基本情况

信号源和反射信号的物体处于相对静止状态。

先考虑第一种情况：设 $A$ 和 $B$ 两物体在零时刻重合，然后分离作相对匀速直线运动。 $A$ 物体于 $A$ 钟的 $t_1^A$ 时刻向 $B$ 发送电磁信号， $B$ 物体于 $B$ 钟的 $t_1^B$ 时刻接收并反射信号给 $A$ ， $A$ 于 $A$ 钟 $t_2^A$ 时刻收到反射信号。根据基本假设 $A$ 发送的信号相对于 $A$ 的传播速度和 $B$ 反射的信号相对于 $B$ 的传播速度是完全一样的，由于相对运动 $A$ 和 $B$ 之间的距离在不断增长，所以信号从 $A$ 到 $B$ 和从 $B$ 返回 $A$ 所通过的距离是不相等的。因此，从 $A$ 到 $B$ 的时间间隔 $t_1^B - t_1^A$ 和从 $B$ 返回 $A$ 的时间间隔必定是不相等的。也就是说， $B$ 反射信号的时刻 $t_1^B$ 不是 $A$ 发送和接收信号的时刻 $t_1^A$ 和 $t_2^A$ 的中点。另一方面，设 $A$ 于 $A$ 时间 $1$ 发送一信号给 $B$ ，由于存在相对运动，设 $B$ 于 $B$ 时间 $\eta$ 接收到此信号。于是根据基本假设， $B$ 发送信号的图象是完全对称一致的， $A$ 和 $B$ 都没有特权。所以，如果 $B$ 于 $B$ 时间 $1$ 时发送一信号给 $A$ ， $A$ 将于 $A$ 时间 $\eta$ 接收到此信号。由于运动的均匀性， $A$ 于 $A$ 时间 $t_1^A$ 向 $B$ 发送信号， $B$ 将于 $B$ 时间

$$t_1^B = \eta t_1^A \quad (2.1)$$

接收到此信号。当 $B$ 于 $B$ 时间 $t_1^B$ 反射信号给 $A$ ， $A$ 将于 $A$ 时间

$$t_2^A = \eta t_1^B \quad (2.2)$$

接收到反射信号。由(2.1)和(2.2)我们得到几何平均时间

$$\frac{t_1^B}{t_1^A} = \frac{t_2^A}{t_1^B}, \quad t_1^B = (t_2^A t_1^A)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

所以，在 $A$ 和 $B$ 处于相对匀速运动情况下， $t_1^B$ 是 $t_2^A$ 和 $t_1^A$ 的几何平均值。

应当注意到： $A$ 发出的信号传播速度相对 $A$ 是 $3 \times 10^8 \text{m/s}$ ，但相对 $B$ 不是 $3 \times 10^8 \text{m/s}$ 。当 $B$ 反射信号时，反射信号的速度相对 $B$ 为 $3 \times 10^8 \text{m/s}$ ，而非相对 $A$ 。

我们将称 $t_1^B/t_1^A$ 和 $t_2^A/t_1^B$ 这两个量为从 $A$ 到 $B$ 和从 $B$ 到 $A$ 的“单向多普勒效应”。事实上，(2.1)、(2.2)和(2.3)正表示 $A$ 和 $B$ 之间这两项“单向多普勒效应”的对称性，也是相对性原理的实质。

第二种基本情况：

现假设 $A$ 和 $B$ 相对于同一参考系处于相对静止状态。 $A$ 物体于 $A$ 钟 $t_1^A$ 时刻发送一电磁信号， $B$ 物体于 $B$ 钟 $t_1^B$ 时反射此信号， $A$ 于 $A$ 钟 $t_2^A$ 时接收到 $B$ 的反射信号。由于相对静止并依据基本假设，发送的和反射的信号的传播速度相对于 $A$ 和 $B$ 两者都是同样的。从 $A$ 到 $B$ 和从 $B$ 返回 $A$ 信号在同一参考系中以相同的速度通过相同的距离。因此，从 $A$ 到 $B$ 和从 $B$ 返回 $A$ 的时间间隔相等， $t - t_1^A = t_2^A - t_1^B$ ，

$$t = \frac{1}{2} (t_2^A + t_1^B) \quad (2.4)$$

所以，在 $A$ 和 $B$ 相对静止的情况下， $t$ 是 $t_2^A$ 和 $t_1^B$ 的算术平均值。

这样，同样的一组测量到的原始数据 $t_2^A$ 和 $t_1^B$ 可能对应两件不同的物理事件：一件物理事件是电磁信号从一运动物体上反射回来，事件时间是 $t_1^B = (t_2^A t_1^A)^{\frac{1}{2}}$ ；而另一物理事件是信号从 $A$ 参考系中的一个静止物体上反射回来，事件时间是 $t = (t_2^A + t_1^A)/2$ 。

