

加载和卸载过程中复合材料叠层圆柱 曲板后屈曲路径的研究*

董方林 黄小清

(华南理工大学, 1989年6月9日收到)

摘 要

本文用动态松弛法研究了在加载和卸载过程中复合材料叠层圆柱曲板的后屈曲路径, 发现了加载路径与卸载路径不重合的现象, 给出了在均匀单轴压力作用下的十字叠层圆柱曲板在两种边界条件下的数值结果, 并讨论了层数、曲率半径、初始几何缺陷等因素对后屈曲路径的影响。

一、前 言

叠层板的后屈曲问题在工程中占有重要地位, 因此, 很多文献对此作了研究。第一个为研究各向异性板后屈曲作出努力的可能是Chan^[1], 此后, Prabhakara 和 Chia 在他们的系列文章^[2~4]中研究了这个问题。在文献[5]中, Chia 又系统地介绍了在轴压下叠层板的后屈曲特性, 他还在文献[6]中用伽辽金法求出大挠度方程的通用近似解, 给出了两邻边固支、其它简支的正交异性矩形板在单轴和双轴压载下的后屈曲的数值结果。Stein^[7~9]对正交异性板的后屈问题亦作了系统研究。Zhang和 Matthews^[10]分析了简支各向异性板在纯剪切及剪切与压缩共同作用下的后屈曲。Hui^[11]研究过拉弯耦合对轴压矩形叠层板的缺陷敏感度的影响。Raju 和 Rao^[12]研究过圆柱正交异性圆板的后屈曲。Dumir 和 Khatri^[13]研究过正交异性变厚度圆形环板的轴对称后屈曲。Feng^[14]用能量法研究过各向异性叠层矩形板的后屈曲。

关于叠层圆柱曲板的后屈曲问题, Zhang 和 Matthews 作过系列研究。在文献[15,16]中, 他们研究过圆柱曲板的分支性状; 在文献[17]中, 他们讨论了简支不对称叠层圆柱曲板在面内压缩和剪切载荷作用下的非分支挠曲性状。笔者在文献[18]中研究了在加载过程中初始几何缺陷对叠层圆柱曲板大挠度屈曲的影响。

然而, 所有上述文献都未指出后屈曲路径的卸载过程。本文用动态松弛法研究了理想的和有初始几何缺陷的圆柱曲板在加载和卸载全过程中载荷与挠度的对应关系, 发现了加载路径与卸载路径不重合的现象, 从而进一步揭示了载荷-挠度曲线的物理意义。

* 周履推荐。国家自然科学基金资助。本文主要内容在第七届国际复合材料会议(1989年11月, 中国广州)上宣读。作者得到周履教授的指导, 在此谨致深切谢意。

二、基本公式

沿曲率半径为 R 的圆柱曲板的母线和圆弧取坐标 x 和 y ; z 坐标则取在曲板的法线方向上。设板存在初始几何缺陷, 则挠度将由载荷产生的挠度 w 和初始挠度 w_0 两部分组成。因此, 中面应变为

$$\varepsilon_x = u_{,x} + (w_{,x})^2/2 + w_{,x}w_{0,x}; \quad \varepsilon_y = v_{,y} + (w_{,y})^2/2 + w_{,y}w_{0,y} - w/R \quad (2.1a, b)$$

$$\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} + w_{0,x}w_{,y} + w_{,x}w_{0,y} \quad (2.1c)$$

板元的运动方程为

$$\rho_1 u_{,tt} + \mu_1 u_{,t} = N_{x,x} + N_{xy,y}; \quad \rho_2 v_{,tt} + \mu_2 v_{,t} = N_{xy,x} + N_{y,y} \quad (2.2a, b)$$

$$\rho_3 w_{,tt} + \mu_3 w_{,t} = M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + E + F + G \quad (2.2c)$$

其中 ρ_r 和 μ_r ($r=1, 2, 3$) 为虚拟密度和阻尼系数; 下标 t 表示时间; E , F 和 G 分别为

$$E = N_x(w_{,xx} + w_{0,xx}) \quad (2.3a)$$

$$F = 2N_{xy}(w_{,xy} + w_{0,xy}) \quad (2.3b)$$

$$G = N_y(1/R + w_{,yy} + w_{0,yy}) \quad (2.3c)$$

对式(2.2)中的三个式子进行中心差分, 并假定

$$\mu_1 \cdot \Delta t / \rho_1 = \mu_2 \cdot \Delta t / \rho_2 = \mu_3 \cdot \Delta t / \rho_3 = \mu \quad (2.4)$$

