

各向异性板弯曲分析的一种 级数—边界积分法*

梁 礼 平

(华南理工大学工程力学系, 1989年6月30日收到)

摘 要

本文的级数-边界积分方法能精确地满足一般的各向异性薄板或层合板弯曲问题的基本微分方程。它可用统一的级数形式来分析各种具有不同几何形状和边界支承情况的板。文中用此法计算了多组具有代表性的算例, 其中包括了固定、简支、自由以及自由边角点4种边界支承情况, 还包括了圆形、方形以及三角形3种板几何状况。这些算例的计算结果表明所得的挠度与内力都有很好的收敛性, 并证实了该方法的通用性。

一、引 言

当对称铺设的层合板很薄而可以采用直法线假设时, 其弯曲控制方程与匀质各向异性板相同; 而对于层数不少于6层的反对称铺设层合板, 只要把方程中的弯曲刚度换为相应的折算弯曲刚度, 其计算结果的误差并不大。然而, 由于在一般情况下存在耦合刚度 D_{16} 与 D_{26} , 我们通常无法把单、双三角级数法及其叠加法等用于这类板, 甚至采用能量法也常常得不到符合工程需要的内力计算结果^{[1][2]}。目前国外多倾向于使用Whitney首先采用的傅氏级数法^{[2][3]}来分析具有固定及简支边界的矩形板。但文[4]的研究证明了: 对于一般的各向异性板, “要使简支边界条件得以满足, 就不可能存在以数学上的分离变量形式来表达的挠曲面。”可见在存在自然边界条件的情况下, 上述方法算得的内力结果同样可能不收敛。针对以上情况, 文[5]与[6]曾尝试了用一种非分离变量形的级数方法, 结果证明了这种级数对于多种类形的算例所得的挠度与内力都有很好的收敛性, 但它与文[7]提出的影响函数法存在同样的问题, 即不易判断需要取多少个配置点及这些点究竟取在何处才最为合理。

本文将采用一种级数-边界积分方法, 它除了能精确地满足板的弯曲基本方程外, 还与计算各向同性板弯曲时常采用的叠加方法相似, 当级数项越取越多的时候, 能逐渐地逼近板的所有边界条件。该方法的原理很简单, 可用于具有各种几何形状及边界支承情况的各向异性板弯曲问题, 其优点是不言而喻的。

*云天铨推荐。

广东省自然科学基金资助项目。

二、方法原理

令 Ω 代表板域内部, B 代表板的边界, 则各向异性板或对称铺设层合板的弯曲问题可归结为求解偏微分方程

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.1)$$

的边界值问题, 其中 $w(x, y)$ 为板的挠度, D_{ij} ($i, j=1, 2, 6$)为弯曲刚度矩阵元素, 对于反对称铺设层合板, 可用折算弯曲刚度 $[D] - [B][A]^{-1}[B]$ 代替(2.1)中的相应刚度. 在一般的情况下, 板的边界条件往往可表示为

$$\left. \begin{aligned} w &= \bar{w} & (x, y) \in B_w \\ \partial w / \partial n &= \bar{\theta} & (x, y) \in B_\theta \\ M_n &= \bar{M} & (x, y) \in B_M \\ V_n &= \bar{V} & (x, y) \in B_V \\ w_k &= \bar{w}_k & k=1, 2, \dots, N_s \\ P_l &= \bar{P}_l & l=1, 2, \dots, N_P \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

在以上各式中, n 代表板边外法线, B_w, B_θ, B_M, B_V 分别是 B 上挠度 w 、法向转动 $\partial w / \partial n$ 、法向弯矩 M_n 、法向等效剪力 V_n 已知的部分, 带上横杠的量是已知的边界分布函数或常数, N_s 与 N_P 则分别是边界上挠度已知与作用力已知的边角点的总数. 此外, (2.2)式中的 M_n, V_n 与 P_l 都可用挠函数 $w(x, y)$ 的偏导数表出.