$A$ 参考系中的固定距离可以用刚性量杆测量。也可以用电磁信号传播的时间间隔来量度空间距离， $A$ 在 $t_1^A$ 时刻发送信号，到达固定点后反射回到 $A$ 的时间为 $t_2^A$ 。距离可以用信号往返传播时间之半来量度

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{2}(t_2^A - t_1^A) \quad (2.5)$$

一个飞行物体在某个参考系中在某个时间间隔中通过一个固定的距离，在此基础上定义飞行物体的速度。

因此，关键的问题是如何定义时间间隔。

对 $A$ 来说，基本测量数据是 $t_1^A$ 和 $t_2^A$ 。关键是 $A$ 采用什么样的算法从 $t_1^A$ 和 $t_2^A$ 这两个原始数据计算出 $B$ 反射信号的事件时间。

传统习惯的算法是不论 $B$ 相对于 $A$ 处于相对运动或相对静止状态都把算术平均时间定义为 $B$ 反射信号的事件时间，对应时间间隔的算术平均定义，速度定义为

$$\frac{v}{c} = \frac{t_2^A - t_1^A}{t_2^A + t_1^A} \quad (2.6)$$

如在第一基本情况中指出的，若 $B$ 相对于 $A$ 处于相对运动状态，则按照基本假设 $B$ 发出的电磁信号相对于 $B$ 的传播速度为常数 $c$ ，而非相对 $A$ ，这种情况下宜采用几何平均算法。

经典的Ives和Stilwell实验可以重新解释作为选择几何平均算法的判决性实验验证（见附录B）。

所以，如果 $A$ 用几何平均值来定义 $B$ 接收信号的时间

$$t^* = (t_2^A t_1^A)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.7)$$

$t^*$ 将和 $B$ 的本征时间 $t^B$ 完全符合，这样 $A$ 和 $B$ 可以说有一个共同的时间。

事实上爱因斯坦的两条假设对 $B$ 接收 $A$ 发来的信号这样一个物理事件引入了两套计算事件时间的算法。爱因斯坦并未明确使用几何平均值时间，但几何平均值已经隐含在相对性原理的对称性中。洛伦兹因子正是把算术平均换算成几何平均的转换系数。

把(2.6)式代入洛伦兹因子表达式

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{t_2^A - t_1^A}{t_2^A + t_1^A}\right)^2} = \frac{(t_2^A t_1^A)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(t_2^A + t_1^A)} = \frac{t^*}{t} \quad (2.8)$$

这样 $t\sqrt{1 - v^2/c^2} = t^*$ 变成显而易见的恒等式

$$t \cdot t^* / t = t^* \quad (2.9)$$

现在把原始测量参数（信号收发时间）代入四维间隔表达式

$$t^2 - \frac{x^2}{c^2} = \left(\frac{t_2^A + t_1^A}{2}\right)^2 - \left(\frac{t_2^A - t_1^A}{2}\right)^2 = t_2^A t_1^A \quad (2.10)$$

(2.10)的关系表明四维间隔的平方是几何平均时间的平方。

由此可见，四维间隔的不变性（绝对性）正意味着几何平均时间的不变性（绝对性）。

### 三、三个观察者

现在我们讨论三艘飞船的情况。令 $A$ 和 $B$ 和 $C$ 三飞船在空间重合于一点，在对准他们时钟的共同零点后分离作相对匀速直线运动。

$A$ 于 $A$ 钟 $t_1^A$ 时刻给 $B$ 发送一电磁信号。 $B$ 于 $B$ 钟 $t_1^B$ 时刻接收到 $A$ 的信号， $B$ 发射一反射信号

回A, 同时又向C发送一信号. A于A钟 $t_2^A$ 时刻接收到B的反射信号. C于C钟 $t_1^C$ 时刻接收到B发来的信号, 即时反射一信号回B. B于B钟 $t_2^B$ 时刻接收到C的反射信号, 同时送一信号回A. A于A钟 $t_3^A$ 时刻接收到B送回的信号.