可得各点的速度的迭代式, 例如

$$\dot{w}_{(i,j),n} = [(1 - 0.5\mu)\dot{w}_{(i,j),n-1} + C_{(i,j),n-1/2} \cdot \Delta t / \rho_3] / (1 + 0.5\mu) \quad (2.5c)$$

其中 $C_{(i,j),n-1/2}$ 表示式(2.2c)右边的有限差分式。类似地可写出 \dot{u} 和 \dot{v} 的迭代式 [(2.5a~b), 省略]。

从 $w_{,t} = \dot{w}$, 可写出位移 w 的迭代式

$$w_{(i,j),n+1/2} = w_{(i,j),n-1/2} + \dot{w}_{(i,j),n} \cdot \Delta t \quad (2.6c)$$

类似地可写出 u 和 v 的迭代式 [(2.6a~b), 省略]。

在以上的迭代公式中使用了双下标记号。例如, $\dot{w}_{(i,j),n}$ 表示在节点 (i, j) 处、 $(n \cdot \Delta t)$ 时刻在 z 方向的速度。

关于虚拟密度的计算方法, 可参阅文献[18]。根据式(2.1a~c), 可写出 $\bar{\rho}_x$, $\bar{\rho}_y$ 和 $\bar{\rho}_{xy}$ 的表达式, 例如

$$\bar{\rho}_{x(i,j)} = 1/\Delta x + 2^{-1} |w_{(i+1,j)} - w_{(i-1,j)}| / (\Delta x)^2 + |w_{0,x}| / (\Delta x) \quad (2.7a)$$

又, 根据非线性经典叠层理论的本构关系, 有

$$\begin{aligned} \bar{N}_{x(i,j)} = & A_{11} \bar{\rho}_{x(i,j)} + A_{12} \bar{\rho}_{y(i,j)} + A_{16} \bar{\rho}_{xy(i,j)} \\ & + 4|B_{11}| / (\Delta x)^2 + 4|B_{12}| / (\Delta y)^2 + 2|B_{16}| / (\Delta x \Delta y) \end{aligned} \quad (2.8a)$$

类似地可以写出 \bar{N}_y , \bar{N}_{xy} , \bar{M}_x , \bar{M}_y 和 \bar{M}_{xy} 的表达式 [(2.8b~f), 省略]。取 $\Delta t = 1$, 则可以写出节点 (i, j) 处的虚拟密度的计算式, 例如

$$\begin{aligned} \rho_{3(i,j),n-1/2} = & k \{ [\bar{M}_{x(i+1,j)} + 2\bar{M}_{x(i,j)} + \bar{M}_{x(i-1,j)}] / (\Delta x)^2 \\ & + [\bar{M}_{xy(i+1,j+1)} + \bar{M}_{xy(i-1,j+1)} + \bar{M}_{xy(i-1,j-1)} \\ & + \bar{M}_{xy(i+1,j-1)}] / (2\Delta x \Delta y) + [\bar{M}_{y(i,j+1)} + 2\bar{M}_{y(i,j)} \\ & + \bar{M}_{y(i,j-1)}] / (\Delta y)^2 + \bar{E}_{(i,j)} + \bar{F}_{(i,j)} + \bar{G}_{(i,j)} \} n_{-1/2} \end{aligned} \quad (2.9c)$$

式中 k 为常数, 可在 $0.25 \sim 0.5$ 之间选取; \bar{E} , \bar{F} 和 \bar{G} 则根据式(2.3a~c)写出:

$$\bar{E}_{(i,j)} = 4|N_{x(i,j)}| / (\Delta x)^2 + N_{x(i,j)} |w_{,xx} + w_{0,xx}| \quad (2.10a)$$

$$\bar{F}(i, j) = 2|N_{xy}(i, j)| / (\Delta x \cdot \Delta y) + 2\bar{N}_{yy}(i, j) |w_{,yy} + w_{0,yy}| \quad (2.10b)$$

$$\bar{G}(i, j) = 4|N_y(i, j)| / (\Delta y)^2 + \bar{N}_y(i, j) |1/R + w_{,yy} + w_{0,yy}| \quad (2.10c)$$

类似地可以写出 ρ_1 和 ρ_2 的计算式[(2.9a~b), 省略].

关于阻尼系数的计算, 仍按笔者在文献[18]、[19]中提出的方法进行. 即, 若以 ρ_{max} 和 ρ_{min} 分别表示 $\rho_r (r=1, 2, 3)$ 中的最大值和最小值, 则阻尼 μ 可由下式自动计算

$$\mu = c \sqrt{\rho_{max} \cdot \rho_{min}} / (\rho_{max} + \rho_{min}) \quad (2.11)$$

其中的常系数 c 可在0.025~0.25之间选取.

