一般旋转壳在轴对称变形下的复变量方程

钱伟长

（上海工业大学；上海市应用数学和力学研究所，1989年11月10日收到）

摘　要

本文在 Love-Kirchhoff 的假定下，求得了一般旋转壳在轴对称变形下的复变量方程．当旋转壳是圆截面环壳时，这些方程简化为 F. Tölke (1938)[3]，R. A. Clark(1950)[4] 和 B. B. Новожилов(1951)[5]的方程．当平均半径$\bar{R}$比环截面半径a大得很多时，求得了细环壳的复变量方程，当这个细环壳的截面是圆形时，简化作为作者 (1979)[6]的圆截面的细环壳复变量方程，我们列出了椭圆截面的细环壳复变量方程．当椭圆截面近似于圆截面时，该方程在形式上和圆细环壳方程基本相同．

一、引　　论

在H. Reissner(1912)[1]和E. Meissner(1915)[2]的轴对称壳理论的基础上，F. Tölke (1938)[3]，R. A. Clark(1950)[4]，B. B. Новожилов(1951)[5]曾把圆环壳方程式简化为一个复变量的方程．它们的复变量虽都略有不同，但作者已证明都有明确关系(1979)[6]，这种复变量化的过程只适用于子午线上的曲率半径是常数的轴对称壳，如圆球壳和圆环壳等．对于子午线曲率半径不是常数的壳，这种复变量化并不适用．本文利用Love-Kirchhoff 假定的近似条件，证明不是常数曲率半径的轴对称壳的Reissner-Meissner 方程，同样可以复变量化．

作为特例，我们研究了椭圆截面的圆环壳的复变量方程，并研究了这种壳的细环壳近似方程，以及近似圆形的椭圆截面圆环壳复变量方程．所有这些壳在研究波纹管的变形刚度中都是很有用的．

这里证明近似圆形的椭圆截面圆环壳复变量方程和圆截面的圆环壳的方程完全相似．后者业已详细研究过(钱伟长1979[6]1980[7])，所以，其求解过程在本文中略去了．

二、旋转壳在轴对称载荷下的平衡方程

让我们取旋转壳中面坐标φ和θ．有关线元为(图1)

$$ds^2=r_1^2d\varphi^2+r^2d\theta^2 \tag{2.1}$$

其中　r为A点的水平半径．而且有

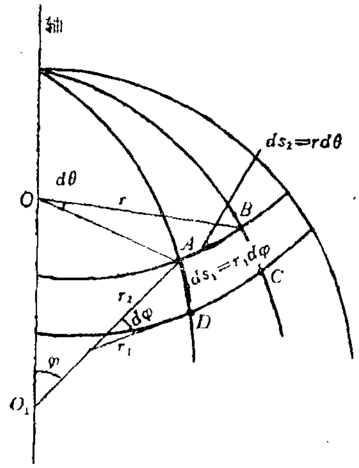

图1　旋转壳的中面坐标

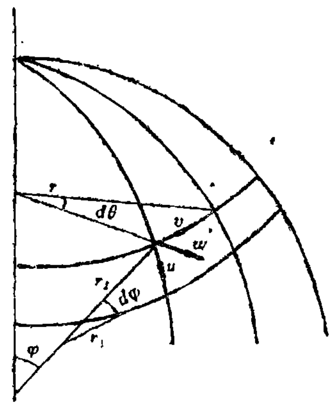

图2　旋转壳的变形位移

$$ds_2=\widehat{AB}=rd\theta \tag{2.2}$$

r_1为A点的子午线半径，也是A点的主曲率半径之一。

$$ds_1=\widehat{AD}=r_1d\varphi \tag{2.3}$$

r_2为A点的另一主曲率半径，而且

$$r_2=\frac{r}{\sin\varphi} \tag{2.4}$$

通过几何关系，很易证明

$$\frac{dr}{d\varphi}=r_2\cos\varphi,\qquad \frac{dr_2}{d\varphi}=(r_1-r_2)\mathrm{ctg}\varphi \tag{2.5}$$

称A点的位移分量为(u,v,w)，见图2；对于轴对称变形（没有扭转）而言，有

$$v=0,\quad u=u(\varphi),\qquad w=w(\varphi) \tag{2.6}$$

u,v,w都以顺φ,θ,r增长的方向为正。于是应变位移关系可以写成

$$e_\varphi=\frac{1}{r_1}\left(\frac{du}{d\varphi}+w\right),\qquad e_\theta=\frac{1}{r_2}(u\,\mathrm{ctg}\,\varphi+w),\qquad \tau_{\varphi\theta}=0 \tag{2.7}$$

曲率变化和位移的关系为

$$k_\varphi=\frac{1}{r_1}\frac{d\chi}{d\varphi},\qquad k_\theta=\frac{\chi}{r_2}\mathrm{ctg}\varphi,\qquad k_{\varphi\theta}=0 \tag{2.8}$$

其中　χ代表子午线的切线在弯曲变形时的转角

$$\chi=\frac{1}{r_1}\left(\frac{dw}{d\varphi}-u\right) \tag{2.9}$$

$e_\varphi,e_\theta,\tau_{\varphi\theta}$为中面拉伸应变分量，$k_\varphi,k_\theta,k_{\varphi\theta}$为中面的曲率变化。

薄膜力$N_\varphi,N_\theta,N_{\varphi\theta}$和弯矩$M_\varphi,M_\theta,M_{\varphi\theta}$可以写成

$$N_\varphi=B(e_\varphi+\nu e_\theta),\qquad N_\theta=B(e_\theta+\nu e_\varphi),\qquad N_{\varphi\theta}=0 \tag{2.10}$$

$$M_\varphi=-D(k_\varphi+\nu k_\theta),\qquad M_\theta=-D(k_\theta+\nu k_\varphi),\qquad M_{\varphi\theta}=0 \tag{2.11}$$

其中B的壳的薄膜抗拉刚度，D为壳的抗弯刚度

$$B=\frac{hE}{1-\nu^2},\qquad D=\frac{h^3E}{12(1-\nu^2)} \tag{2.12}$$

以上各式中，h为壳的厚度，E为杨氏模量，ν为泊桑比。

现在让我们研究壳元的平衡方程：图3(a)是用来研究全圆环壳元的轴向力平衡的，图3(b)是用来研究半圆环壳元$ABCD$的水平力的平衡的。最后，我们将用半圆环壳元$ABCD$的剪力和弯矩研究力矩平衡方程(见图3(c))。