A, B和C发送和接收信号的时间由几何平均关系相联系:

$$\frac{t_2^A}{t_1^B} = \frac{t_1^B}{t_1^A} \eta_{AB}, \quad t_1^B = (t_2^A t_1^A)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

$$\frac{t_2^B}{t_1^C} = \frac{t_1^C}{t_1^B} \eta_{BC}, \quad t_1^C = (t_2^B t_1^B)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

$$\frac{t_3^A}{t_2^B} = \frac{t_2^A}{t_1^B} = \frac{t_1^B}{t_1^A} = \eta_{AB}, \quad t_1^A t_3^A = t_1^B t_2^B = (t_1^C)^2 \quad (3.3)$$

$$\frac{t_3^A}{t_1^C} = \frac{t_1^C}{t_1^A} = \eta_{AC}, \quad t_1^C = (t_3^A t_1^A)^{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

如果我们把几何平均时间定义为A, B, C的共同时间, 则A和B计算的C接收到信号这一物理事件的时间和C的本征时间 $t_1^C$ 符合一致. 这样, 几何平均时间和A, B及C相互之间的相对运动无关. 所以A, B和C钟所指示的时间可以直接比较.

如果A和B仍坚持算术平均时间观点, 他们导出

$$t_1^C = \frac{1}{2} (t_3^A + t_1^A) \quad (3.5)$$

$$\left(\frac{x}{c}\right)_C^A = \frac{1}{2} (t_3^A - t_1^A) \quad (3.6)$$

$$t_1^C = \frac{1}{2} (t_2^B + t_1^B) \quad (3.7)$$

$$\left(\frac{x}{c}\right)_C^B = \frac{1}{2} (t_2^B - t_1^B) \quad (3.8)$$

这里 A, B和C的时间是不同的, 他们没有共同语言. 为了相互通讯把各自计算出的时间翻译给对方他们必须找出一种共同语言, 结果发现这种共同语言还是由几何平均的概念所决定的.

为推导这一关系考虑(3.1)后得出

$$\frac{t_2^A}{t_1^A} = \frac{t_2^A}{t_1^B} \cdot \frac{t_1^B}{t_1^A} = \eta_{AB}^2, \quad (3.9)$$

式中 $t_2^A/t_1^A$ 可称之为“双向多普勒效应”.

利用(2.3)及(3.9)得到

$$\frac{t_2^A}{t_1^A} = \frac{1 + \left(\frac{v}{c}\right)_B^A}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)_B^A} \quad (3.10)$$

$$\eta_{AB} = \left( \frac{1 + \left(\frac{v}{c}\right)_B^A}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)_B^A} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.11)$$

结合 (3.3) 及(3.11)得

$$t_3^A = \left( \frac{1 + \left(\frac{v}{c}\right)_B^A}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)_B^A} \right)^{\frac{1}{2}} t_2^B \quad (3.12)$$

$$t_1^A = \left( \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)_B^A}{1 + \left(\frac{v}{c}\right)_B^A} \right)^{\frac{1}{2}} t_1^B \quad (3.13)$$

将(3.5), (3.6), (3.7), (3.8)代入(3.12), (3.13)得

$$t_C^A + \left(\frac{x}{c}\right)_C^A = \left( \frac{1 + \left(\frac{v}{c}\right)_B^A}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)_B^A} \right)^{\frac{1}{2}} \left( t_C^B + \left(\frac{x}{c}\right)_C^B \right) \quad (3.14)$$

$$t_C^A - \left(\frac{x}{c}\right)_C^A = \left( \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)_B^A}{1 + \left(\frac{v}{c}\right)_B^A} \right)^{\frac{1}{2}} \left( t_C^B - \left(\frac{x}{c}\right)_C^B \right) \quad (3.15)$$

由(3.14), (3.15)最后导出

$$t_C^A = \frac{t_C^B + \left(\frac{v}{c}\right)_B^A \left(\frac{x}{c}\right)_C^B}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)_B^A{}^2}} \quad (3.16)$$

$$\left(\frac{x}{c}\right)_C^A = \frac{\left(\frac{x}{c}\right)_C^B + \left(\frac{v}{c}\right)_B^A t_C^B}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)_B^A{}^2}} \quad (3.17)$$

