

塑性本构关系的应变路径理论

赵 祖 武

(天津大学, 1989年4月6日收到)

摘 要

基于伊留申的两个假定, 提出一个新的积分形式的塑性本构方程. 由应变路径确定的应力偏量由二部分组成, 它们各自按不同的规律变化. 理论计算与近代实验的比较, 得到令人满意的结果. 本文提出的不是内时理论.

一、引 言

自从特雷斯卡于1864年提出最大剪应力准则已有百余年, 至今未能得到一个一般性的本构方程. 塑性流动理论在形式上相当完美, 但难以具体化. 某些简化方案, 例如随动模型, 并不令人满意^[1]. 已有许多关于后继屈服面的论文发表^[2,3], 但始终未能得到一般性的曲面方程. 苏联学者伊留申基于实验提出两个重要的假定^[4,5,6], 即滞后假定和等向假定, 但他提出的依赖于五个向量的应力与应变路径的关系^[7]也是难以具体化的, 至今未能形成公式. 由简化的多晶体模型提出的物理理论^[8], 虽然得到某些与实验相接近的结果, 但很复杂并需使用计算机, 难以在实际上应用.

虽然单晶的研究取得成果^[8], 但由晶体内部滑移推导多晶体的本构关系似仍需相当长的时间. 卡罗在一个重要的关于固体力学研究方向的报告^[22]中指出: 完全基于微观结构分析来发展本构理论是否总是可行, 甚至如果可行, 这个过程需要多长时间, 都是不清楚的. 没有必要体本构理论基于微观结构, 并且它们不像在相当长时间内能够完全如此. 唯象的或杂交的理论必须发展. 卡罗的观点值得我们注意, 即唯象理论和微观理论在我国都需要发展.

目前看来, 伊留申的两个假定可以被认为是相当广泛范围内可以适用的塑性应变规律, 虽然它没有考虑第三不变量但其影响是小的. 这两个假定似乎是目前唯一的实际可用来建立令人满意的本构方程的已知塑性规律.

塑性本构关系是个困难的问题. 某些已有的理论与实验相差较大, 其中包括随动模型^[1]. 如果能够得到与实验接近的本构方程, 可以认为令人满意, 即使它不能完全用微观结构来解释. 这就是本文的目的.

在下面首先介绍伊留申的两个假定, 以便进一步的讨论.

二、伊留申的两个假定

伊留申基于实验提出两个假定^[6]，又为近代实验所证实^[10,11]。这两假定是在一个辅助的五维空间表出的。

许多金属没有塑性体积变化，因此只需讨论应变偏量 e_{ij} ，它有五个独立的分量。辅助空间中的五个应变分量 E_i 由下面的变换引出，

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} e_{11}, & E_2 &= \sqrt{2} \left(e_{22} + \frac{1}{2} e_{11} \right) \\ E_3 &= \sqrt{2} e_{12}, & E_4 &= \sqrt{2} e_{23}, & E_5 &= \sqrt{2} e_{31} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

偏应变路径即示于空间 E_i 。应力偏量 s_{ij} 也经同样的变换并得到五个独立分量 Σ_i ，

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} s_{11}, & \Sigma_2 &= \sqrt{2} \left(s_{22} + \frac{1}{2} s_{11} \right) \\ \Sigma_3 &= \sqrt{2} s_{12}, & \Sigma_4 &= \sqrt{2} s_{23}, & \Sigma_5 &= \sqrt{2} s_{31} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

经过变换，内积仍得到保持，即

$$\Sigma_i \Sigma_j = s_{ij} e_{ij} \quad (2.3)$$

因此如果 Σ_i 与 E_i 或它的增量之间有系数为内积的线性关系，则这样的关系同样地可用 s_{ij} 与 e_{ij} 表示。以后使用 E_i 空间或 e_{ij} 空间将视何者方便而定。

在本文中，应力及应变偏量将简称为应力及应变。

滞后假定 如文献[5]所述，应力向量的方向不取决于整个应变历史，而只依赖于最近一段应变路径，其长度 h 称为滞迹。如果应变路径从某个点 M 起转为一直线，则当从 M 点量起的路径长度大于 h 时，应力向量将平行于此路径。滞后假定已为实验^[5,6,10,11,12]所证实。

等向假定 应力向量相对于应变路径的方向及其长度仅取决于路径的内部几何性质而与路径在原点的方向无关。换言之，若 E_i 空间中某一路径经过绕原点的旋转或镜象映射而转变为另一路径，则绘于此路径上的应力向量也经受同样的变换。此假定也为实验所证实^[5,6,11]。