(A)力矩平衡方程(图3(c))。

半圆环壳元受四条边界上的分布剪力和弯矩的力矩作用。

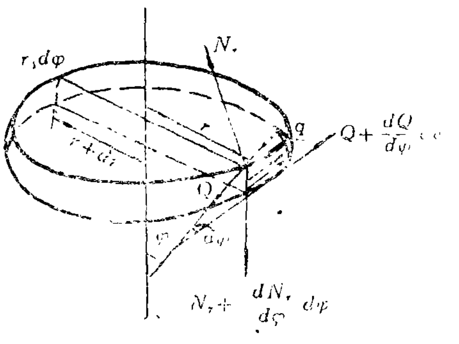

图3(a)　力的轴向平衡

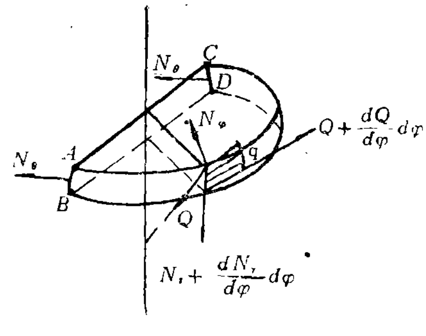

图3(b)　力的水平面内平衡

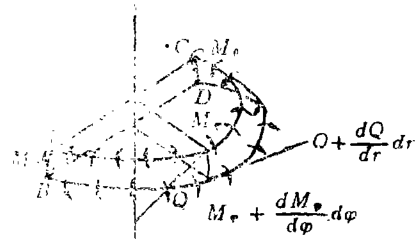

图3(c)　力矩和剪力的平衡

$\overset{\frown}{AC}$边界上受分布力矩M_φ作用，其合力矩为$2rM_\varphi$，$\overset{\frown}{BD}$边界上受分布力矩$M_\varphi+\dfrac{dM_\varphi}{d\varphi}d\varphi$作用，其合力矩和$\overset{\frown}{AC}$上的合力矩方向相反，为$-2rM_\varphi-2\dfrac{d}{d\varphi}(rM_\varphi)d\varphi$。在$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{CD}$边界上，有分布力矩$M_\theta$作用，各有合力矩$M_\theta r_1 d\varphi$，它们的轴向分量方向相反，互相对消，但其环面上的分量方向相同，合为一起等于$2M_\theta r_1\cos\varphi d\varphi$，指向和$\overset{\frown}{AC}$上的合力矩$2rM_\varphi$相同。最后，$\overset{\frown}{AC}$上的分布剪力$Q$和$\overset{\frown}{BD}$上的分布剪力$Q+\dfrac{dQ}{d\varphi}d\varphi$对圆环形成一个分布力矩$Qr_1d\varphi$，这个分布力矩在半圆环上积分后，得合力矩$2Qr_1rd\varphi$。把这些合力矩加在一起，平衡条件要求其总和为零。从些给出。

$$\frac{d}{d\varphi}(rM_\varphi)-r_1M_\theta\cos\varphi-r_1rQ=0 \tag{2.13}$$

把(2.8)式中的k_φ，k_θ代入(2.11)式，我们求得用χ表示的弯矩。

$$M_\varphi=-D\left(\frac{1}{r_1}\frac{d\chi}{d\varphi}+\nu\frac{\chi}{r_2}\operatorname{ctg}\varphi\right),\quad M_\theta=-D\left(\frac{\chi}{r_2}\operatorname{ctg}\varphi+\nu\frac{1}{r_1}\frac{d\chi}{d\varphi}\right) \tag{2.14}$$

把(2.14)代入(2.13)，得

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r}{r_1}\frac{d\chi}{d\varphi}\right)-\frac{r_1}{r}\cos^2\varphi\chi-\nu\sin\varphi\chi+\frac{1}{D}r_1rQ=0 \tag{2.15}$$

如果引进一个新的变量

$$\Phi=\frac{r}{\sin\varphi}Q \tag{2.16}$$

则(2.15)可以进一步简化为

$$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r}{r_1}\frac{d\chi}{d\varphi}\right)-\frac{r_1}{r}\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\chi-\nu\chi+\frac{1}{D}r_1\Phi=0 \tag{2.17}$$

这是平衡方程(2.13)化为χ和Φ表达式中的第一式.

(B)薄膜应力和剪力的平衡方程(图3(a),(b))

考虑全圆环的轴向力的平衡，轴向力有下列五种：(1)在$\varphi=\varphi$的边界上的分布剪力Q的轴向合力$2\pi rQ\cos\varphi$，(2)在$\varphi=\varphi$的边界上的分布薄膜力N_φ的轴向合力$-2\pi rN_\varphi\sin\varphi$，(3)在$\varphi+d\varphi$的边界上的分布剪力$Q+\frac{dQ}{d\varphi}d\varphi$的轴向合力$-2\pi rQ\cos\varphi-2\pi\frac{d}{d\varphi}(rQ\cos\varphi)d\varphi$，(4)在$\varphi+d\varphi$的边界上的分布薄膜力的轴向合力$+2\pi rN_\varphi\sin\varphi+2\pi\frac{d}{d\varphi}(rN_\varphi\sin\varphi)$，(5)环壳元上所受载荷$q$的轴向合力$-2\pi rr_1q\cos\varphi d\varphi$. 其平衡条件给出

$$\frac{d}{d\varphi}(N_\varphi r\sin\varphi-Qr\cos\varphi)-qr_1r\cos\varphi=0 \tag{2.18}$$

其中 $q=q(\varphi)$. (2.18)可以积分一次，得

$$N_\varphi=Q\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}+\frac{1}{r\sin\varphi}\int_{\varphi_A}^{\varphi}qrr_1\cos\varphi d\varphi+\frac{P_Ar_A}{r\sin\varphi} \tag{2.19}$$

其中 P_Ar_A为积分常数. 设r_A为旋转壳端面$\varphi=\varphi_A$处的水平面半径. 在该处N_φ和Q的值分别为N_{φ_A}和Q_A，而且

$$P_A=N_{\varphi_A}\sin\varphi_A-Q_A\cos\varphi_A \tag{2.20}$$

它是作用在φ_A端面上的每单位弧长上的轴向拉力.

最后考虑半圆环壳(图3(b))在N_φ,N_θ,Q,q作用下的水平面内的力的平衡.(1)在$\widehat{AB}$和$\widehat{CD}$上各有N_θ的合力$N_\theta r_1d\varphi$. 指向图左方，合起来等于$2N_\theta r_1d\varphi$. (2)$\widehat{AC}$上N_φ和Q的水平分量的和等于$N_\varphi\cos\varphi+Q\sin\varphi$，指向轴通过的圆心，其合力为$2r(N_\varphi\cos\varphi+Q\sin\varphi)$，指向图左方，(3)$\widehat{BD}$上的合力为$-2(N_\varphi\cos\varphi+Q\sin\varphi)r-2\frac{d}{d\varphi}[r(N_\varphi\cos\varphi+Q\sin\varphi)]$，指向图右，(4)$ABCD$表面上的载荷$q(\varphi)$的水平合力，指向图右，它是$-2qrr_1\sin\varphi d\varphi$. 它的平衡条件为

$$N_\theta r_1-\frac{d}{d\varphi}(N_\varphi r\cos\varphi+Qr\sin\varphi)-qrr_1\sin\varphi=0 \tag{2.21}$$