根据本构关系将内力表示为位移的系数后, 便可以进行迭代求解.

三、数值结果

在算例中, 我们研究了如图1所示的承受均匀轴压的十字叠层圆柱曲板. 其中, $a/b=1$, $b/h=100$, 并记 $K=b^2/(Rh)$.

计算中用到的两种复合材料的材料性能如下:

材料	$E_{11}(\text{GN/m}^2)$	$E_{22}(\text{GN/m}^2)$	ν_{12}	$G_{12}(\text{GN/m}^2)$
硼/环氧	206.9	20.7	0.3	5.2
碳/环氧	206.9	5.2	0.25	2.6

边界条件考虑了两种情况:

(1) 四边为可动简支, 记为 $B1$:

$$y=0, b: w=M_y=N_{xy}=N_y=0$$

$$x=0, a: w=M_x=N_{xy}=0, N_x=-N$$

(2) 承载边为可动固支, 另两边为可动简支, 记为 $B2$:

$$y=0, b: w=M_y=N_{xy}=N_y=0$$

$$x=0, a: w=w_x=N_{xy}=0, N_x=-N$$

板的初始几何缺陷通过选取如下的初始挠曲 w_0 来考虑:

$$\text{对于 } B1: w_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \text{对于 } B2: w_0 = f_0 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

在数值结果中采用了下列符号: $\delta_0 = f_0/h$ 为板中心无量纲初始挠度; $\delta = w_0/h$ 为载荷产生的板中心无量纲挠度; $\bar{u} = a \cdot u_{\text{平均}}/h^2$ 为承载边的无量纲平均轴向位移; $\bar{N} = Nb^2/(E_{22}h^3)$ 为无量纲压力.

图2和图3分别给出了在 $B1$ 和 $B2$ 两种边界条件下, $\delta_0=0$ 及 $\delta_0=0.20$ 的(90/0)硼/环氧平板的中心挠度随均匀单轴压力增加及减少而变化的关系曲线.

图4和图5分别给出了在 $B1$ 和 $B2$ 两种边界条件下, 无初始几何缺陷($\delta_0=0$)且 $K=25$ 的(90/0)硼/环氧圆柱曲板, 其中心挠度随均匀单轴压力的增加及减少而变化的加载路径及卸载路径的曲线.

图6和图7分别给出了在 $B1$ 和 $B2$ 两种边界条件下, $\delta_0=0.20$ 且 $K=25$ 的(90/0)硼/环氧圆柱曲板, 其中心挠度随均匀单轴压力的增加及减少而变化的加载路径及卸载路径的曲线.

图8给出了 $K=35$ 且无初始几何缺陷($\delta_0=0$)的(90/0)碳/环氧圆柱曲板, 其中心挠度随均匀单轴压力的增加及减少而变化的加载路径及卸载路径的曲线.

图9和图10分别给出了曲率和层数对载荷-挠度曲线的影响.