如果假设所有的  $c = \text{const}$ , 则导出的(3.16)和(3.17)正是洛伦兹变换。

现举例说明这些公式的应用, 将几何平均算法和算术平均算法的结果都列表表明。例中使用一套简单的数字, 但结论适用于普遍情况。

例1 假设:  $t_1^C = 4, t_1^B = 2, t_2^B = 4, t_1^A = 1, t_2^A = 4, t_3^A = 16$

解

I. 几何平均时间

飞船	C 收到信号时间	结论
A	$(1 \times 16)^{\frac{1}{2}} = 4$	A, B, C 有共同时间
B	$(2 \times 8)^{\frac{1}{2}} = 4$	
C	4	

信号传播时间		结论
$t_{A \rightarrow C}$	$4 - 1 = 3$	信号往返传播时间间隔不等
$t_{C \rightarrow A}$	$16 - 4 = 12$	
$t_{B \rightarrow C}$	$4 - 2 = 2$	
$t_{C \rightarrow B}$	$8 - 4 = 4$	

II. 算术平均时间

飞船	C 收到信号时间	结论
A	$\frac{1}{2}(1+16) = 8.5$	A, B, C 没有共同时间
B	$\frac{1}{2}(2+8) = 5$	
C	4	

信号传播时间		结论
$t_{A \rightarrow C}$	$8.5 - 1 = 7.5$	信号往返传播时间间隔相等
$t_{C \rightarrow A}$	$16 - 8.5 = 7.5$	
$t_{B \rightarrow C}$	$5 - 2 = 3$	
$t_{C \rightarrow B}$	$8 - 5 = 3$	

#### 四、用雷达参数表示爱因斯坦速度相加定理

现在我们用观察者的发送和接收信号时间参数来考察速度相加定理。由(3.5)~(3.8)可以得到

$$\left(\frac{v}{c}\right)_B^A = \frac{t_3^A/t_1^A - 1}{t_3^A/t_1^A + 1} \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)_B^A = \frac{t_2^A/t_1^A - 1}{t_2^A/t_1^A + 1} \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)_C^B = \frac{t_3^A/t_2^A - 1}{t_3^A/t_2^A + 1} \quad (4.3)$$

(4.2), (4.3)可化成

$$\frac{t_2^A}{t_1^A} = \frac{1 + (v/c)_B^A}{1 - (v/c)_B^A} \quad (4.4)$$

$$\frac{t_3^A}{t_2^A} = \frac{1 + (v/c)_C^B}{1 - (v/c)_C^B} \quad (4.5)$$

显然,

$$\frac{t_3^A}{t_1^A} = \frac{t_3^A}{t_2^A} \cdot \frac{t_2^A}{t_1^A} \quad (4.6)$$

将(4.4), (4.5), (4.6)代入(4.1)得到爱因斯坦速度相加定理的通常形式

$$\left(\frac{v}{c}\right)_C^A = \frac{(v/c)_B^A + (v/c)_C^B}{1 + (v/c)_B^A (v/c)_C^B} \quad (4.7)$$

#### 五、雷达测量参数与洛巴切夫斯基几何

从雷达测量参数的角度来解释爱因斯坦速度相加定理的物理意义是很有意思的。由公式(4.1)~(4.5)很清楚表明在相对速度和双向多普勒效应之间存在双曲线关系。众所周知,爱因斯坦速度相加定理与洛巴切夫斯基几何线段相加定理相符合<sup>[4]</sup>。速度和双方多普勒效应之间的双曲线关系为洛巴切夫斯基几何的线段相加定理提供一个最自然的物理解释。相对速度用洛巴切夫斯基直线相应线段的长度表示的表达式为

$$\left(\frac{v}{c}\right)_C^A = \tanh \mu_C^A \quad (5.1)$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)_B^A = \tanh \mu_B^A \quad (5.2)$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)_C^B = \tanh \mu_C^B \quad (5.3)$$

$$\mu_C^A = \mu_B^A + \mu_C^B \quad (5.4)$$

式中  $\mu_C^A$ ,  $\mu_B^A$ ,  $\mu_C^B$  表示洛巴切夫斯基线段<sup>[4], [5]</sup>。算术平均和几何平均概念之间的联系可以很清楚地用雷达测量参数在庞加莱对洛巴切夫斯基几何的半圆图解上表示出来。

按定义在庞加莱图解上A和B之间的双曲线长度(见图1)可以用在轴上投影交比对数之半

来表示

$$\mu_B^A = \frac{1}{2} \ln(A'B'UV) \quad (5.5)$$

或者用庞加莱圆的弦的交比对数

$$\mu_B^A = \ln(ABUV) \quad (5.6)$$

或

$$\mu_B^A = \ln \frac{\tan \varphi_2 / 2}{\tan \varphi_1 / 2}, \quad (5.7)$$

式中(A'B'UV)表示A', B', U, V的交比.