若瓦日洛夫^[13]曾指出，伊留申的五维辅助空间未保持第三不变量，因此不包括一切初始各向同性材料，然而有实验表明第三不变量的影响不大^[11]。

三、滞后假定及其表达式

卡恰诺夫曾于1955年提出滞后假定^[14]，但没有实验并且只有几个理想材料的数字例子而无理论论证。没有硬化的滞后现象可证如下。

理想塑性材料服从米赛斯准则 $\Sigma_i \Sigma_i = k^2$ 。它可用应变表示

$$F = (E_i - E_i^*)(E_i - E_i^*) - \frac{k^2}{2G^2} = 0 \quad (3.1)$$

按伊留申公设，塑性应力增量向量 $d\Sigma_i^* = 2GdE_i^*$ 在应变空间中屈服曲面的法线方向，所以上式表示应变空间中的一个随动模型。屈服面的外法线既是应力向量的方向也是球面移动速度向量 \dot{E}_i 的方向，如图1所示，并且与应变路径成 θ 角。应变点 A 在直线路径上移动，同时它也在球面上移动，它对球面的相对速度在切线方向。此相对速度使 θ 角不断下降并趋于零。

这就是所谓的滞后现象。

现在来看二维情况，例如薄壁管实验，图1中的圆是屈服曲线。应变路径的长度以 ξ 表示，它也可称为“时间”，故应变点的运动速度为1，但现以常数 a 代替以便于以后关于本构方程推导。所以速度的切线分量为 $(-a \sin \theta)$ ，围线圆心的角速度为 $d\theta/d\xi$

$$R \frac{d\theta}{d\xi} = -a \sin \theta \tag{3.2}$$

此处 R 为圆半径。设直线段在 $\xi = \xi_1$ 处开始并且该处有 $\theta = \theta_1$ ，则(3.2)之解为

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left[\exp \left[-\frac{a}{R} (\xi - \xi_1) \tan \frac{\theta_1}{2} \right] \right] \tag{3.3}$$

此式表明当 $\xi \rightarrow \infty$ 时 $\theta \rightarrow 0$ 。实际上滞迹只能是相对的，例如当 θ 下降到 3° 时认为向量 Σ_i 与应变路径平行，所以 h 与 θ_1 有关。实验表明^[15] h 随 θ_1 之减小而下降。(3.3)与此实验符合。

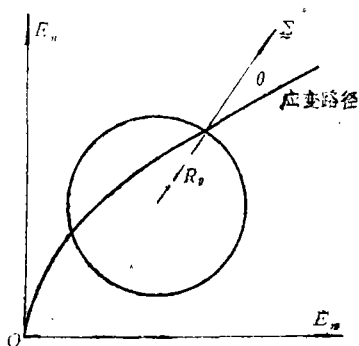


图 1

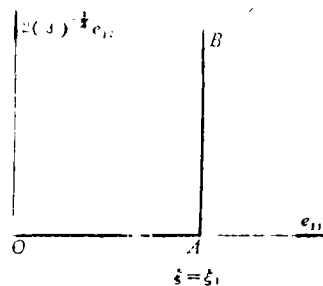


图 2

伊留申为了表达滞后现象，曾建议引用粘性材料的式子^[16]，

$$\Sigma_i = \int_0^\xi K(\xi, \xi', \kappa_1, \kappa_2, \dots) dE_i(\xi')$$

此处 κ_i 为表征应变路径的几何性质的参数，但是很难找到令人满意的具体式子。通常粘性材料的滞后现象使用较方便的积分式子，相似地可写

$$\Sigma_i = 2G \int_0^\xi \exp[-\lambda(\xi - \xi')] \psi(\xi') dE_i(\xi') \tag{3.4}$$