把(2.19)中的N_φ代入，简化得

$$N_\theta=\frac{1}{r_1}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{rQ}{\sin\varphi}\right)-\frac{1}{r_1\sin^2\varphi}\int_{\varphi_A}^{\varphi}qrr_1\cos\varphi d\varphi+\frac{qr}{\sin\varphi}-\frac{P_Ar_A}{r_1\sin^2\varphi} \tag{2.22}$$

(2.19),(2.22)是两个用$Q(r)$来表示N_θ，和N_φ的表示式．在实际上，它们是力的平衡方程．N_φ和N_θ不是独立的，它们满足一定的协调条件．如果把(2.19)(2.22)中的N_φ, N_θ代入这种协调条件，即得另一个用Q, χ来表示的协调方程，如果用(2.16)把Q换为Φ表示，这就是另一个Φ和χ的方程式，亦称协调方程．

三、旋转壳在轴对称变形下的协调方程

我们从(2.7)式，有

$$\frac{d}{d\varphi}(re_\theta)=\frac{d}{d\varphi}(u\cos\varphi+v\sin\varphi)=r_1\chi\sin\varphi+r_1e_\varphi\cos\varphi \tag{3.1}$$

但是，从(2.10)，有

$$e_\theta=\frac{1}{Eh}(N_\theta-\nu N_\varphi),\qquad e_\varphi=\frac{1}{Eh}(N_\varphi-\nu N_\theta) \tag{3.2}$$

把(3.2)代入(3.1)，得

$$\frac{d}{d\varphi}[r(N_\theta-\nu N_\varphi)]=r_1Eh\chi\sin\varphi+r_1\cos\varphi(N_\varphi-\nu N_\theta) \tag{3.3}$$

把(2.19)和(2.22)中的N_φ, N_θ代入(3.3)，简化后得

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r}{r_1}\frac{d\Phi}{d\varphi}\right)-\cos^2\varphi\frac{r_1}{r}\Phi+\nu\sin\varphi\Phi-Ehr_1\sin\varphi\chi+\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{qr^2}{\sin\varphi}\right]$$
$$-\frac{qr^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}-[P_Ar_A+\int_{\varphi_A}^{\varphi}qrr_1\cos\varphi d\varphi]\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r}{r_1\sin^2\varphi}\right)+\frac{r_1}{r}\text{ctg}\varphi\right]=0 \tag{3.4}$$

这是Φ和χ的协调方程．(2.17)和(3.4)为决定Φ和χ的两个基本方程．

让我们引进无量纲的子午线的曲率半径$\xi_1(\varphi)$，和无量纲的壳的旋转半径$=\xi(\varphi)$，称

$$r_1=\bar{a}\xi_1,\qquad r=\bar{R}\xi \tag{3.5}$$

其中$\bar{a}$, $\bar{R}$为常量

$$\left.\begin{aligned}&\bar{a}=\text{典型的子午线曲率半径}\\&\bar{R}=\text{典型的旋转壳的旋转半径}\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

(A)对于圆球壳(图4(a))而言，我们有

$$\left.\begin{aligned}&\bar{a}=a,\quad \bar{R}=a\\&\xi_1=1,\quad \xi=\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

(B)对于圆环壳(图4(b))而言，我们有

$$\left.\begin{aligned}&\bar{a}=a,\qquad \bar{R}=R\\&\xi_1=1,\qquad \xi=1+\alpha\sin\varphi,\quad \alpha=\frac{a}{R}\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

(C)对于椭圆环壳(图4c)而言，我们有

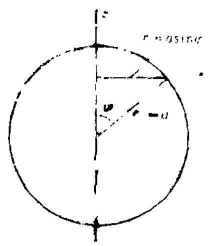

图4(a) 圆球壳的$\xi_1,\xi,\bar{a},\bar{R}$

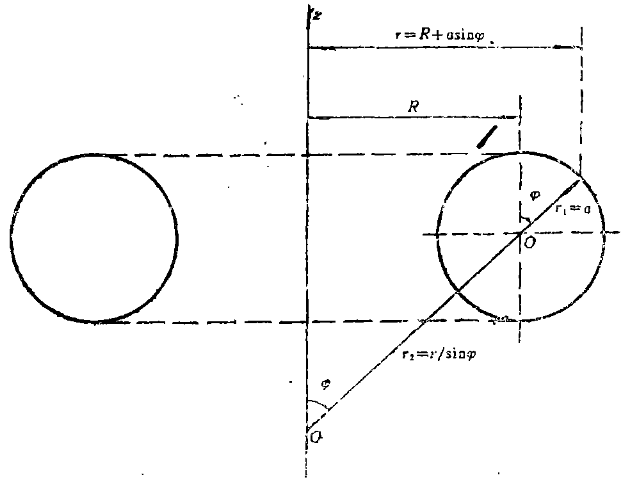

图4(b) 圆环壳的$\xi,\xi_1,\bar{R},\bar{a}$

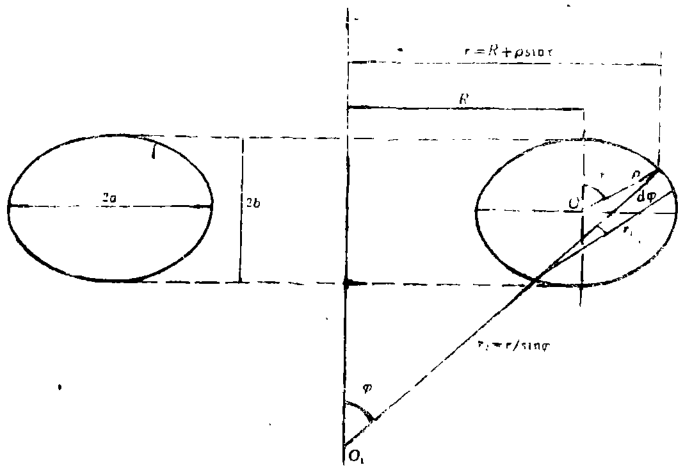

图4(c) 椭圆环壳的$\xi,\xi_1,\bar{R},\bar{a}$

$$\left.\begin{aligned}&\bar{a}=\frac{b^2}{a}, \qquad \bar{R}=R\\&\xi_1=(1-k^2\cos^2\varphi)^{-3/2}, \qquad \xi=1+\frac{a}{R}\sin\varphi\left[\frac{1-k^2(2-k^2)\cos^2\varphi}{1-k^2\cos^2\varphi}\right]^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

其中

$$k^2=1-\frac{b^2}{a^2} \tag{3.10}$$

引进

$$\bar{\alpha}=\frac{\bar{a}}{\bar{R}} \tag{3.11}$$

和引进算子

$$\Gamma(\cdots)=\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{\xi}{\xi_1}\frac{d}{d\varphi}(\cdots)\right]-\bar{\alpha}^2\frac{\xi_1}{\xi}\cos^2\varphi(\cdots) \tag{3.12}$$

