应用数学和力学，第11卷第6期（1990年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

复合材料结构失效的模糊数学模型

潘敬哲　　罗祖道

（大连理工大学力学所）（上海交通大学力学系）

（1989年10月30日收到）

摘　　要

本文讨论了复合材料结构失效的模糊性，提出了结构失效度的概念并建立了相应的结构失效度分析理论。

一、引　　言

众所周知，复合材料结构不同于金属材料结构，它在外载荷作用下将表现出完全不同的破坏形式。复合材料结构在其终极失效前的一个相当长的过程中将出现各种形态的损伤，这些损伤会导致结构局部的刚度、阻尼以及强度等力学性能的明显变化，因此通常不宜将结构的终极失效定义为结构的失效。在设计和使用过程中，如何更合理地选择结构的失效定义是一个目前尚未得到妥善解决的问题。本文明确地区分了结构的终极失效和失效这两个不同的概念，提出以结构失效度这样一个数学意义上的模糊概念来度量结构损伤的程度并将其作为结构设计的一个参数。文中提出了一个结构失效度的分析方法，并阐明了结构失效度与结构可靠性之间的关系。设计者可以通过结构的失效度来确定结构的失效载荷或失效寿命，从而能使复合材料结构的设计更为合理可靠。

二、结构失效概念的模糊性

首先我们定义结构的终极失效。

定义1　结构由于各种原因不能继续承担外载荷的现象称为结构的终极失效。

后屈曲敏感结构（如受轴压的圆柱壳体）的临界失稳、材料中裂纹的失稳扩展以及钢结构由于塑性铰的增加变成几何可动的机构等现象都是结构终极失效的典型实例。结构在终极失效前所能承担的最大载荷称为结构的终极失效载荷，结构在终极失效前所承载的时间称为结构的终极寿命。结构的终极失效、终极失效载荷和终极寿命都只具有随机性而不具有模糊性。然而，通常并不是在任何情况下都宜采用终极失效载荷和终极寿命来进行结构设计的。例如，在常规设计中还常有对结构刚度提出要求。又如，习惯上常认为结构上的局部（如材

料力学中所谓的危险截面上的危险点）失效即意味着结构失效，而不是考虑该局部的失效是否会导致结构的终极失效．复合材料由于弱相的存在及其各向异性性质，使得结构远在其终极失效前就发生局部的破坏现象，例如分层、基体开裂、纤维与基体脱胶等．显然，对于复合材料结构采用终极失效概念进行设计是不合理的．

定义 2　结构在终极失效前不能满足某些使用要求的现象称为结构的前失效，或简称为失效．结构在发生前失效时所能承担的载荷称为结构的前失效载荷，结构达到其前失效状态历经的时间称为结构的前失效寿命．

必须指出的是，结构的前失效、前失效载荷和前失效寿命不但带有随机性，而且带有模糊性．前失效现象的模糊性体现在设计者对结构提出的关于结构安全性要求的主观性．例如，在测定复合材料试件的疲劳寿命时，常认为试件的刚度变化超过某一范围时试件即失效，尽管试件此时还远离其终极失效状态．显然，刚度变化范围的选择和选择刚度参数作为试件失效的度量本身都有一定的主观性，当然也不可能任意选择，它还有一定的客观性．此即前失效状态的确定具有数学意义上的模糊性[1]．因此，问题在于怎样合理地确定结构的前失效状态，从而确定结构的失效载荷和失效寿命．

三、结构失效的模糊数学模型

我们提出结构的失效度和安全度概念并以此作为设计和评定结构的基础．

定义 3　结构在某外载荷作用下对其失效的隶属度称为结构的失效度，失效度函数 $F=F(X)$满足如下公设条件：

a．初始状态失效度为零：$F(0)=0$；

b．终极失效状态失效度为单位值：$F(1)=1$；

c．F是X的单调升函数：$\partial F/\partial X>0$；

d．终极失效由损伤的失稳扩展造成：

$$\partial F/\partial X|_{X=1}=\infty$$

式中X称为结构的失效控制变量：

$$X=\begin{cases} P/P_f, & \text{静载荷情况} \\ n/N, & \text{常幅交变载荷情况} \end{cases}$$

P为结构承受的外载荷，P_f为终极失效载荷．n为载荷循环周次，N为终极寿命．

失效控制变量X的许用值是设计者需要确定的，一旦知道了失效度与失效控制变量的关系即知道了结构的失效函数$F(X)$，就可以根据要求的失效度确定结构的失效载荷或失效寿命．