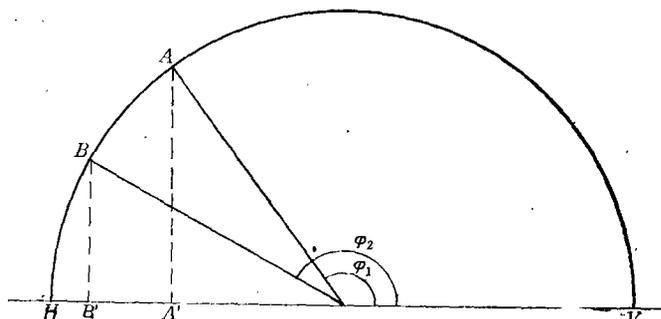


图 1

现在我们试用雷达测量参数来解释洛巴切夫斯基线段的物理意义并依洛巴切夫斯基几何对速度相加定理作物理解释. 比较(5.2)与(4.2)得

$$\left(\frac{v}{c}\right)_B^A = \tanh \mu_B^A = \frac{\exp[2\mu_B^A] - 1}{\exp[2\mu_B^A] + 1} = \frac{t_2^A/t_1^A - 1}{t_2^A/t_1^A + 1} \quad (5.8)$$

因此

$$\exp[2\mu_B^A] = \frac{t_2^A}{t_1^A}, \quad \mu_B^A = \frac{1}{2} \ln \frac{t_2^A}{t_1^A} \quad (5.9)$$

对比(5.9)和(5.5)后可以用雷达测量参数  $t_2^A$  和  $t_1^A$  来解释庞加莱图解. 交比 (A'B'UV) 是一个投影不变量, 可写成

$$(A'B'UV) = \frac{A'U \cdot B'V}{A'V \cdot B'U} = \frac{t_2^A}{t_1^A} \quad (5.10)$$

现今

$$A'U = A'V, \quad B'U = t_1^A, \quad B'V = t_2^A.$$

于是庞加莱半圆图解与时空参数之间的联系可以表示如图2.

在庞加莱图解上可以看出时间和空间的事件参数与雷达测量参数之间的关系. 几何平均和算术平均时间, 洛伦兹因子, 四维间隔在庞加莱图解上可以自然地用雷达测量参数表示:

$$\text{几何平均时间} \quad t^* = t_1^B = (t_2^A t_1^A)^{\frac{1}{2}} = BB',$$

$$\text{算术平均时间} \quad t = \frac{1}{2} (t_2^A + t_1^A) A'B,$$

$$\text{对应算术平均时间的相对距离} \quad \frac{x}{c} = \frac{1}{2} (t_2^A - t_1^A) = A'B',$$

$$\text{单向多普勒效应} \quad \frac{t_1^B}{t_1^A} = \frac{t_2^A}{t_1^A} = \sqrt{\frac{t_2^A}{t_1^A}} = \tan \varphi_2 / 2,$$

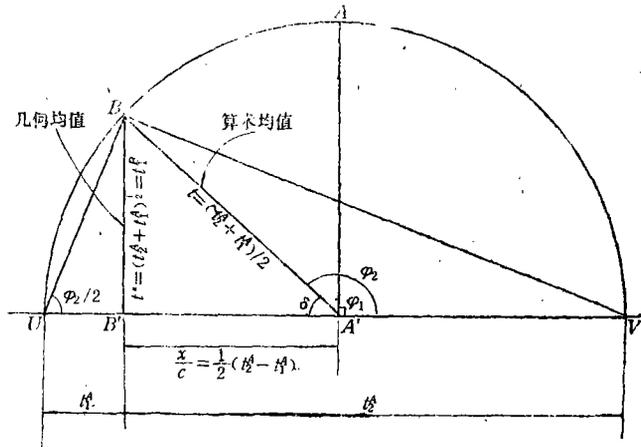


图 2

对应算术平均时间的相对速度 
$$\frac{v}{c} = \frac{x/c}{t} = \frac{t_2^A - t_1^A}{t_2^A + t_1^A} = \cos \delta,$$