此处 ψ 为与硬化有关的函数。但此式有一难以克服的缺点。方向突变的应变路径实验是对本构方程的严峻考验，例如图2所示的予拉伸继之以扭转，即在 $\xi = \xi_1$ 的 A 点有一 90° 拐角。实验^[6, 17, 18]表明，经过 A 点以后， σ_{11} 下降的速度小于 $\sqrt{3} \sigma_{12}$ 上升的速度，后者已扣除继续硬化部分（参阅本节最后一段）。此处所谓速度较大系指分量 σ_{11} 变化的大部分（不是全部）在较短的时间内完成。此外，应力的模 s （为简便以 s 代替 $|\Sigma_i|$ ）迅速下降一个小量然后再增长。但是按(3.4)，当 $\xi > \xi_1$ 并且 ξ_1 之后 $\psi = \text{常数}$ 时，

$$\Sigma_1 = s(\xi_1) \exp[-\lambda(\xi - \xi_1)] \tag{3.5a}$$

$$\Sigma_2 = s(\xi_1) [1 - \exp[-\lambda(\xi - \xi_1)]] \tag{3.5b}$$

上式给出速度 $|\dot{\Sigma}_1| = |\dot{\Sigma}_2|$ ，而实验^[12]（参阅第五节）中当 $\xi - \xi_1 = 0.0025$ 时， Σ_1 下降了39%并且此时 Σ_2 已增长了 $s(\xi_1)$ 的78%。这个相当大的差别即使引用内蕴时间 $z = z(\xi)$ ^[19] 也不能改善，因为那只是在(3.5)中以 z 代替 ξ 而已。然而按照图1的应力分量变化显示另一种规律。

按(3.3), θ 不断下降并且

$$\Sigma_1 = \bar{s}' \sin \theta(\xi) \quad (3.6a)$$

$$\Sigma_3 = \bar{s}' \cos \theta(\xi) \quad (3.6b)$$

此处 \bar{s}' 为初始屈服应力之模. 在上式中, Σ_1 下降的速度小于 Σ_3 上升的速度, 这与实验相似, 但(3.6)使应力之模 \bar{s} 保持不变并不能表达实验^[10,20]中的 \bar{s} 暂时下降的情况. 这与 Σ_1 和 Σ_3 变化速之差有关, 但(3.4)可以表达这种短时下降的情况.

实验^[12]属于“拉伸~扭转~拉伸”类型, 每个应变路径有二个 90° 拐角. 后一个拉伸开始于不同的剪应变值, 即0.5, 0.75, 1.0及2.0%. 经过对相应于最后一段拉伸时的实验曲线的仔细考察, 可以发现在较小的剪应变值开始的拉伸, Σ_1 与 Σ_3 变化速度之差也较小. 我们可以从实验结果(见图3及图4)得知, 这个较小的剪应变值对应于应力向量和应变路径之间的夹角较小并且小于 90° , 因为这时的应力分量 Σ_1 并未接近于零或距零尚远. (3.3)中 θ 的始值 θ_1 的不同, 将导致与此相似的应力变化. (3.6)中的速度 $\dot{\Sigma}_1$ 与 $\dot{\Sigma}_3$ 之差随始值 θ_1 之下降而减小, 并且当 $\theta_1 < 45^\circ$ 时走向反面, 即 $|\dot{\Sigma}_1| > |\dot{\Sigma}_3|$. 故可企望应力能由(3.4)及(3.6)两种类型的应力之和来表达, 这时(3.6)应推广到五维情况, 即后面的(3.9). 此外, 对有足够长的屈服平台的软钢的实验^[20]表明, 初始屈服应力的性质确与硬化应力不同. 在此实验中, 在处于屈服平台应力水平的情况下, 当予拉伸后继之以扭转时, 应力模 \bar{s} 有百分之几小量的短暂增长, 而予扭转后继之以拉伸时则 \bar{s} 有小量的短暂下降(图1中未考虑), 但在硬化阶段时这两种变形情况都是 \bar{s} 有小量的短暂下降. 这也表示上述两种类型应力存在的可能性. 晶体内由于某种对位错运动的阻碍而导致硬化阶段的应力增长, 而在屈服平台的常应力下应变可以自由增长. 应变路径方向的突变似乎暂时解除了这种阻力的一小部分并且引起 \bar{s} 的小量暂时下降.

综上所述, 可作假定如下. 假定应力由两部分组成: 第一部分 Σ^I 之模 \bar{s}' 为常量 $\sqrt{2/3} \sigma^y$ 或 $\sqrt{2} \tau^y$ (σ^y 和 τ^y 分别为拉伸和剪切屈服应力. $\sqrt{2/3} \sigma^y$ 与 $\sqrt{2} \tau^y$ 可能有少量差别, 处理方法可参阅第五节), 并且 Σ^I 按理想塑性体规律变化, 如图1所示. 第二部分 $\Sigma^II = \Sigma - \Sigma^I$ 按(3.4)式变化. 塑性规律毕竟是复杂的, 并且 Σ^I 也仅是应力的一部分, 因此进一步假定, 由于 Σ^I 之影响而使(3.2)中的 $a \approx 1$. 更合理的假定是系数 a 及模 \bar{s}' 都是参数 ξ 的函数, 但这显然要麻烦得多, 因此令 a 及 \bar{s}' 都是常数. 从最后一节的理论计算与实验比较来看, 这已有相当好的精度而令人满意了. 此处提出的理论仍属唯象理论, 并不能从微观结构分析推导出来.