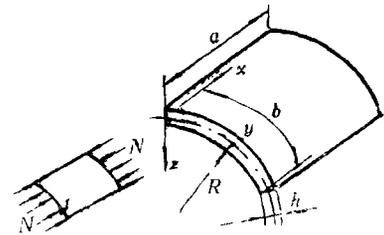


图 1

在均匀的单轴压力作用下,其承载边的轴向位移分布是不均匀的。图11给出了曲率对载荷-平均轴向位移曲线的影响。

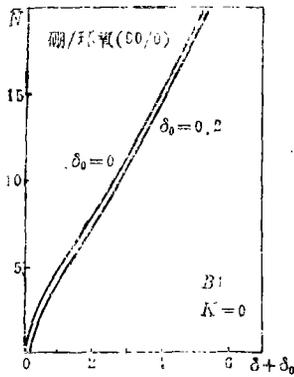


图 2

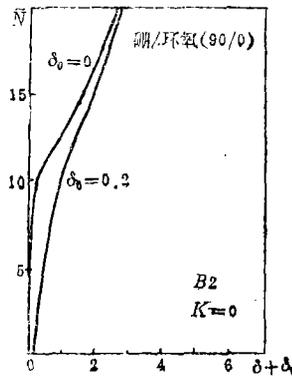


图 3

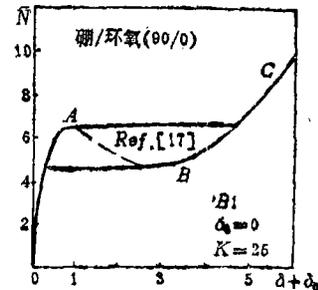


图 4

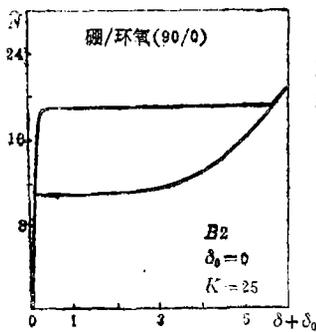


图 5

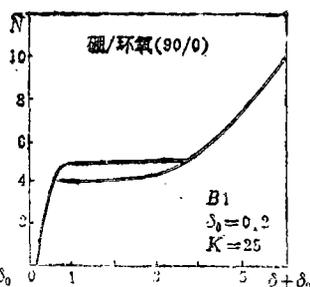


图 6

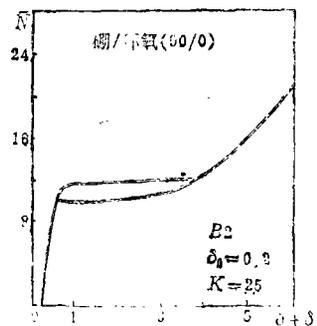


图 7

四、讨论和结论

通过计算及数值结果分析,可得出如下结论:

(1) 由图2~图10可见,由于拉弯耦合的影响,不对称十字叠层平板和圆柱曲板从加轴压开始即伴随有挠曲。

(2) 曲率对载荷-挠度曲线的影响甚为显著。对于(90/0)叠层圆柱曲板,曲率很小时($K=0,10$)不发生挠度跳跃;而曲率较大时($K=25,35$),则发生挠度跳跃。

(3) 只要发生挠度跳跃现象,其加载路径与卸载路径则不重合。在加载过程中,当载荷从零逐渐增加到上临界值时,挠度骤增,发生跳跃;此后,如果卸载,挠度则沿着另一路径下降,当载荷下降至下临界值时,挠度便骤减,又产生另一次跳跃。加载路径与卸载路径不重合的现象意味着在一个循环过程中有能量损失,这是因为挠度跳跃时有动能伴随产生,并转变为热能。

(4) 凡是不发生挠度跳跃现象的情况,其加载路径与卸载路径是一致的,这是因为此时不会出现由动能转变为热能的过程。

(5) 图10表明,当叠层圆柱曲板(90/0)_n的总厚度不变时, n 越大,则板的承载能力越大。

(6) 由图4与图6以及图5与图7的比较可见,初始几何缺陷使上临界载荷值显著下降,且固支情况所受的影响比简支的更为严重。

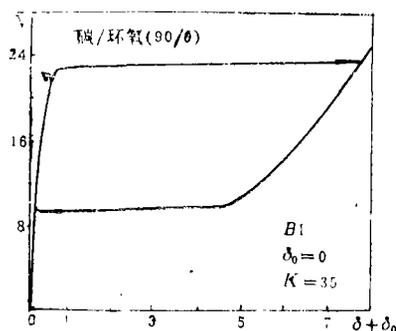


图 8

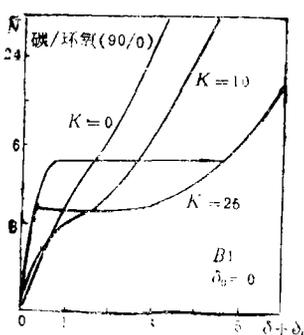


图 9

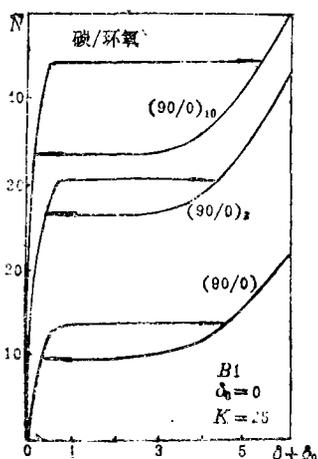


图 10

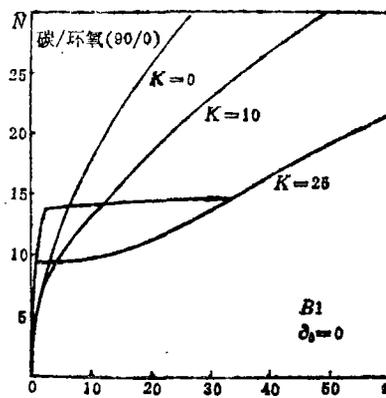


图 11

(7) 本文的研究表明,在逐步加载或逐步卸载的条件下, S 形的载荷-挠度曲线^[17]中的上、下临界点间的曲线部分并不出现。以图 4 为例,如果在均匀轴压从零逐步增加至上临界值(A 点)时即卸载,其载荷-挠度曲线是沿着屈曲前的曲线(A 点 \rightarrow 零点)下降的;而如果在后屈曲阶段的 C 点逐步卸载至下临界值(B 点)时即再加载,挠度则重新沿着该卸载曲线(B 点 \rightarrow C 点)增加。这一论断可用实验进一步证实。