洛伦兹因子 
$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{(t_2^A t_1^A)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(t_2^A + t_1^A)} = \frac{t^*}{t} = \sqrt{1 - \cos^2 \delta} = \sin \delta,$$

四维间隔 
$$t^2 - \left(\frac{x}{c}\right)^2 = t^{*2},$$

$$\left(\frac{t_2^A + t_1^A}{2}\right)^2 - \left(\frac{t_2^A - t_1^A}{2}\right)^2 = t_2^A t_1^A$$

$$(A'B)^2 - (A'B')^2 = (BB')^2$$

在  $A, B, C$  三飞船情况中对每对观察者可以构筑庞加莱半圆图解 (见图 3, 设  $A$  为主观察者)。

由于双曲线长度是交比, 相对于投影 (相似交换) 为不变量,  $A_1 C_1$  的投影映象  $AC$  可以同等处理, 因为解析上成立以下关系

$$\mu_{c_1}^{A_1} = \mu_C^A$$

在三观察者的庞加莱图解上可以清楚地表示出爱因斯坦的速度相加定理。物理上, 对计算速度最重要的要素正是多普勒效应, 而这一物理效应在庞加莱图解上的表现是交比, 所以在图 3 上通过相似交换多普勒效应及与之相应的速度值是保持不变的。

当  $A$  观察  $B$  时  $A$  用  $A$  的测量参数定  $B$  的事件参数如下:

几何平均时间

$$t_1^B = (t_2^A t_1^A)^{\frac{1}{2}} = BB',$$

算术平均时间

$$t_2^A = \frac{1}{2}(t_2^A + t_1^A) = A'B$$

对应算术平均的相对距离 
$$\left(\frac{x}{c}\right)_B^A = \frac{1}{2}(t_2^A - t_1^A) = A'B',$$

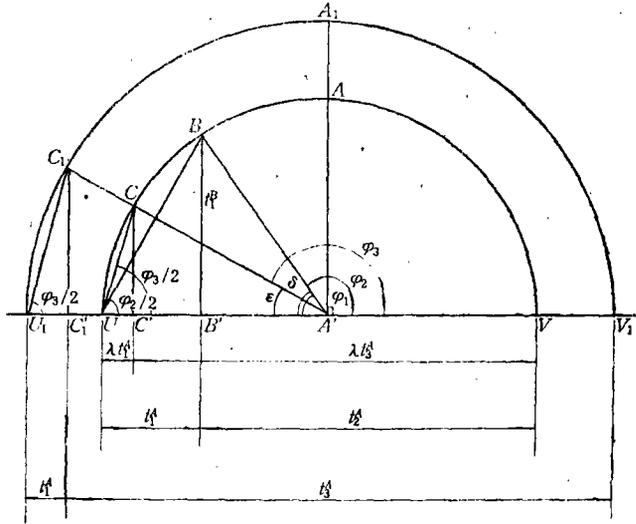


图 3

对应算术平均的相对速度  $\left(\frac{v}{c}\right)_B^A = \frac{t_2^A - t_1^A}{t_2^A + t_1^A} \cos \delta$ .

当A观察C时A用A的测量参数定C的事件参数如下：  
几何平均时间

$$t_1^C = (t_2^A t_1^A)^{\frac{1}{2}} = \frac{CC'}{\lambda} = C_1 C_1',$$

算术平均时间

$$t_C^A = \frac{1}{2}(t_2^A + t_1^A) = \frac{A'C}{\lambda} = A'C_1,$$

对应算术平均的相对距离  $\left(\frac{x}{c}\right)_C^A = \frac{1}{2}(t_2^A - t_1^A) = \frac{A'C'}{\lambda} = A'C_1'$ ,

对应算术平均的相对速度

$$\left(\frac{v}{c}\right)_C^A = \frac{t_2^A - t_1^A}{t_2^A + t_1^A} = \cos \epsilon.$$

于是B观察者认为按算术平均时间观念C相对B的相对速度为

$$\left(\frac{v}{c}\right)_B^C = \tanh \mu_C^B.$$

然而，洛巴切夫斯基线段  $\mu_C^B$  定义为

$$\mu_C^B = \frac{1}{2} \ln(B'C'UV) = \frac{1}{2} \ln \frac{(1 - \cos \delta)(1 + \cos \epsilon)}{(1 + \cos \delta)(1 - \cos \epsilon)},$$

$$\exp[2\mu_C^B] = \frac{(1 - \cos \delta)(1 + \cos \epsilon)}{(1 + \cos \delta)(1 - \cos \epsilon)}$$