引入边界残值

$$\left. \begin{aligned} R_w &= w - \bar{w} & (x, y) \in B_w \\ R_\theta &= W_\theta (\partial w / \partial n - \bar{\theta}) & (x, y) \in B_\theta \\ R_M &= W_M (M_n - \bar{M}) & (x, y) \in B_M \\ R_V &= W_V (V_n - \bar{V}) & (x, y) \in B_V \\ R_{sk} &= W_s (w_k - \bar{w}_k) & k=1, 2, \dots, N_s \\ R_{Pl} &= W_P (P_l - \bar{P}_l) & l=1, 2, \dots, N_P \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

其中 W_θ, W_M, W_V, W_s 和 W_P 是调整系数, 用于调整各边界量因量纲、数量级大小要求不同等因素引起的差异. 显然, 只要这些系数不为零, 则若所选的挠函数能使式(2.3)定义的边界量处处为零, 也就能使边界条件(2.2)完全满足. 由此可见, 如果问题存在精确解, 则在定义最小二乘泛函

$$I = \int_{B_w} R_w^2 dl + \int_{B_\theta} R_\theta^2 dl + \int_{B_M} R_M^2 dl + \int_{B_V} R_V^2 dl + \sum_{k=1}^{N_s} R_{sk}^2 + \sum_{l=1}^{N_P} R_{Pl}^2 \quad (2.4)$$

后, 在所有满足基本微分方程(2.1)的函数中, 能使 I 达到最小的那一函数就是问题的挠度的精确解, 相应地这时应有

$$\delta I = 0 \quad (2.5)$$

变分约束是挠函数 $w(x, y)$ 应满足方程(2.1).

现假定我们能找到方程(2.1)的一个齐次解系 $w_j(x, y)$ ($j=1, 2, \dots$), 且能证明此解系在域内及边界上 $\Omega+B$ 完备, 则板的实际挠度就可以展开为以下的级数形式

$$w(x, y) = w^0(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} c_j w_j(x, y) \quad (2.6)$$

其中 $w^0(x, y)$ 是方程(2.1)的一个特解, c_j ($j=1, 2, \dots$)是待定系数. 此级数不论在何处截断都能精确地满足基本方程(2.1).

把级数(2.6)代入(2.3)各等式右边, 然后代入(2.4), 再利用式(2.5), 由求驻值方法 $\partial I / \partial c_i = 0$ ($i=1, 2, \dots$), 即可求得各待定系数 c_j 应满足的线性方程

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} c_j + b_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots) \quad (2.7)$$

其中 a_{ij} 与 b_i 都是常数, 由下列边界积分算出

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= \int_{B_w} w_i w_j dl + \int_{B_\theta} W_i^0 \frac{\partial w_i}{\partial n} \frac{\partial w_j}{\partial n} dl + \int_{B_M} W_M^0 M_{ni} M_{nj} dl \\ &+ \int_{B_V} W_V^0 V_{ni} V_{nj} dl + \sum_{k=1}^{N_d} W_k^0 w_{ki} w_{kj} + \sum_{l=1}^{N_P} W_P^0 P_{li} P_{lj} \\ b_i &= \int_{B_w} w_i w^* dl + \int_{B_\theta} W_i^0 \frac{\partial w_i}{\partial n} \theta^* dl + \int_{B_M} W_M^0 M_{ni} M_{ni}^* dl \\ &+ \int_{B_V} W_V^0 V_{ni} V_{ni}^* dl + \sum_{k=1}^{N_d} W_k^0 w_{ki} w_{ki}^* + \sum_{l=1}^{N_P} W_P^0 P_{li} P_{li}^* \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

$(i, j=1, 2, \dots)$

式中 M_{nj}, V_{nj}, w_{kj} 与 P_{lj} 是 M_n, V_n, w_k 与 P_l 的级数表达式中由级数项 $w_j(x, y)$ 导出的那一部分,

$$\left. \begin{aligned} w^* &= w^0 - \bar{w}, \quad \theta^* = \partial w^0 / \partial n - \bar{\theta}, \quad M_{ni}^* = M_{ni}^0 - \bar{M}_{ni} \\ V_{ni}^* &= V_{ni}^0 - \bar{V}_{ni}, \quad w_{ki}^* = w_{ki}^0 - \bar{w}_{ki}, \quad P_{li}^* = P_{li}^0 - \bar{P}_{li} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$(k=1, 2, \dots, N), (l=1, 2, \dots, N)$

带右上标“0”的量 $M_{ni}^0, V_{ni}^0, P_{li}^0$ 与 w_{ki}^0 是 M_n, V_n, P_l 与 w_k 的级数表达式中相应于特解 $w^0(x, y)$ 的那一部分.

最后, 把满足线性方程组(2.7)的系数 c_j 回代级数(2.6), 即求得问题的挠度解.

在实际计算中, 如果我们不易求得式(2.8)的各项积分的精确值, 则可使用各种数值积分手段, 如梯形法、辛普森法、高斯积分法等. 用这些方法, 我们就可以求得各积分的任意精确结果. 因此, 当我们合理地排列齐次解系 $w_j(x, y)$, 适当地截断联立方程组(2.7)进行求解, 就可获得问题的一种级数解.