(3.2)应推广到五维情况. 以 v_i 表示应变速度如下,

$$d\xi = (dE_i, dE_i)^\dagger, \quad v_i = \frac{dE_i}{d\xi} \quad (3.7)$$

将 v 按米赛斯球面的法线 n 及切线 t (与 n 及 v 共面) 方向分解, 则切向速度 v_t 之分量为

$$v_{it} = v_i - \frac{1}{(\bar{s}^y)^2} \Sigma_m^y v_m \Sigma_i^y \quad (3.8)$$

按我们的假定, 应力速度 $\dot{\Sigma}^I = 2Gav_{it}$, 故有

$$\Sigma^I = \Sigma^I_0 + 2Ga \int_{\xi_0}^{\xi} \left[v_i - \frac{1}{(\bar{s}^y)^2} v_m \Sigma_m^y \Sigma_i^y \right] d\xi \quad (3.9)$$

此处路径长度 ξ_0 对应于塑性阶段之开始, Σ^I_0 为 $\xi = \xi_0$ 时之初始屈服应力. 可以证明, (3.3)能由(3.9)导出.

另一部分应力 Σ^II 服从(3.4)

$$\Sigma_i^{\dagger} = 2G \int_{\xi_0}^{\xi} \exp[-\lambda(\xi - \xi')] \psi(\xi') v_i(\xi') d\xi' \quad (3.10)$$

函数 ψ 可导出如下。实验^[10,11,15,20]表明，甚至当应变路径突变方向后转为一直线时，经过一小段（远小于滞迹 h ）之后，应力 Σ_i 之模 $\bar{s}(\xi)$ 与简单加载情况者几乎相等，差别仅有百分之几。小曲率应变路径（曲率半径大于 h ）情况也是如此^[6]。所以函数 $\psi(\xi)$ 可由简单加载实验求得，即(3.10)中的向量 v_i 用其模 $|v|=1$ 代替，然后将(3.10)对 ξ 微商并将所得之式与原式(3.10)联合消去积分项，如此可得函数 $\psi(\xi)$

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2G} \left\{ \frac{d}{d\xi} [\bar{s}^j(\xi) - \bar{s}^y] + \lambda [\bar{s}^j(\xi) - \bar{s}^y] \right\} \quad (3.11)$$

此处 $\bar{s}^j(\xi)$ 为简单加载情况（例如纯剪）下的应力模，并且 $\bar{s}^y = \sqrt{2\tau^y}$ 。

将 Σ_i^{\dagger} 与 Σ_i^y 相加，得到本构方程

$$\begin{aligned} \Sigma_i = & \Sigma_i^y + 2Ga \int_{\xi_0}^{\xi} \left[v_i - \frac{1}{(\bar{s}^y)^2} \Sigma_m^y v_m \Sigma_i^y \right] d\xi' \\ & + 2Ga \int_{\xi_0}^{\xi} \exp[-\lambda(\xi - \xi')] \psi(\xi') v_i(\xi') d\xi' \end{aligned} \quad (3.12)$$

这是以内积为系数的线性方程，因此它也可由普通的偏张量 s_{ij} 及 e_{ij} 表示

$$\begin{aligned} s_{ij} = & s_{ij}^y + 2Ga \int_{\xi_0}^{\xi} \left[v_{ij} - \frac{1}{(\bar{s}^y)^2} s_{mn}^y v_{mn} s_{ij}^y \right] d\xi' \\ & + 2Ga \int_{\xi_0}^{\xi} \exp[-\lambda(\xi - \xi')] \psi(\xi') v_{ij} d\xi' \end{aligned} \quad (3.13)$$

此处

$$v_{ij} = \frac{de_{ij}}{d\xi}, \quad d\xi = (de_{ij} de_{ij})^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

虽然上式中的函数 $\psi(\xi)$ 是由简单加载实验求得的，但此式仍能表达路径突变方向后应力模 \bar{s} 有短暂下降的现象，因为此式中最后的积分项有此性质。方程(3.5)是这积分项的特殊情况。