所以

$$\left(\frac{v}{c}\right)_B^C = \tanh \mu_C^B = \frac{\exp[2\mu_C^B] - 1}{\exp[2\mu_C^B] + 1} = \frac{\cos \epsilon - \cos \delta}{1 - \cos \epsilon \cos \delta} =$$

$$= \frac{\left(\frac{v}{c}\right)_C^A - \left(\frac{v}{c}\right)_B^A}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)_C^A \left(\frac{v}{c}\right)_B^A} = \frac{t_3^A - t_2^A}{t_3^A + t_2^A}$$

对爱因斯坦速度相加定理和相应的洛巴切夫斯基双曲线几何的物理解释的关键在于(5.8)式所示速度与多普勒效应之间的双曲线非线性关系。若如在通常雷达技术中把多普勒效应看作为线性效应,结果在非相对论性运动学中速度空间的几何就成为欧几里得的。用速度和多普勒效应之间的双曲线测量关系来表示,相应的爱因斯坦速度相加定理的几何就成洛巴切夫斯基双曲线几何而不是欧几里得几何。

自(3.5), (3.6), (3.7), (3.8)表达式可以表示四维间隔

$$(t_C^A)^2 - \left(\left(\frac{x}{c}\right)_C^A\right)^2 = \left(\frac{t_3^A + t_1^A}{2}\right)^2 - \left(\frac{t_3^A - t_1^A}{2}\right)^2 = t_3^A t_1^A \quad (5.11)$$

$$(t_C^B)^2 - \left(\left(\frac{x}{c}\right)_C^B\right)^2 = \left(\frac{t_2^B + t_1^B}{2}\right)^2 - \left(\frac{t_2^B - t_1^B}{2}\right)^2 = t_2^B t_1^B \quad (5.12)$$

自(3.3)式已知  $t_3^A t_1^A = t_2^B t_1^B = (t_1^C)^2$ ,

$$\therefore (t_C^A)^2 - \left(\left(\frac{x}{c}\right)_C^A\right)^2 = (t_C^B)^2 - \left(\left(\frac{x}{c}\right)_C^B\right)^2 = (t_1^C)^2 \quad (5.13)$$

再一次,几何平均时间概念引起我们注意。

所以,四维间隔不再是“处于幕后的一种神秘东西”和“本身并不具备多少物理意义的某种东西”<sup>(6)</sup>。相反,四维间隔清楚地揭示了由几何平均概念定义的共同时间的物理意义。四维间隔,亦即几何平均时间,是不同观察者不同的算术平均值之间的唯一联系。洛伦兹变换正是不同观察者的算术平均值通过几何平均值联系起来的关系的表达式。

致谢 Robert M. Kiehn 教授仔细阅读了本文手稿,与作者进行了有意义的讨论并提出了改进的建议,谨表感谢。

### 附录A 运动钟对钟

A与B飞船处于相对匀速直线运动。A钟与B钟的机构和快慢完全一样,但他们相互之间没有对过钟,所以他们可能没有共同的零点。这两只运动钟应如何对钟?

设A在A钟  $t_1^A$  时发第一个脉冲给B,于A钟  $t_1^A + \Delta t_1^A$  时发第二个脉冲给B。A在A钟  $t_2^A$  时收到B的第一个反射信号,于A钟  $t_2^A + \Delta t_2^A$  时收到第二个反射信号。于是,A可用  $\Delta t_1^A$  和  $\Delta t_2^A$  两数据计算“双向多普勒效应”  $\Delta t_2^A / \Delta t_1^A$

$$\eta^2 = \frac{\Delta t_2^A}{\Delta t_1^A}$$

现可用  $\eta$  及  $t_1^A$  及  $t_2^A$  算出初始时刻  $t_0$ 。因为A和B处于匀速直线运动,应成立下式

$$\frac{t_2^A - t_0}{t_1^A - t_0} = \eta^2,$$

运算后得

$$t_0 = \frac{\eta^2 t_1^A - t_2^A}{\eta^2 - 1}$$

如果B接到A的第一个信号时,B钟的读数  $t_1^B$  满足以下所列关系式,则B钟即与A钟对齐

$$t_1^B - t_0 = [(t_1^A - t_0)(t_2^A - t_0)]^{\frac{1}{2}} = \eta(t_1^A - t_0),$$