(2.17)和(3.4)可以写成

$$\Gamma(\chi)-\nu\bar{\alpha}\sin\varphi\,\chi+\frac{\bar{R}}{D}\bar{\alpha}^2\xi_1\sin\varphi\Phi=0 \tag{3.13a}$$

$$\Gamma(\Phi)+\nu\bar{\alpha}\sin\varphi\Phi-Eh\bar{R}\bar{\alpha}^2\xi_1\sin\varphi\chi=-\bar{\alpha}\bar{R}^2\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{q\xi^2}{\sin\varphi}\right)+\bar{\alpha}\bar{R}^2\frac{q\xi^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$
$$+\left[P_Ar_A+\bar{\alpha}\bar{R}^2\int_{\varphi_A}^{\varphi}q\xi_1\xi\cos\varphi d\varphi\right]\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\xi}{\xi_1\sin^2\varphi}\right)+\bar{\alpha}^2\frac{\xi_1}{\xi}\operatorname{ctg}\varphi\right] \tag{3.13b}$$

四、ξ_1为常数（球壳、圆环壳）时的复变量方程

当ξ_1为常数时，取

$$\xi_1=1 \tag{4.1}$$

于是有

球壳： $$\bar{\alpha}=\frac{\bar{a}}{\bar{R}}=1,\quad \xi=\sin\varphi \tag{4.2a,b}$$

圆环壳： $$\bar{\alpha}=\frac{\bar{a}}{\bar{R}}=\frac{a}{R}=\alpha,\qquad \xi=1+\alpha\sin\varphi \tag{4.3a,b}$$

而

$$\Gamma(\cdots)=\frac{d}{d\varphi}\left[\xi\frac{d(\cdots)}{d\varphi}\right]-\bar{\alpha}^2\frac{1}{\xi}\cos^2\varphi(\cdots) \tag{4.4}$$

(3.13a,b)可以化为

$$\Gamma(\chi)-\nu\bar{\alpha}\sin\varphi\chi+\frac{\bar{R}}{D}\bar{\alpha}^2\sin\varphi\Phi=0 \tag{4.5a}$$

$$\Gamma(\Phi)+\nu\bar{\alpha}\sin\varphi\Phi-Eh\bar{R}\bar{\alpha}^2\sin\varphi\chi=-\bar{\alpha}\bar{R}^2\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{q\xi^2}{\sin\varphi}\right)+\bar{\alpha}\bar{R}^2\frac{q\xi^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$$
$$+\left[P_Ar_A+\bar{\alpha}\bar{R}^2\int_{\varphi_A}^{\varphi}q\xi\cos\varphi d\varphi\right]\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\xi}{\sin^2\varphi}\right)+\bar{\alpha}^2\frac{1}{\xi}\operatorname{ctg}\varphi\right] \tag{4.5b}$$

它们可以用复变量进行简化，引进复变量$S(\varphi)$，设

$$S(\varphi)=A\Phi(\varphi)+B\chi(\varphi) \tag{4.6}$$

其中A,B为待定复数

$$\Gamma(S)=A\Gamma(\Phi)+B\Gamma(\chi) \tag{4.7}$$

从(4.5a,b)得

$$\Gamma(S)=-\nu\bar{\alpha}\sin\varphi(A\Phi-B\chi)+Eh\bar{R}\bar{\alpha}^2\sin\varphi A\chi-\frac{\bar{R}}{D}\bar{\alpha}^2\sin\varphi B\Phi$$
$$+A\left\{\left[P_Ar_A+\bar{\alpha}\bar{R}^2\int_{\varphi_A}^{\varphi}q\xi\cos\varphi d\varphi\right]\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\xi}{\sin^2\varphi}\right)+\bar{\alpha}^2\frac{1}{\xi}\operatorname{ctg}\varphi\right]\right.$$
$$\left.-\bar{\alpha}\bar{R}^2\sin\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{q\xi^2}{\sin^2\varphi}\right)\right\} \tag{4.8}$$

这里的A,B是任意的，如果我们取

$$-\nu\bar{\alpha}A-\frac{1}{D}\bar{R}\bar{\alpha}^2B=-i2\mu A,\quad \bar{R}Eh\bar{\alpha}^2A+\nu\bar{\alpha}B=-i2\mu B \tag{4.9}$$

其中μ为一待定的比例常数，则(4.8)可以化为

$$\Gamma(S)+i2\mu\sin\varphi S=A\left\{-\bar{a}\bar{R}^2\sin\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{q\xi^2}{\sin^2\varphi}\right)+\left[P_Ar_A+\bar{a}\bar{R}\int_{\varphi_A}^{\varphi}q\xi\cos\varphi d\varphi\right]\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\xi}{\sin^2\varphi}\right)+\bar{a}^2\frac{1}{\xi}\operatorname{ctg}\varphi\right]\right\}\quad(4.10)$$

从(4.9)，得

$$\frac{B}{A}=\frac{(i2\mu-\nu\bar{a})D}{\bar{R}\bar{a}^2}=-\frac{\bar{R}\bar{a}^2Eh}{i2\mu+\nu\bar{a}}\quad(4.11)$$

由此，给出

$$2\mu=\bar{a}\sqrt{\frac{\bar{a}^2Eh}{D}-\nu^2}=\bar{a}\sqrt{12(1-\nu^2)\frac{\bar{a}^2}{h^2}-\nu^2}\quad(4.12)$$

对于一般的壳体而论，在Love-Kinhhoff假设的范围内

$$\frac{h^2}{\bar{a}^2}\ll 12\frac{1-\nu^2}{\nu^2}\quad(4.13)$$

所以

$$\mu\cong\sqrt{3(1-\nu^2)}\frac{\bar{a}^2}{\bar{R}h}\quad(4.14)$$

最后，得

$$S=A\left[\Phi+\frac{D}{\bar{a}\bar{a}}(2\mu i-\nu\bar{a})\chi\right]\cong A\left[\Phi+2\mu i\frac{D}{\bar{a}\bar{a}}\chi\right]\quad(4.15)$$

到此，我们得到一个线性复变量方程(4.10)，但是A仍可任意选择，在历史上，各家有不同选择。F. Tölke(1938)[3]取$A=-1$，并引进新的因子来化去$\Gamma(\cdots)$中的一阶导数项，称

$$F^*=-\sqrt{\frac{\bar{R}}{h}\xi}\left(\Phi+\frac{2\mu D}{\bar{a}\bar{a}}i\chi\right)=\sqrt{\frac{\bar{R}}{h}\xi}\,S\qquad A=-1\quad(4.16)$$