上述的原理与推导都很简单, 并且没有对板的边界条件提出特别要求, 所以, 这种级数解法可以适用于各种具有不同几何形状及支承情况的板的弯曲问题, 而且编成的计算机程序简单、通用性好.

三、挠度级数的选择

由前述可见,文中方法的关键取决于能否找到基本方程(2.1)的一个特解及一个齐次解完备系。其中齐次解系的选择特别重要,它直接影响到这种方法的适用范围及收敛速度,因此下面着重讨论这个问题。

方程(2.1)的特征方程为

$$D_{22}t^4 + 4D_{26}t^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})t^2 + 4D_{16}t + D_{11} = 0 \quad (3.1)$$

由于它不存在实根^[8],因而可把其4个根表示为

$$t_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad t_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad t_3 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad t_4 = \alpha_2 - i\beta_2 \quad (3.2)$$

其中 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ 都是实数。作线性变换

$$x_1 = x + \alpha_1 y, \quad y_1 = \beta_1 y \quad (3.3a)$$

$$x_2 = x + \alpha_2 y, \quad y_2 = \beta_2 y \quad (3.3b)$$

则方程(2.1)的齐次部分可表示为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) w = 0 \quad (3.4)$$

对一般的复合材料层合板及绝大多数的非各向同性板,它们的弯曲基本方程都没有重特征根,即 $t_1 \neq t_2$,因而 $x_1/y_1 \neq x_2/y_2$,这时(3.4)的解总可表示为^[8]

$$w(x, y) = f_1(x_1, y_1) + f_2(x_2, y_2) \quad (3.5)$$

其中函数 f_1 与 f_2 分别满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) f_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) f_2 = 0 \quad (3.6)$$

即 f_1 与 f_2 分别是变换平面 x_1-y_1 与 x_2-y_2 上的调和函数。单连域内的单值调和函数的完备系可选为

$$1, r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta \quad (n=1, 2, \dots)$$

其中 r 与 θ 是平面极坐标。因经线性变换(3.3)后,原来板平面上的单连域必然仍是单连域,所以齐次解(3.5)的相应完备系可取为

$$1, r_1^n \cos n\theta_1, r_1^n \sin n\theta_1, r_2^n \cos n\theta_2, r_2^n \sin n\theta_2 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} r_j &= (x_j^2 + y_j^2)^{1/2} = [x^2 + 2\alpha_j xy + (\alpha_j^2 + \beta_j^2)y^2]^{1/2} \\ \theta_j &= \arctg \frac{y_j}{x_j} = \arctg \left(\frac{\beta_j y}{x + \alpha_j y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2) \quad (3.8)$$

当且仅当(各向同性板是其特例)

$$\frac{D_{16}}{\sqrt{D_{11}}} = \frac{D_{26}}{\sqrt{D_{22}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{D_{12} + 2D_{66}} - \sqrt{D_{11}D_{22}} \quad (3.9)$$

时,特征方程(3.1)出现重根^[9],这时 $t_1 = t_2$,因而 $x_1/y_1 = x_2/y_2$,方程(3.4)变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right)^2 w = 0 \quad (3.10)$$

即 w 是变换平面 x_1-y_1 上的双调和函数,它在单连域内的单值完备系可选为

$$\begin{aligned} &1, r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1, r_1^2, r_1^2 \cos 2\theta_1, r_1^2 \sin 2\theta_1, r_1^3 \cos \theta_1, \\ &r_1^3 \sin \theta_1, r_1^3 \cos(n-2)\theta_1, r_1^3 \sin(n-2)\theta_1 \quad (n=3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (3.11)$$

与方程(2.1)的齐次解完备系有关的更多问题及一些应注意的细节在[9]中已有讨论, 这里不再赘述。

至于方程(2.1)的特解, 它通常不难求得, 例如, 对线性分布的载荷

$$q(x, y) = q_0 + q_1 x + q_2 y \quad (3.12)$$

特解可取为

$$w^0(x, y) = q_0 \frac{x^2 y^2}{8(D_{12} + 2D_{66})} + q_1 \frac{x^5}{120D_{11}} + q_2 \frac{y^5}{120D_{22}} \quad (3.13)$$