下面我们指出失效度的几点重要性质：

性质 1　失效度不是场变量，而是一具有层次性的数值．

在一个结构中，若某一构件断裂了，则该构件的失效度为 1，但此时整个结构却不一定发生终极失效．相反，当结构发生终极失效时，若此结构不是等强度的，则可能有若干构件不发生终极失效．这些说明了失效度的层次性性质．

性质 2　结构失效度的大小不但决定于结构的损伤状态，而且还决定于结构所承受的载荷形式．

例如一块方板在水平方向存在一裂纹，若此方板承受垂直于裂纹方向的拉伸载荷，其失效度为某一数值 α，当此载荷反向时，其失效度为β，则显然有 $\alpha\gg\beta$（甚至可以认为$\beta=0$）．

明确认识结构失效现象的模糊性、层次性和载荷形式相关性，这对正确评定服役结构的受损状态从而对其维修或报废做出决策具有十分重要的意义．

定义 4 结构在外载荷作用下对其完好的隶属度称为结构的安全度 S．由于失效与完好是互余的模糊概念，于是有：

$$S(X)=1-F(X)$$

对于金属材料结构，一般可以采用终极失效或某一力学意义明确的前失效（如材料的屈服点）作为失效的定义．但是对于复合材料结构，将具有明确力学意义的前失效现象如分层起始点、第一层失效（first ply failure）等定义为失效就显得过于保守（第一层失效载荷往往只是层合板终极失效载荷的百分之三十）．它严重地浪费了复合材料的固有潜力．损伤现象使得复合材料的失效由一个确定的临界点概念变成了一个模糊的损伤累积过程．图 1 给出了这一变化的示意图．因而研究复合材料的失效度函数将是十分必要的．

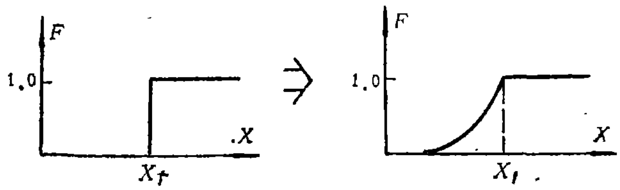

图 1 损伤使失效模糊化

四、复合材料层压板的失效度分析

失效度分析就是要建立失效度与失效控制变量之间的关系，它以下述两个前提条件为基础：

a. 已知保证层压板安全工作所需要控制的层压板性能参数．

b. 已知这些层压板性能参数随失效控制变量X的演变规律．

在应用失效度分析评定服役结构的安全性时，层压板的性能参数就是各种无损检测信息，例如由超声C-扫描获得的分层面积，由声发射分析仪获得的有关声发射的各种信息等．而这些性能参数随失效控制变量的演变规律是由实测得到的．在应用失效度分析确定结构设计中的失效载荷或失效寿命时，有关的层压板性能参数需要由设计者选定，例如层压板的某些特征刚度、剩余强度以及阻尼参数等．它们在静载荷或疲劳载荷作用下的演变规律已有许多研究结果可以利用[2,3,4,5]．

假定我们关心层压板的 m 项性能参数，记为：

$$\lambda_1(X),\ \lambda_2(X),\ \cdots,\ \lambda_m(X) \tag{4.1}$$

将 λ_i 分成两类，第一类称为增大型，即 λ_i 较大意味着层压板失效．第二类称为减小型，即 λ_i 较小意味着层压板失效．对增大型λ_i采用修正的升半凹型隶属函数[1]（见图2）：

$$\mu_i(\lambda_i)=\begin{cases} 0 & (0\leqslant\lambda_i\leqslant a_i) \\ 1-\left[1-\left(\dfrac{\lambda_i-a_i}{b_i-a_i}\right)^{\alpha_i}\right]^{\beta_i} & (a_i<\lambda_i\leqslant b_i),(\alpha_i>1,\beta_i<1) \\ 1 & (b_i<\lambda_i) \end{cases} \tag{4.2}$$