(4.10)导出决定F^*的复变量方程

$$\frac{d^2F^*}{d\varphi^2}-\left[\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\frac{d\xi}{d\varphi}\right)+\frac{\bar{a}^2}{\xi^2}\cos^2\varphi-i\frac{2\mu\sin\varphi}{\xi}\right]F^*=\sqrt{\frac{\bar{R}}{h\xi}}\left\{-\bar{a}\bar{R}\sin\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{q\xi^2}{\sin^2\varphi}\right)+\left[P_Ar_A+\bar{a}\bar{R}\int_{\varphi_A}^{\varphi}q\xi\cos\varphi d\varphi\right]\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\xi}{\sin^2\varphi}\right)+\bar{a}^2\frac{1}{\xi}\operatorname{ctg}\varphi\right]\right\}\quad(4.17)$$

如果把(3.8)式代入，并把$\varphi_A=0$，$P_Ar_A=Q_0$，即得Tölke的圆环壳复变量方程。

在B. B. Новожилов(1951)[5]的环壳工作中，他的结果相当于取

$$A=i\frac{2\mu}{\bar{a}}\quad(4.18)$$

同时引进新的因子来化简$\Gamma(\cdots)$中的零阶导数项，设

$$F^{**}=\xi S\quad(4.19)$$

代入(4.10)式，消去S，即得

$$\xi\frac{d^2F^{**}}{d\varphi^2}-\frac{d\xi}{d\varphi}\frac{dF^{**}}{d\varphi}+\left[\frac{1}{\xi}\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2-\frac{d^2\xi}{d\varphi^2}-a^2\frac{1}{\xi}\cos^2\varphi+2\mu i\sin\varphi\right]F^{**}$$
$$=i\frac{2\mu}{\bar{a}}\xi\left\{-\bar{a}\bar{R}\sin\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{q\xi^2}{\sin^2\varphi}\right)\right.$$
$$\left.+\left[P_Ar_A+\bar{a}\bar{R}\int_{\varphi_A}^{\varphi}q\xi\cos\varphi d\varphi\right]\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\xi}{\sin^2\varphi}\right)+\bar{a}^2\frac{1}{\xi}\mathrm{ctg}\varphi\right]\right\} \tag{4.20}$$

如果把(3.8)代入，并把$\varphi_A=0$，$P_Ar_A=Q_0$，即Новожилов的圆环壳复变量方程.

$$(1+\alpha\sin\varphi)\frac{d^2F^{**}}{d\varphi^2}-\alpha\cos\varphi\frac{dF^{**}}{d\varphi}+(\alpha+2\mu i)\sin\varphi F^{**}$$
$$=-2\mu\alpha i\cos\varphi\left[\frac{1}{2}aq-\frac{\alpha+3\alpha\sin\varphi}{a^2\sin^2\varphi}Q_0\right] \tag{4.20a}$$

Новожилов进一步用新变量$V(\varphi)$简化(4.20a)，设

$$V=F^{**}-2\mu i\frac{Q_0}{a}\mathrm{ctg}\varphi \tag{4.21}$$

则导得

$$(1+\alpha\sin\varphi)\frac{d^2V}{d\varphi^2}-\alpha\cos\varphi\frac{dV}{d\varphi}+(\alpha+2\mu i)\sin\varphi V=2\mu P_0\cos\varphi \tag{4.22}$$

其中

$$P_0=-\frac{1}{2}\alpha aqi-(\alpha i-2\mu)\frac{Q_0}{a} \tag{4.23}$$

当壳很薄时，$\alpha/2\mu\ll1$，于是

$$\alpha+2\mu i\approx2\mu i,\qquad \alpha i-2\mu\approx-2\mu \tag{4.24}$$

于是Новожилов方程可以简化为

$$(1+\alpha\sin\varphi)\frac{d^2V}{d\varphi^2}-\alpha\cos\varphi\frac{dV}{d\varphi}+2\mu i\sin\varphi V=2\mu P_0\cos\varphi \tag{4.25a}$$

$$P_0=-\frac{1}{2}\alpha aqi+\frac{Q_0}{a}2\mu \tag{4.25b}$$

如果根据(4.25a)求得了解，我们很易证明

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Im}V&=\frac{2\mu}{a}\frac{(1+\alpha\sin\varphi)^2}{\sin\varphi}Q-2\mu\frac{Q_0}{a}\mathrm{ctg}\varphi\\ \mathrm{Re}V&=-\frac{4\mu^2D}{\alpha a^2}(1+\alpha\sin\varphi)\chi\end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

于是，我们可以用ImV，ReV来表达诸内力素.

五、椭圆环壳的复变量方程

椭圆环壳的ξ_1不是常数。所以，在复变量化时，就不像ξ_1为常数时那样直接和简单，但我们很易证明，在Love-Kirchhoff的假设下，求得复变量方程还是可能的，引进复变量$S(\varphi)$

$$S(\varphi)=A\Phi(\varphi)+B\chi(\varphi) \tag{5.1}$$

其中A,B为复变常量，我们有

$$\Gamma(S)=A\Gamma(\Phi)+B\Gamma(\chi) \tag{5.2}$$

在(3.13b)上乘A，在(3.13a)上乘B，然后相加，得

$$\Gamma(S)+\nu\bar{a}\sin\varphi A\Phi-\nu\bar{a}\sin\varphi B\chi-Eh\bar{R}\bar{a}^2\xi_1\sin\varphi A\chi+\frac{\bar{R}}{D}\bar{a}^2\xi_1\sin\varphi B\Phi$$
$$=A\left\{-\bar{a}\bar{R}^2\sin\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{q\xi^2}{\sin^2\varphi}\right)+\left[P_Ar_A+\bar{a}\bar{R}^2\int_{\varphi_A}^{\varphi}q\xi_1\xi\cos\varphi d\varphi\right]\right.$$
$$\left.\cdot\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\xi}{\xi_1\sin^2\varphi}\right)+\bar{a}^2\frac{\xi_1}{\xi}\operatorname{ctg}\varphi\right]\right\} \tag{5.3}$$

上式的第二，第三，第四，第五各项中，有两项的系数中含有ξ_1，有两项则不含有ξ_1，所以，我们不能像第四节有关球壳和圆环壳那样简单地化为复变量方程，这里A,B仍是任意的，我们可以取

$$\frac{\bar{R}}{D}\bar{a}^2B=i2\mu A,\qquad -Eh\bar{a}^2A=i2\mu B \tag{5.4}$$

其中μ为待定的比例常数；从(5.4)，我们有

$$\frac{B}{A}=\frac{i2\mu}{\bar{R}\bar{a}^2}D=-\frac{Eh\bar{a}^2\bar{R}}{i2\mu} \tag{5.5}$$

由此，给出μ

$$\mu=\frac{\bar{a}^2}{\bar{R}h}\sqrt{3(1-\nu^2)} \tag{5.6}$$

于是(5.3)式的第二～第五诸项可以写成

$$(\nu\bar{a}A\Phi-\nu\bar{a}B\chi-Eh\bar{R}\bar{a}^2A\chi\xi_1+\frac{1}{D}\bar{R}\bar{a}^2B\Phi\xi_1)\sin\varphi$$
$$=(\nu\bar{a}+i2\mu\xi_1)A\Phi\sin\varphi+(i2\mu\xi_1-\nu\bar{a})B\chi\sin\varphi \tag{5.7}$$