而对于作用在板域内的集中载荷, 则可取方程(2.1)的基本解作为特解, 这时需注意基本解的形式也与方程(3.1)是否存在重根有关。

四、计算结果的比较与分析

为验证把上一部分介绍的齐次解系用于计算各种具有不同几何形状及边界支承情况的板弯曲问题的收敛效果, 笔者用一个通用程序计算了多组具有截然不同的边界条件的复合材料板在均布荷载 q_0 作用下的弯曲。除特别说明外, 它们都是对称铺设的石墨-环氧复合材料层合板, 材料的沿轴弹性常数为

$$E_L/E_T = 40, G_{LT}/E_T = 0.5, \nu_{LT} = 0.25 \quad (4.1)$$

计算结果用下面的无量纲量表示

$$\bar{w} = \frac{100E_T h^3}{q_0 a^4} w, (\bar{M}_x, \bar{M}_y) = \frac{10}{q_0 a^2} (M_x, M_y) \quad (4.2)$$

其中 h 是板厚, a 是板平面的一个特征尺度。

首先看只有固定边界条件这种比较简单的情况。表 1 列出了铺设角各异 ($\theta = 0^\circ, \pm 15^\circ, \pm 30^\circ, \pm 45^\circ$) 的四种周边固定三层圆板的板中挠度和弯矩以及板边弯矩的计算结果以及精确解^[8]的相应结果。计算时级数(2.6)取了 8 个齐次解项, 并取 a 等于板的半径。表中数据显示, 文中方法所得的挠度与弯矩结果与精确解完全吻合。

表 2 所列是对三种单层复合材料方形板 ($\theta = 15^\circ, 25^\circ, 45^\circ$) 计算所得的板中挠度与弯矩, 并与已有的傅氏级数法 (共 121 个待定系数) 和能量法的结果^[3]相比较。计算时级数(2.6)取了 16 个待定系数, 表中的 θ 代表材料主轴的方向角。通过比较可知: 对这三种板, 文中方法都只需用比其它两种方法少得多的级数项就能获得相当理想的挠度与弯矩结果。

表 1

铺设角 θ	方 法	$\bar{w}(0,0)$	$\bar{M}_x(0,0)$	$\bar{M}_y(0,0)$	$\bar{M}_x(a,0)$
0°	本 文	1.1934	1.6036	0.0498	-3.1873
	精确解	1.1934	1.6036	0.0498	-3.1873
$\pm 15^\circ$	本 文	1.1934	1.4995	0.1539	-2.7874
	精确解	1.1934	1.4995	0.1539	-2.7874
$\pm 30^\circ$	本 文	1.1934	1.2152	0.4383	-1.8352
	精确解	1.1934	1.2152	0.4383	-1.8352
$\pm 45^\circ$	本 文	1.1934	0.8267	0.8267	-0.8865
	精确解	1.1934	0.8267	0.8267	-0.8865

表 2

θ	$\bar{w}(0,0)$			$\bar{M}_x(0,0)$		
	本 文	里兹法	傅氏级数法	本 文	里兹法	傅氏级数法
15°	0.09342	0.09395	0.09334	0.4354	0.4437	0.4130
25°	0.11783	0.11894	0.11661	0.4171	0.4447	0.4065
45°	0.15888	0.15876	0.16021	0.2899	0.2872	0.2662

再看简支边界情况。表3列出了对文献[10]中曾用斜板比拟法算过的几种各向异性方板进行计算所得的板中挠度。计算中仍只取16个待定系数，其结果就与斜板比拟法的结果相当接近。由于对具有自然边界条件的板，一般方法选用的试函数往往既不能满足基本方程（从而不满足板内部力的平衡）又不能满力力的边界条件，所以通常只是挠度计算结果较好而内力计算结果却差，甚至不收敛^{[1],[4]}。然而内力结果恰恰是工程上很关心的量。但如果使用本文的方法，则由于板内平衡条件可精确满足，所以挠度与内力的收敛性基本上是同步的，这点可由对表3第一种板取不同数目的齐次解项进行计算（取 $D_{12}/D_{11}=0.4$ ）所得的结果证实，见表4。表中数据同时还表明文中方法的收敛稳定，当级数项取到16项以后，板中挠度 w 与弯矩 \bar{M}_x 的计算结果已经不存在有意义的差别。

表 3

$\frac{D_{22}}{D_{11}}$	$\frac{D_{12}+2D_{66}}{D_{11}}$	$\frac{D_{16}}{D_{11}} = \frac{D_{26}}{D_{11}}$	$100 \frac{D_{11}w(0,0)}{q_0a^4}$	
			本 文	[10]
1	1.061	-0.174	0.4114	0.411
1	1.500	-0.500	0.4552	0.452
1	1.690	-0.587	0.4730	0.476

表 4

项 数	12	16	20	24	[10]
$100 \frac{D_{11}w}{q_0a^4}$	0.4146	0.4114	0.4118	0.4117	0.411
\bar{M}_x	0.5178	0.5145	0.5150	0.5149	