对于减小型λ_i，采用修正的降半凹型隶属函数（见图3）：

$$\mu_i(\lambda_i)=\begin{cases}0 & (0\leqslant\lambda_i\leqslant a_i)\\ 1-\left[1-\left(\dfrac{\lambda_i-b_i}{a_i-b_i}\right)^{\alpha_i}\right]^{\beta_i} & (a_i<\lambda_i\leqslant b_i),\ (\alpha_i>1,\ \beta_i<1)\\ 0 & (b_i<\lambda_i)\end{cases} \tag{4.3}$$

对于增大型λ_i，b_i对应于终极失效的λ_i值，而a_i则对应某一初始损伤状态（如分层起始点或第一层失效点的）λ_i值．对于减小型λ_i，a_i对应于终极失效的λ_i值，b_i对应于某一初始损伤状态的λ_i值．因此a_i，$b_i(i=1, 2, \cdots, m)$由初始损伤状态和终极失效状态完全确定．α_i，β_i控制着隶属函数的形状，它给设计者提供了主观选择的余地．设计者可以赋予层压板某些中介失效状态特定的失效度(μ_i)从而确定α_i与β_i的取值．

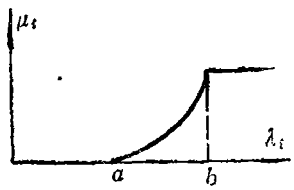

图2 升半凹型隶属函数

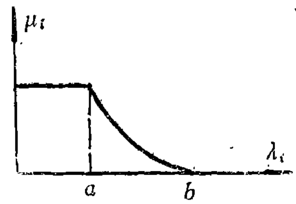

图3 降半凹型隶属函数

采用(4.2)式及(4.3)式的隶属函数除了因为它们满足上节中关于失效度的诸公设条件外，还主要基于设计者或使用者的下述心理事实：

失效度性质 3 对于结构性能参数λ_i的某一等量的变化$\Delta\lambda_i$，人们的心理反应$\Delta\mu_i$在不同的结构损伤阶段是不同的，结构损伤的越严重亦即λ_i越接近终极失效，$\Delta\mu_i$越大$(\partial^2\mu_i/\partial^2\lambda_i\geqslant0)$．

层压板的失效**F**是论域$U=(\mu_1\times\mu_2\cdots\times\mu_m)$的一个模糊子集．不同的实际问题会对层压板的诸性能参数提出不同的要求，我们讨论下面几种情况：

（1） 层压板的任何单项性能的过分变化即意味着层压板的失效．此时有

$$\mathbf{F}=\boldsymbol{\mu}_1\cap\boldsymbol{\mu}_2\cap\cdots\cap\boldsymbol{\mu}_m \tag{4.4}$$

于是有

$$F(X)=\mu_1(X)\wedge\mu_2(X)\cdots\wedge\mu_m(X) \tag{4.5}$$

（2） 层压板的所有单项性能都有显著的变化时层压板失效．此时有

$$\mathbf{F}=\boldsymbol{\mu}_1\cup\boldsymbol{\mu}_2\cup\cdots\cup\boldsymbol{\mu}_m \tag{4.6}$$