上面的本构方程适用于没有塑性体积变化的初始各向同性材料，第三不变量的影响可以略去不计，并且材料处于加载状态。伊留申^[5]曾提出加载条件 $\Sigma_i \dot{E}_i > 0$ ，这似需进一步的研究。

当应变路径在 $\xi = \xi_1$ 时突然改变方向并且转为一直线时，则速度 v_i 突然变为某个常向量。在这种情况下，计算应力分量时可利用下面导出的式子。由(3.11)及分部积分，

$$\begin{aligned} & 2G \int_{\xi_1}^{\xi} \exp[-\lambda(\xi - \xi')] \psi(\xi') v_i d\xi' \\ & = \int_{\xi_1}^{\xi} \exp[-\lambda(\xi - \xi')] \left\{ \frac{d}{d\xi'} [\bar{s}^j(\xi') - \bar{s}^y] + \lambda [\bar{s}^j(\xi') - \bar{s}^y] \right\} d\xi' v_i \\ & = [\exp(-\lambda(\xi - \xi_1)) (\bar{s}^j - \bar{s}^y)]_{\xi_1}^{\xi} v_i \\ & = [\bar{s}^j(\xi_1) - \bar{s}^y] [1 - \exp(-\lambda(\xi - \xi_1))] + [\bar{s}^j(\xi) - \bar{s}^j(\xi_1)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

上式中第一项对应于(3.5b)，只是 \bar{s} 换为 $[\bar{s}^j(\xi_1) - \bar{s}^y]$ 。第二项是继续硬化作用，在(3.5b)中已被扣除。

四、等向假定及其表达式

表达滞后现象的方程实际上免不了从应变路径的内部几何性质出发, 因此也就同时满足了等向假定, (3.12)及(3.13)也是如此, 可证如下.

设偏应变空间中有正交张量 R , 则经过旋转或镜像映射后, 新的应变 E' 及应力 Σ' 张量为

$$E' = RE, \quad \Sigma' = R\Sigma \quad (4.1)$$

对(3.12)的等号双方施以算子 R , 由于内积是不变量, 所以只是将其中的 Σ , Σ' 及 ν 换为 Σ' , Σ' 及 $\nu' = dE'/d\xi$. 因此它满足等向假定.

五、与实验比较

大桥^[12]给出的实验点(赤铜)见图3及图4, 应变路径是包含两个90°拐角的折线, 也附在图中, 即拉伸继之以扭转, 然后再转为拉伸, 并且后一段的拉伸起始于不同的剪应变值. 大桥使用的应变及应力分量与(2.1)和(2.2)分别差一个乘子 $\sqrt{2/3}$ 及 $\sqrt{3/2}$, 因此在薄壁管实验中

$$\sigma_{11} = \Sigma_1, \quad \sqrt{3}\sigma_{12} = \Sigma_3, \quad e_{11} = E_1 \text{ (实验中塑性应变较大, 略去弹性体积变化),}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}e_{12} = E_3, \quad s = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2}, \quad d\xi = \sqrt{de_{11}^2 + \frac{4}{3}de_{12}^2}.$$

第一个拐角在 $\xi_1 = 0.015$, 第二个拐角在 ξ_2 , 其值有四个, 即有四条实验路径, 它们分别对应于 $\xi_2 - \xi_1 = 0.0025, 0.005, 0.01, 0.02$. 大桥的数据取自他的另一论文^[16], 函数 $s_f(\xi)$ 可由该文的拉伸图得到, $s^0 = 12.0 \text{ kgf/mm}^2$. 以下的应力单位同此, 略去不写. 理论计算与实验符合相当好, 见图3及图4. 计算式子写出如下. (3.12)中第一个积分可参考(3.3), 第二个积分可参考(3.15). 当 $\xi < \xi_1$ 时, ν 只有一个分量 ν_1 , 并且在 $\xi = \xi_1$ 时 $\sigma_{11} = 18.8$, 故 $s'(\xi_1) - s^0 = 18.8 - 12.0 = 6.8$. (注: $1 \text{ kgf} = 9.80665 \text{ N}$).