因此

$$t_1^B = \frac{\eta t_1^A + t_2^A}{\eta + 1}$$

如果B相对于A处于静止状态, 则 $\eta=1$ ,  $t_0 \rightarrow -\infty$ , 在此情况下

$$t_2^B = \frac{1}{2}(t_2^A + t_1^A)$$

所以, 在相对静止时算术平均为几何平均之特例. 运动钟只能用几何平均方法对钟, 几何平均法对静止钟亦真. 而算术平均值作为几何平均值的极限情况仅适用于静止钟.

### 附录B 非线性多普勒效应与Ives及Stilwell实验

氢离子B之本征周期 $dt_1^B$ 为已知, B相对于实验参考系A以速度 $v$ 作相对运动,  $v$ 从加速势计算得出, 而加速势的定义则基于相应于(2.6)式的算术平均时间. 实验室观察并记录的参数为外显周期 $dt_1^A$ .

如果运动离子B向实验室观察者A发出的电磁波是以相对于A(而非对B本身)为常速 $c$ 传播, 则物理图象将和第二基本情况所描述的相同, 信号就好像从A参考系中的静止物体发出的一样. 这种情况下 $dt_2^B$ 应是 $dt_1^A$ 和 $dt_2^A$ 的算术平均值, 多普勒效应表达式为

$$\frac{dt_2^B}{dt_1^B} = \frac{dt_2^A}{\frac{1}{2}(dt_2^A + dt_1^A)} = 1 + \frac{dt_2^A - dt_1^A}{dt_2^A + dt_1^A} = 1 + \frac{v}{c} \quad (*)$$

如果运动离子B向实验室观察者A发射的电磁波以相对B本身(而非相对A)为常速 $c$ 传播, 则物理图象就和第一基本情况中描述的相同, 信号从运动物体发出, 信号传播速度相对于运动物体为常数 $c$ . 这种情况下 $dt_2^B$ 应为 $dt_1^A$ 和 $dt_2^A$ 的几何平均值, 多普勒效应的表达式为

$$\frac{dt_2^B}{dt_1^B} = \frac{dt_2^A}{\sqrt{dt_2^A dt_1^A}} = \frac{(dt_2^A + dt_1^A)/2}{\sqrt{dt_2^A dt_1^A}} = \frac{1 + \frac{dt_2^A - dt_1^A}{dt_2^A + dt_1^A}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dt_2^A - dt_1^A}{dt_2^A + dt_1^A}\right)^2}} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (**)$$

Ives和Stilwell实验验证了后一公式(\*\*), 亦即验证了基本假设下的第一基本情况.

### 参 考 文 献

- [1] Einstein, A., Zur Elektrodynamik der bewegter Korper, Ann. Phys., 17 (1905), 891.
- [2] Minkowski, H., *Spsce and Time, The Principle of Relativity, A Collection of Original Memoirs*, Dover Publications, Inc.
- [3] Эйнштейн А., *Собрание Научных Трудов*, Том I, Москва (1965), 86, 145-148, 150-152, 176-179, 416-418, 541.
- [4] Fok, V., *Space, Time and Gravitation*.
- [5] Meschkowski, H., *Noneuclidean Geometry*, Academic Press, N.Y. and London.
- [6] Geroch, R., *General Relativity from A to B*.
- [7] Prokhovnik, S.J., *The Logic of Special Relativity*, NSWU Press (1978).
- [8] Fox, J. G., Evidence against emission theories, *American Journal of Physics*, 33, 1 (1965).

## Space Time on the Poincare Diagrams

Lin Jin

*(China Promotion and Development Research Centre  
of Science and Technology, Beijing)*

### Abstract

Relations between the experience of space technology and theory of space and time are found in this paper. A nontraditional approach to the concepts of space and time is introduced. The approach is based upon the analysis of the detailed mechanism of radar measurement and nonlinear Doppler effects as measured by an astronaut. The Lorentz factor  $\sqrt{1-v^2/c^2}$  and four-dimensional interval  $t^2-x^2/c^2$  may be interpreted from the point of view of a space technologist. A "geometrical mean" notion for computing time interval is introduced parallelly with the usual arithmetic mean formulas, giving results comparable with those of special relativity theory. Space time relationships are demonstrated on the Poincare diagrams.