在下面，我们将设

$$|2\mu\xi_1|\gg|\nu\bar{a}|,\quad 或\quad \left|2\mu\xi_1\frac{1}{\bar{a}}\right|\gg\nu \tag{5.8}$$

或在用了(5.6)式后，得

$$\xi_1^2\frac{\bar{a}^2}{h^2}\gg\frac{\nu^2}{3(1-\nu^2)} \tag{5.9}$$

以椭圆环壳为例，从(3.9)式，我们有

$$\xi_1^2=\frac{1}{(1-k^2\cos^2\varphi)^3} \tag{5.10}$$

ξ_1的最小值在$\varphi=0$处，即

$$(\xi_1^2)_{\min}=1 \tag{5.11}$$

所以

$$\left(\xi_1^2\frac{\bar{a}^2}{h^2}\right)_{\min}=\frac{\bar{a}^2}{h^2}\gg\frac{\nu^2}{3(1-\nu^2)} \tag{5.12}$$

显然，在Love-kirchhoff假设下，(5.12)是满足的，所以，我们可以从(5.7)的右侧诸项中

略去$\nu\bar{\alpha}$，于是，(5.7)式可以简化为

$$\left(\nu\bar{\alpha}A\Phi-\nu\bar{\alpha}B\chi-Eh\bar{R}\bar{\alpha}^2A\chi\xi_1+\frac{1}{D}\bar{R}\bar{\alpha}^2B\Phi\xi_1\right)\sin\varphi\cong i2\mu\xi_1\sin\varphi S \tag{5.13}$$

最后(5.3)可以写成

$$\Gamma(S)+i2\mu\xi_1\sin\varphi S=A\left\{-\bar{\alpha}\bar{R}^2\sin\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{q\xi^2}{\sin^2\varphi}\right)\right.$$
$$\left.+\left[Q_0+\bar{\alpha}\bar{R}^2\int_0^{\varphi}q\xi_1\xi\cos\varphi d\varphi\right]\left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{\xi_1\sin^2\varphi}\right)+\bar{\alpha}^2\frac{\xi_1}{\xi}\mathrm{ctg}\varphi\right]\right\} \tag{5.14}$$

其中$\Gamma(\xi)$见(3.12)，而且我们按Новожилов的圆环壳复变量方程(4.20)式一样，取$\varphi_0=0$，$Q_0=P_Ar_A$。

这是任意截面的环壳复变量方程，它是圆环壳复变量方程(4.10)的推广，当$\xi_1=1$时，它就化成(4.10)式。

到此，A还是任意的，取

$$A=\frac{2\mu}{\bar{\alpha}\bar{R}^2}i \tag{5.15}$$

则(5.14)式可以写成

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\xi}{\xi_1}\frac{dS}{d\varphi}\right)-\bar{\alpha}^2\frac{\xi_1}{\xi}\cos^2\varphi S+i2\mu\xi_1\sin\varphi S=i2\mu\left\{-q\sin\varphi\frac{d}{d\varphi}\frac{\xi^2}{\sin^2\varphi}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{Q_0}{\bar{\alpha}\bar{R}^2}+q\int_0^{\varphi}\xi\xi_1\cos\varphi d\varphi\right]\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\xi}{\xi_1\sin^2\varphi}\right)+\bar{\alpha}^2\frac{\xi_1}{\xi}\mathrm{ctg}\varphi\right]\right\} \tag{5.16}$$

这里的S和q分别为

$$S(\varphi)=\frac{2\mu}{\bar{\alpha}\bar{R}}i\Phi(\varphi)-E\frac{\bar{a}h}{\bar{R}^2}\chi(\varphi) \tag{5.17a}$$

$$q=\text{常数} \tag{5.17b}$$

如果把(3.9)中的$\xi_1,\xi,\bar{a},\bar{R}$代入(5.16)式，我们即得椭圆截面的环壳复变量方程。

对于任意截面的细环壳而言，我们有

$$\bar{\alpha}=\frac{\bar{a}}{\bar{R}}\ll1(\text{一般截面}),\quad \bar{\alpha}=\frac{\bar{a}}{\bar{R}}=\frac{b^2}{aR}\ll1\ (\text{椭圆截面}) \tag{5.18}$$

于是(5.16)式中的

$$\bar{\alpha}\to0,\quad \xi\to1 \tag{5.19}$$

把(5.19)代入(5.16)，得

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\xi_1}\frac{dS}{d\varphi}\right)+i2\mu\xi_1\sin\varphi S$$
$$=i2\mu\left\{q\frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\left(\frac{Q_0}{\bar{a}\bar{R}}+q\int_0^{\varphi}\xi_1\cos\varphi d\varphi\right)\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\xi_1\sin^2\varphi}\right)\right\} \tag{5.20}$$

这是任意截面的细环壳的复变量方程。复变量$S(\varphi)$见(5.17a)。$\xi_1,2\mu,\bar{a},\bar{R}$分别为(3.5)和(4.14)。

当截面是椭圆时，(5.20)式中的ξ_1见(3.9)。把它代入(5.20)，并注意到

$$\int_0^{\varphi}\xi_1\cos\varphi d\varphi=\int_0^{\varphi}(1-k^2\cos^2\varphi)^{-3/2}\cos\ \varphi d\varphi=\frac{\sin\varphi}{(1-k^2)(1-k^2\cos^2\varphi)^{1/2}} \tag{5.21 A}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\ \frac{1}{\xi_1\sin^2\varphi}=\frac{d}{d\varphi}\ \frac{(1-k^2\cos^2\varphi)^{3/2}}{\sin^2\varphi}$$

$$=\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}(1-k^2\cos^2\varphi)^{1/2}[1-k^2\cos^2\varphi-3(1-k^2)] \tag{5.21B}$$

于是(5.20)可以写成

$$(1-k^2\cos^2\varphi)^3\frac{d^2S}{d\varphi^2}+3k^2\sin\varphi\cos\varphi\ (1-k^2\cos^2\varphi)^2\frac{dS}{d\varphi}+i2\mu\sin\varphi S$$

$$=2\mu i\left\{\frac{Q_0}{\bar{a}\bar{R}}\ \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\ (1-k^2\cos^2\varphi)^2[1-k^2\cos^2-3(1-k^2)]\right.$$

$$\left.+q\cos\ \varphi\ \frac{k^2}{1-k^2}\ (1-k^2\cos^2\varphi)^{3/2}\right\} \tag{5.22}$$

设引进新的复变量V^*

$$V^*(\varphi)=S(\varphi)+\ 2\mu i\ \frac{Q_0}{\bar{a}\bar{R}}\ \mathrm{ctg}\varphi$$

$$=\frac{2\mu i}{\bar{a}\bar{R}}\ (\Phi+Q_0\mathrm{ctg}\varphi)-E\frac{\bar{a}h}{\bar{R}^2}\ \chi \tag{5.23}$$

则(5.22)式化为

$$(1-k^2\cos^2\varphi)^3\frac{d^2V^*}{d\varphi^2}\ +3k^2\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\cos^2\varphi)^2\frac{dV^*}{d\varphi}+i2\mu\sin\varphi V^*$$

$$=-4\mu^2\frac{Q_0}{\bar{a}\bar{R}}\ \cos\varphi+2\mu iq\frac{k^2}{1-k^2}\ \cos\varphi(1-k^2\cos^2\varphi)^{3/2} \tag{5.24}$$

这是椭圆截面的细环壳的复变量方程.