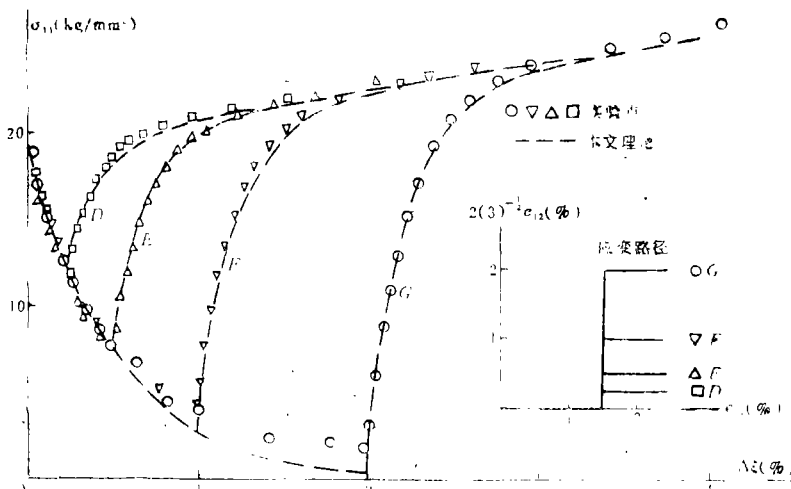


图 3

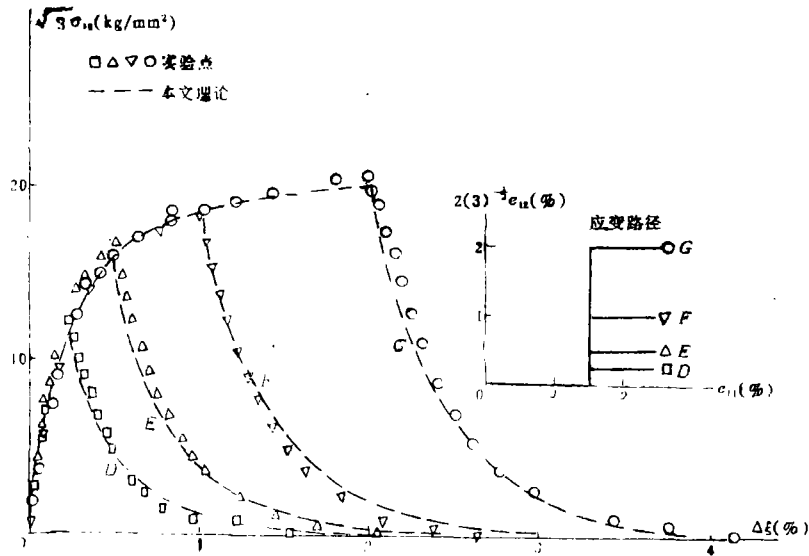


图 4

$\xi_1 < \xi < \xi_2$ 时, ν_i 只有分量 \dot{B}_3

$$\theta = 2 \tan^{-1} \exp \left[-\frac{a}{R} (\xi - \xi_1) \right] \quad (5.1a)$$

$$\sigma_{11} = 12.0 \sin \theta + 6.8 \exp [-\lambda (\xi - \xi_1)] \quad (5.1b)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sigma_{12} = & \{ 12.0 \cos \theta + 6.8 [1 - \exp [-\lambda (\xi - \xi_1)]] \\ & + \bar{s}'(\xi) - \bar{s}'(\xi_1) \} \beta \end{aligned} \quad (5.1c)$$

$\xi_2 < \xi$ 时, ν_i 只有分量 \dot{B}_1

$$\theta_2 = 90^\circ - 2 \tan^{-1} \left[\exp \left[-\frac{a}{R} (\xi_2 - \xi_1) \right] \right] \quad (5.2a)$$

$$\theta = 2 \tan^{-1} \left[\exp \left[-\frac{a}{R} (\xi - \xi_2) \right] \tan \frac{\theta_2}{2} \right] \quad (5.2b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & 12.0 \cos \theta + 6.8 \exp [-\lambda (\xi - \xi_1)] + [\bar{s}'(\xi_2) - 12.0] \\ & \cdot [1 - \exp [-\lambda (\xi - \xi_2)]] + \bar{s}'(\xi) - \bar{s}'(\xi_2) \end{aligned} \quad (5.2c)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sigma_{12} = & \{ 12.0 \sin \theta + [6.8 - 6.8 \exp [-\lambda (\xi_2 - \xi_1)] \\ & + \bar{s}'(\xi_2) - \bar{s}'(\xi_1)] \exp [-\lambda (\xi - \xi_2)] \} \beta \end{aligned} \quad (5.2d)$$

上面的式子是由(3.13)导出的但在 $\sqrt{3} \sigma_{12}$ 式中增加了一个乘子 β , 这是考虑第三不变量的影响^[20]. 在文献[15]的图6中, 当 $\xi = 0.035$ 时, $\sigma_{11} = 22.5$, $\sqrt{3} \sigma_{12} = 20.6$, 按此取 $\beta = 20.6/22.5 = 0.915$. 这个问题后面还要讨论. 参数 λ 及 a/R 之值确定如下.