最后，笔者还用文中方法计算了如图1所示的具有自由边及自由边角点的三层正交铺设三角形悬臂板的弯曲问题。考虑到本例的边界条件较复杂，点B是一锐角，问题又没有对称性可供利用，而且缺少类似的计算结果可供参考，因而分别用46个与62个待定系数进行了计算。点B挠度 w_B 的计算值分别为2.404与2.406。最大弯矩发生在点A，分别为-3.803与-3.683。为验证计算结果的可信性，笔者把固定边AC等分10份取法向弯矩 M_x 值来计算积分

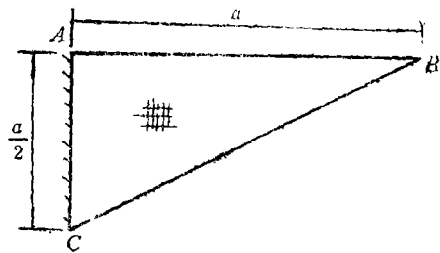


图 1

$$\frac{10}{q_0 a^3} \int_{a_0} M_n dl$$

当采用梯形积分公式时, 数值积分结果分别为 -0.8346 与 -0.8334 ; 当用辛卜森积分公式时, 结果分别为 -0.8334 与 -0.8320 , 它们都很接近理论值 -0.8333 . 本例的计算结果证实了文中方法对带自由边及自由锐角点的板弯曲问题同样有好的收敛性.

五、结 论

从前面的推导以及对数值结果所作的比较与分析, 我们可看到: (1) 文中的级数解法能精确地满足各向异性板的弯曲基本方程, 且在最小二乘边界积分的意义上能逐步逼近板的所有边界条件. (2) 此法可用统一的挠度级数来求解各种具有不同几何形状及边界支承情况各向异性板或层合薄板的弯曲问题, 相应的计算机程序简单且通用性好. (3) 用文中推荐的齐次解系能使该方法对广泛的问题都有很好的位移收敛性及内力收敛性, 且收敛是稳定的. (4) 由于采用了边界积分方法, 因而与[5]~[7]的配点方法相比, 能避免诸如配置多少个点及配点取在何处才最合理等问题. 此外, 与边界元法相比, 它又不存在奇异性问题.

参 考 文 献

- [1] Ashton, J. E., Anisotropic plate analysis — boundary conditions, *J. Comp. Mater.*, **4**, 2 (1970), 162.
- [2] Whitney, J. M., Analysis of anisotropic rectangular plates, *AIAA J.*, **10**, 10 (1972), 1344.
- [3] Whitney, J. M., Fourier analysis of clamped anisotropic plates, *J. Appl. Mech.*, **38**, 2 (1971), 530.
- [4] Wang, J. T., On the solution of plates of composite materials, *J. Comp. Mater.*, **3**, 3 (1969), 590.
- [5] Liang, Li-ping, A bending analysis of laminated plates under various boundary conditions, *Proc. Inter. Symp. Comp. Mater. Struct.*, Beijing (1986), Ed. T. T. Loo and C. T. Sun, Technomic Publ. Co., Ind. (1986).
- [6] 梁礼平, 角铺设层板弯曲问题的一种半解析法, *复合材料学报*, **4**, 1 (1987), 73.
- [7] Wu, B. C. and N. J. Altiero, A new numerical method for the analysis of anisotropic thin-plate bending problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **25** (1981), 343.
- [8] 列赫尼茨基, C. Г., 《各向异性板》, 胡海昌译, 科学出版社 (1963).
- [9] 梁礼平, 二维各向异性问题的齐次解完备系及有关问题, 第三届全国权残法会议论文, 峨嵋 (1989).
- [10] Ashton, J. E., An analogy for certain anisotropic plates, *J. Comp. Mater.*, **3**, 2 (1969), 355.

A Series Boundary Integration Method for the Bending Analysis of Anisotropic Plates

Liang Li-ping

*(Department of Engineering Mechanics, South China University
of Technology, Guangzhou)*

Abstract

A series boundary integration method is given which exactly satisfies the fundamental equation of bending analysis of general anisotropic plates or laminated plates in Kirchhoff's sense. With a unified deflection series, the method may be applied to the plates having different planforms and support conditions. Several groups of representative examples are calculated. The examples include circular, square and triangular plates, and their boundaries include clamped edges, simply supported edges, free edges and free corner. Numerical results indicate rapid convergency for both deflection and stress resultants and demonstrate wide applicability of the method.