如果椭圆的长短轴长很接近，即$a\sim b$，亦即当

$$k^2=1-\frac{b^2}{a^2}\approx 0 \tag{5.25}$$

时，我们可以略去k^2，即$k^2\to 0$时，(5.24)化为

$$\frac{d^2V^*}{d\varphi^2}+i2\mu\sin\varphi V^*=-4\mu^2\ \frac{Q_0}{\bar{a}\bar{R}}\ \cos\varphi \tag{5.26}$$

其中2μ见(4.14)，$\bar{a}\bar{R}=b^2R/a$. (5.26)是近似圆的椭圆截面的细环壳的复变量方程. 它和圆细环壳的复变量方程是一致的(1979)[6].

当$Q_0=0$时，非齐次项应该从(5.16)式导出，得

$$\frac{d^2V^*}{d\varphi^2}+i2\mu\sin\varphi V^*=2\mu i\frac{b^4}{a^2R^2}q\cos\varphi \tag{3.27}$$

将(5.26)和(5.27)合在一起，可以写成

$$\frac{d^2V^*}{d\varphi^2}+i2\mu\sin\varphi V^*=2\mu P_0\cos\varphi \tag{5.28}$$

其中

$$P_0=-2\mu\frac{Q_0}{\bar{a}\bar{R}}=-2\mu\frac{Q_0}{b^2\bar{R}}a\qquad(Q_0\neq0)\tag{5.29a}$$

$$P_0=i\frac{\bar{a}^2}{\bar{R}^2}q=i\frac{b^4}{a^2\bar{R}^2}q\qquad(Q_0=0)\tag{5.29b}$$

(5.28)式的解首先由作者在(1979)[6]中给出的，这里将不再介绍。

从Tölke方程(4.17)中求得$F^*(\varphi)$后，得

$$\mathrm{Re}F^*=-\sqrt{\frac{\bar{R}}{h}\xi}\,\Phi,\qquad \mathrm{Im}\,F^*=-\frac{2\mu D}{\alpha\bar{a}}\sqrt{\frac{\bar{R}}{h}\xi}\,\chi\tag{5.30}$$

从(2.19)，(2.22)，(2.14)，(2.16)求得诸内力素为：

$$N_\varphi=-\sqrt{\frac{h}{\bar{R}\xi}}\frac{1}{\bar{R}\xi}\cos\varphi\mathrm{Re}F^*+\frac{\bar{a}}{\xi\sin\varphi}\int_0^\varphi q\xi\xi_1\cos\varphi d\varphi+\frac{Q_0}{\bar{R}\xi\sin\varphi}\tag{5.31a}$$

$$N_\theta=-\frac{1}{\bar{a}\xi_1}\sqrt{\frac{h}{\bar{R}}}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\mathrm{Re}F^*\right)-\frac{\bar{R}}{\xi_1\sin^2\varphi}\int_0^\varphi q\xi\xi_1\cos\varphi d\varphi+\frac{q\bar{R}\xi}{\sin\varphi}$$

$$-\frac{Q_0}{\bar{a}\xi_1\sin\varphi}\tag{5.31b}$$

$$M_\varphi=\frac{\bar{\alpha}}{2\mu\xi_1}\sqrt{\frac{h}{\bar{R}}}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\mathrm{Im}F^*\right)+\nu\frac{\bar{\alpha}^2}{2\mu\xi_1}\sqrt{\frac{h}{\bar{R}}}\frac{\cos\varphi}{\xi\sqrt{\xi}}\mathrm{Im}F^*\tag{5.31c}$$

$$M_\theta=\frac{\bar{\alpha}^2}{2\mu\xi_1}\sqrt{\frac{h}{\bar{R}}}\frac{\cos\varphi}{\xi\sqrt{\xi}}\mathrm{Im}F^*+\nu\frac{\bar{\alpha}}{2\mu\xi_1}\sqrt{\frac{h}{\bar{R}}}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\mathrm{Im}F^*\right)\tag{5.31d}$$

$$Q=-\sqrt{\frac{h}{\bar{R}\xi}}\frac{1}{\bar{R}\xi}\sin\varphi\mathrm{Re}F^*\tag{5.31e}$$

从任意截面的环壳复变量方程(5.16)式中解得$S(\varphi)$后，得

$$\mathrm{Re}S=-E\frac{\bar{a}h}{\bar{R}^2}\chi,\ \mathrm{Im}S=\frac{2\mu}{\bar{a}\bar{R}}\Phi=\frac{2\mu}{\bar{a}}\xi\frac{Q}{\sin\varphi}\tag{5.32}$$

于是，从(2.19)，(2.22)，(2.14)，(2.16)，求得诸内力素：

$$N_\varphi=\frac{\bar{a}}{2\mu\xi}\cos\varphi\mathrm{Im}S+\frac{\bar{a}}{\xi\sin\varphi}\int_0^\varphi q\xi\xi_1\cos\varphi d\varphi+\frac{Q_0}{\bar{R}\xi\sin\varphi}\tag{5.33a}$$

$$N_\theta=\frac{\bar{R}}{2\mu\xi_1}\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Im}S-\frac{\bar{R}}{\xi_1\sin^2\varphi}\int_0^\varphi q\xi\xi_1\cos\varphi d\varphi$$

$$+\frac{q\bar{R}\xi}{\sin\varphi}-\frac{Q_0}{\bar{a}\xi_1\sin\varphi}\tag{5.33b}$$

$$M_\varphi=D\frac{\bar{R}^2}{E\bar{a}h}\left\{\frac{1}{\bar{a}\xi_1}\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Re}S+\frac{\nu}{\bar{R}\xi}\cos\varphi\mathrm{Re}S\right\}\tag{5.33c}$$

$$M_\theta=D\frac{\bar{R}^2}{E\bar{a}h}\left\{\frac{1}{\bar{R}\xi}\cos\varphi\mathrm{Re}S+\frac{\nu}{\bar{a}\xi_1}\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Re}S\right\}\tag{5.33d}$$

$$Q=\frac{\bar{a}}{2\mu\xi}\sin\varphi\ \mathrm{Im}S\tag{5.33e}$$

从任意截面的细环壳的复变量方程(5.2c)式中求得$S(\varphi)$后，得

$$\mathrm{Re}S=-E\frac{\bar{a}h}{\bar{R}^2}\chi,\qquad \mathrm{Im}\,S=\frac{2\mu}{\bar{a}}\frac{Q}{\sin\varphi}\tag{5.34}$$