参 考 文 献

- [1] Chan, D. P., An analytical study of the post buckling of laminated, anisotropic plates, Ph. D. Dissertation, Case Western Reserve University, Jan. (1971).
- [2] Prabhakara, M. K. and C. Y. Chia, Post-buckling behavior of rectangular orthotropic plates, *J. Mech. Engng. Sci.*, 15 (1972), 25—33.
- [3] Prabhakara, M. K. and C. Y. Chia, Post-buckling of angle-ply and anisotropic plates, *Ingenieur-Archiv.*, 45 (1976), 131—140.
- [4] Prabhakara, M. K., Post-buckling behavior of simply-supported cross-ply rectangular plates, *Aeronaut. Quart.*, 27 (1976), 309—316.
- [5] Chia, C. Y., *Nonlinear Analysis of Plates*, McGraw-Hill, New York (1980).
- [6] Chia, C. Y., 两邻边夹紧、其它边简支的正交各向异性矩形板的非线性振动和过屈曲, 武汉工业大学学报, 4 (1986).
- [7] Stein, M., Postbuckling of orthotropic composite plates loaded in compression, *AIAA J.*, 21, 12 (1983), 1729—1735.

- [8] Stein, M., Postbuckling of long orthotropic plates under combined loading, *AIAA J.*, 23, 8 (1985), 1267—1272.
- [9] Stein, M., Postbuckling of long orthotropic plates in combined shear and compression, *AIAA J.*, 23, 5 (1985), 788—794.
- [10] Zhang, Y. and F. L. Matthews, Postbuckling behavior of anisotropic laminated plates under pure shear and shear combined with compressive loading, *AIAA J.*, 22, 2 (1984), 281—286.
- [11] Hui, D., Imperfection sensitivity of axially compressed laminated flat plates due to bending-stretching coupling, *Int. J. Solids and Structures*, 22, 1 (1986), 13—22.
- [12] Raju, K. K. and G. V. Rao, Finite-element analysis of postbuckling behavior of cylindrically orthotropic circular plates, *Fib. and Tech.*, 19, 2 (1983), 145—154.
- [13] Dumir, P. C. and K. N. Khatri, Axisymmetric postbuckling of orthotropic thin tapered annular plates, *J. of Composite Materials*, 19, 5 (1985), 392—407.
- [14] Feng, M., Energy theory for postbuckling of composite plates under combined loading, *Computers & Structures*, 16, 1—4 (1983), 423—431.
- [15] Zhang, Y. and F. L. Matthews, Initial buckling of curved panels of generally layered composite materials, *Composite Structures*, 1, 1 (1983), 3—30.
- [16] Zhang, Y. and F. L. Matthews, Postbuckling behavior of curved panels of generally layered composite materials, *Int. J. of Composite Structures*, 1, 2 (1983), 115—136.
- [17] Zhang, Y. and F. L. Matthews, Large deflection behavior of simply supported laminated panels under in-plane loading, *ASME, J. of Appl. Mech.*, 52, 3 (1985), 553—558.
- [18] 董万林、黄小清、范赋群, 初始缺陷对正交叠层圆柱曲板临界载荷的影响, 华南理工大学学报, 17, 3 (1989), 19—26.
- [19] 黄小清、董万林, 边界条件对双模量叠层板大挠度弯曲的影响, 华南理工大学学报, 16, 3 (1988), 39—45.

A Study of the Postbuckling Path of Cylindrically Curved Panels of Laminated Composite Materials during Loading and Unloading

Dong Wan-lin Huang Xiao-qing

(Dept. of Eng. Mech., South China Univ. of Tech., Guangzhou)

Abstract

In this paper, Dynamic Relaxation Method is applied to study the postbuckling path of cylindrically curved panels of laminated composite materials during loading and unloading. The phenomenon that loading paths do not coincide with unloading paths has been found. Numerical results are given for cylindrically curved cross-ply panels subjected to uniform uniaxial compression under two types of boundary conditions. The influence of the number of layers, the panels curvature and the initial imperfection on the postbuckling paths is discussed.