当 $\xi - \xi_1 = 0.005$ 时, 图3中的 $\sigma_{11} = 7.6$, 图4中的 $\sqrt{3} \sigma_{12} = 16.4$, 后者包含继续硬化部分1.2,

$$12.0 \sin \theta_{0.5} + 6.8 \exp [-0.005 \lambda] = 7.6 \times 0.97 \quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned} 12.0 \cos \theta_{0.5} + 6.8 (1 - \exp [-0.005 \lambda]) + 1.2 \\ = 16.4 \times 0.97 \times \frac{1}{0.915} \end{aligned} \quad (5.3b)$$

上面式中增加了一个系数0.97, 是因为 σ_{11} 下降与 $\sqrt{3}\sigma_{12}$ 上升速度的差别稍大于(3.6)中的 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 速度之差。没有这个乘子, 从这些实验数据得不到实数的解答。这是第三节中简化假定 \bar{s}^v 为常值带来的结果, 但影响很小。为此, 乘以0.97, 即允许该处的应力有误差3% (在实验误差范围之内)。 (5.3)之解为

$$\lambda = 604.0 \quad (5.4a)$$

$$\frac{a}{R} = -\frac{1}{0.005} \ln\left(\tan \frac{1}{2} \theta_{0.5}\right) = 225.3 \quad (5.4b)$$

理论计算结果在图3及图4中用虚线表示, 它与实验点足够接近, 包括第二个90°拐角以后的实验点。图3上, 在 $0.01 < (\xi - \xi_1) < 0.02$ 范围内的实验点看来有较大的实验误差, 它与许多实验^[4, 10, 15, 17, 20]的 $\theta \rightarrow 0$ 的结果不符。

(5.3)中有附加的乘子0.97, 这涉及到本构方程(3.13)适用范围的问题, 说明于下。除了引用这样的附加乘子以外, 我们还可考虑其它办法。在其它 $(\xi - \xi_1)$ 值处的应力值也可用来确定(5.3)中的系数。屈服应力 \bar{s}^v 并没有精确的数值, 并且许多金属的拉伸图在超过屈服点后的一小段内, 切线模量与弹性模量相差不多, 因此我们也可在必要时选用略高的 \bar{s}^v 值以使本构方程能与复杂加载的实验相符合, 这是因为应力的第一部分按三角函数规律变化, 如(3.6)所示。此外, λ 值对于方程(5.3)中的一些常数相当敏感, 但应力分量的数值对 λ 值并不敏感。例如, 我们曾按 $\lambda = 381.7$ 及 $a/R = 241.3$ 计算图3及图4上的应力分量, 这两个值与640.0及225.3相差甚多, 但计算的应力仍接近实验, 只是在应力曲线的某些局部段落上的误差才略大一些。关于应变路径理论的实验已有相当数量, 但只有图3和图4的大桥实验^[12](黄铜)给出较完整的数据可供验证本文提出的理论。在某些其它发表的实验^[6, 18](钢)中, 应力分量变化的曲线也与文献[12]相似, 因此可企望它们也可由(3.13)表示。

显然可企望(3.13)能适用于没有突变方向的应变路径情况, 因为滞后假定对它们也适用, 特别是小曲率应变路径情况。后者已为实验^[5, 6]所证实。

对于曲线形状的应变路径, 第三不变量的影响还难以计入。如果上面的例子也不考虑此影响, 即(5.1c)和(5.2d)中没有乘子 β , 我们可取平均值, 即 σ_{11} 和 $\sqrt{3}\sigma_{12}$ 分别乘以和除以 $\sqrt{0.915}$, 由此增加的误差不超过4.5%。也有拉伸图 $\sigma-\epsilon$ 和剪切图 $\sqrt{3}\tau-\gamma/\sqrt{3}$ 相同的材料^[21], 因而第三不变量并不影响其本构关系。