于是，诸内力素可以简化为

$$N_\varphi=\frac{\bar{a}}{2\mu}\cos\varphi\,\mathrm{Im}S+\frac{\bar{a}}{\sin\varphi}\int_0^\varphi q\xi_1\cos\varphi d\varphi+\frac{Q_0}{\bar{R}\sin\varphi}\tag{5.35a}$$

$$N_\theta=\frac{\bar{R}}{2\mu\xi_1}\frac{d}{d\varphi}(\mathrm{Im}\;S)-\frac{\bar{R}}{\xi_1\sin^2\varphi}\int_0^\varphi q\xi_1\cos\varphi d\varphi$$

$$+\frac{q\bar{R}}{\sin\varphi}-\frac{Q_0}{\bar{a}\xi_1\sin\varphi}\tag{5.35b}$$

$$M_\varphi=D\frac{\bar{R}^2}{E\bar{a}h}\left\{\frac{1}{\bar{a}\xi_1}\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Re}S+\frac{\nu}{\bar{R}}\cos\varphi\mathrm{Re}S\right\}\tag{5.35c}$$

$$M_\theta=D\frac{\bar{R}^2}{E\bar{a}h}\left\{\frac{1}{\bar{R}}\cos\varphi\mathrm{Re}S+\frac{\nu}{\bar{a}\xi_1}\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Re}S\right\}\tag{5.35d}$$

$$Q=\frac{\bar{a}}{2\mu}\sin\varphi\;\mathrm{Im}S\tag{5.35e}$$

从椭圆截面的细环壳的复变量方程(5.24)式中求得，$V^*(\varphi)$，有

$$\mathrm{Re}V^*=-E\frac{\bar{a}h}{\bar{R}^2}\chi,\qquad \mathrm{Im}V^*=\frac{2\mu}{\bar{a}\bar{R}}\left(\frac{\bar{R}Q}{\sin\varphi}+Q_0\mathrm{ctg}\varphi\right)\tag{5.36}$$

于是，诸内力素可以写成

$$N_\varphi=\frac{\bar{a}}{2\mu}\cos\varphi\;\mathrm{Im}V^*+\frac{\bar{a}q}{1-k^2}\frac{1}{(1-k^2\cos^2\varphi)^2}+\frac{Q_0}{\bar{R}}\sin\varphi\tag{5.37a}$$

$$N_\theta=\frac{\bar{R}}{2\mu}\frac{1}{(1-k^2\cos^2\varphi)^{3/2}}\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Im}V^*-\frac{q\bar{R}}{(1-k^2)\sin\varphi}$$

$$\cdot\frac{1}{(1-k^2\cos^2\varphi)^2}+\frac{q\bar{R}}{\sin\varphi}\tag{5.37b}$$

$$M_\varphi=D\frac{\bar{R}^2}{E\bar{a}^2h}\left\{\frac{1}{(1-k^2\cos^2\varphi)^{3/2}}\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Re}V^*\right\}\tag{5.37c}$$

$$M_\theta=D\frac{\bar{R}^2}{E\bar{a}^2h}\left\{\frac{\nu}{(1-k^2\cos^2\varphi)^{3/2}}\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Re}V^*\right\}\tag{5.37d}$$

$$Q=\frac{\bar{a}}{2\mu}\sin\varphi\mathrm{Im}V-\frac{Q_0}{\bar{R}}\cos\varphi\tag{5.37e}$$

从近似圆的椭圆截面的细环壳的复变量方程(5.28)式中求得$V^*(\varphi)$后，我们有

$$\mathrm{Re}V^*=-E\frac{\bar{a}h}{\bar{R}^2}\chi,\qquad \mathrm{Im}V^*=\frac{2\mu}{\bar{a}\bar{R}}\left(\frac{\bar{R}Q}{\sin\varphi}+Q_0\mathrm{ctg}\varphi\right)\tag{5.38}$$

两诸内力素的表达式可以写成(这里进一步略去了小项)：

$$N_\varphi=\frac{\bar{a}}{2\mu}\cos\varphi\mathrm{Im}V^*+\bar{a}q+\frac{Q_0}{\bar{R}}\sin\varphi\tag{6.39a}$$

$$N_\theta=\frac{\bar{R}}{2\mu}\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Im}V^*\tag{6.39b}$$

$$M_\varphi = D\frac{\bar{R}^2}{E\bar{a}^2h}\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Re}V^* \tag{6.39c}$$

$$M_\theta = D\frac{\nu\bar{R}^2}{E\bar{a}^2h}\frac{d}{d\varphi}\mathrm{Re}V^* \tag{6.39d}$$

$$Q = \frac{\bar{a}}{2\mu}\sin\varphi\ \mathrm{Im}V^* + \frac{Q_0}{R}\cos\varphi \tag{6.39e}$$

我们同样可以求得轴向位移和横向位移的表达式.

参 考 文 献

[1] Reissner, H., *Muller-Breslau-Festschrift*, Leipzig (1912), 181.

[2] Meissner, E., *Physik. Zeits.*, **14** (1913), 348; *Vieteljahrsschr Naturforsch Gas*, Zurich, **60** (1915), 23.

[3] Tölke, F., *Ingenieur Archiv.*, 9 (1938), 282.

[4] Clark, R. A., *J. of. Math. and Physics*, **29** (1950), 146—178.

[5] Новожилов В. В., «薄壳理论»（北京石油学院译），科学出版社（1951）.

[6] 钱伟长，轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解，清华大学学报，**19**，1 (1979)，27—47.

[7] 钱伟长，细环壳极限方程的非齐次解及其在仪器仪表上的应用，仪器仪表学报，创刊号 (1980)，89—112.

Equation in Complex Variable of Axisymmetrical Deformation Problems for a General Shell of Revolution

Chien Wei-zang

(Shanghai University of Technology, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

In this paper, the equation of axisymmetrical deformation problems for a general shell of revolution is derived in one complex variable under the usual Love-Kirchhoff assumption. In the case of circular ring shells, this equation may be simplified into the equation given by F. Tölke(1938)[3], R. A. Clark (1950)[4] and B. B. Новожилов(1951)[5]. When the horizontal radius of the shell of revolution is much larger than the average radius of curvature of meridian curve, this equation in complex varaible may be simplified into the equation for slender ring shells. If the ring shell is circular in shape, then this equation can be reduced into the equation in complex variable for slender circular ring shells given by this author(1979)[6]. If the form of elliptic cross section is near a circle, then the equation of slender ring shell with near-circle elliptic cross section may be reduced to the complex variable equation similar in form for circular slender ring shells.