六、结论和附注

1. 应变路径理论的实验, 即有折线形状路径, 也有曲线形状路径。实验材料包括黄铜, 赤铜, 软钢, 铝合金, 钢30XГCA等。伊留申的两个假定得到证实。本文提出的本构方程的理论曲线与实验符合, 可认为是可靠的。

2. 最常用的有限元以位移为基本未知量。应变路径理论正好与其相适应, 只是具体方法尚待研究。

3. 有限应变情况下, 首要问题似为应变的弹性部分与塑性部分之划分, 许多论文致力于此并发生争论。这样的划分对于应变路径理论并不需要, 因其方程中的应力由全应变表示, 这有利于有限应变情况下弹塑性理论的发展。

参 考 文 献

- [1] Rees, D. W. A., A review of stress-strain path and constitutive relation in the plastic range, *J. of Strain Analysis for Eng. Design*, 6, 4 (1981), 235—249.
- [2] 张泽华, 塑性本构关系的实验研究, 《塑性力学进展》, 中国铁道出版社 (1988)。
- [3] Michino, M. J., Jr., et al., An historical perspective yield surface investigation for metals, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 11 (1976), 59—82.
- [4] Илькин А. А., О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред, *ПММ*, XV, 6 (1954), 641—666.
- [5] 伊留申, А. А., В. С., 连斯基, 复杂加载时材料的变形规律, *力学学报*, 3 (1959), 191—206.
- [6] Ленский В. С., История новых данных о пластичности металлов при сложном нагружении, *Изв. АН СССР, ОТН, ММ* (1960), 93—100.
- [7] Ильин А. А., *Пластичность*, Изд. АН СССР (1963).
- [8] Asaro, R. J., Crystal plasticity, *J. Appl. Mech.* 50 (1983), 921—934.
- [9] Lin, T. H. and Ribero, S. G., Development of a physical theory of plasticity, *Int. J. Solids Struc.*, 17 (1981), 545—551.
- [10] Ohashi, Y. and K. Kawashima, Plastic deformation of aluminium alloy under abrupt changing loading or strain path, *J. Mech. Phys. Solids*, 25 (1977), 409—421.
- [11] Ohashi, Y., et al., Effect of third invariant of stress deviator on plastic deformation of mild steel, *J. Mech. phys. Solids*, 23 (1975), 295—323.
- [12] Ohashi, Y., et al., Stress-strain relation of integral type for deformation of brass along strain trajectories consisting of three normal straight branches, *Arch. Mech.*, 32 (1980), 125—143.
- [13] Новажилев В. В., Об одном напряжении в теории пластичности, *Изв. АН СССР, ОТН, ММ*, 3 (1961), 176—181.
- [14] Качанов Л. М., К вопросу о сложном нагружении, *ПММ*, ТХІХ вып. 3. (1955).
- [15] 大桥義夫, 等, 黄铜の塑性挙動のひずみ履歴依存性に関する实验研究, 日本机械学会论文集, 45, 430 (1979), 1575—1584.
- [16] Ильин А. А., Об основных основах математической теории пластичности, *Вопросы Теории Пластичности*, Изд. АН СССР (1961).
- [17] 大桥義夫等, 組合せ負荷を受ける黄铜の塑性变形に対する精密な实验的研究, 日本机械学会论文集, 43, 374 (1977), 3731—3743.
- [18] Wu, H. C., et al., Further application of endochronic constitutive equation to loading with non-proportional axial-torsional strain path, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 20, 1 (1985), 41—52.
- [19] Valanis, K. C., A theory of viscoplasticity without a yield surface, *Arch. Mech.* 23, 4,5 (1971), 517—551.
- [20] Ohashi, Y., et al., Precise measurement of plastic behaviour of mild steel tubular specimens subjected to combined tension and axial force, *J. Mech. Phys. Solids*, 21 (1973), 241—261.

- [21] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity* (1960).
- [22] Carroll, M. M., Foundations of solid mechanics, *Solid Mechanics Research Trends and Opportunities* (Report), chapter 15, *Appl. Mech. Review* (1985), 1247—1309.

Strain Path Theory of Plastic Constitutive Relation

Zhao Zu-wu

(*Tianjin University, Tianjin*)

Abstract

Based on Illiushin's two hypotheses a new plastic constitutive equation of integral type is proposed. The deviatoric stress induced by a strain path consists of two parts which vary according to different laws. Comparison of theoretical calculation with recent experiments is satisfactory. The present theory is not an endochronic theory.