于是有

$$F(X)=\mu_1(X)\vee\mu_2(X)\cdots\vee\mu_m(X) \tag{4.7}$$

(4.4)与(4.6)是两个极端情况，当然也可以对层压板提出介于这两者之间的要求而得出相应的失效度函数．

（3） 在有些情况下，我们对层压板的各单项性能有所偏重，则可以根据对各项性能参数关心程度的不同建立一个权向量**W**：

$$\mathbf{W}=\{W_1,W_2,\cdots,W_m\}^T \tag{4.8}$$

它满足条件：

$$\sum_{i=1}^{m}W_i=1 \tag{4.9}$$

这样F2将为U的一个综合评判：

$$F(X)=\bigvee_{k=1}^{m}(W_k\wedge\mu_k) \tag{4.10}$$

特例情况是我们只关心层压板的某一单项参数，例如$\mu_k(X)$，此时则有：

$$F(X)=\mu_k[\lambda_k(X)] \tag{4.11}$$

失效函数的确定随着结构所处的实际情况的不同而不同，其中还包含着设计者（或检验者）的经验和心理因素．但是对于同类条件下的结构，一旦失效度函数由有经验的专家确定，则可将其列入规范供他人使用．能用数值化和公式化方法处理和贮存人类的经验，正是模糊数学的巨大优点之一．文[6]对在结构设计中应用模糊数学方法给出了客观的分析．

五、许用失效度的选择对结构可靠性的影响

结构的可靠度描述了结构在指定载荷作用下不失效的概率，它是以确定性的失效定义为前提的，而结构的失效度描述了结构在指定载荷作用下失效的程度，失效度本身又具有随机性．因此结构的失效是一个随机模糊事件．在确定了结构的失效函数之后，就要根据结构的重要程度选取F的适当的λ水平截集从而确定结构的失效载荷和失效寿命．下面我们讨论截集水平的选择对结构的可靠性的影响．

考虑这样一块层压板，对选定的失效度F_λ，它的失效强度R是一个正态的随机变量$N(\mu_R,\ \sigma_R)$，所受的载荷也是一个正态的随机变量$N(\mu_Q,\ \sigma_Q)$，则该层压板的可靠度为[7]：

$$P_s=\Phi(\mu_m/\sigma_m) \tag{5.1}$$

式中

$$\mu_m=\mu_R-\mu_Q,\quad \sigma_m^2=\sigma_R^2+\sigma_Q^2 \tag{5.2}$$

若该结构的失效函数为

$$F=F(X) \tag{5.3}$$

则可以认为失效强度R的均值μ_R为：

$$\mu_R=\delta\cdot X(F_\lambda) \tag{5.4}$$

式中δ为一常数．假定失效强度的方差σ_R与失效度F_λ无关，于是有：

$$P_s=\Phi[(\delta\cdot X(F_\lambda)-\mu_Q)/\sigma_m] \qquad 5.5)$$

上式确定了结构的可靠度P_s与失效度F_λ的关系，式中Φ为正态概率函数．

考查P_s对F_λ的变化率，

$$\frac{dP_s}{dF}=\frac{\partial\Phi}{\partial\mu_m}\cdot\frac{\delta}{dF/dX} \tag{5.6}$$

由(4.2)式与(4.3)式我们知道，当截集水平选得比较低(F_λ小)时，dF/dX将很小（对应于失效度性质3)，因而dP_s/dF会很大，亦即对结构失效度很小的一点放宽，就会导致结构可靠性大幅度的提高．结构可靠度对失效截集水平的敏感性说明盲目地定义结构的失效状态对复合材料结构会造成很大的浪费，因为对于实际结构，一般总是要求它在失效度较小的情况下工作的．

由(4.2)，(4.3)和(5.6)式可知，当截集水平比较高(F_λ大)时，dP_s/dF很小，因此P_s～F曲线上将出现一个平稳阶段．为使得结构有比较合理的可靠度，可以规定

$$dP_s/dF \leqslant e \tag{5.7}$$

e 为选定的常数，在上式中取等号时可以计算出相应的失效度F。

本节的讨论也可以方便地推广到强度与载荷服从其它概率分布的情况。

六、结　　语

我们指出了结构失效概念的模糊性、层次性和载荷相关性，指出了失效度对损伤参量的非线性关系，阐述了失效度与可靠度的关系。这些为进一步研究结构的失效现象，为正确评定结构的损伤状态以及为正确选择结构的设计强度提供了一个理论基础。

参 考 文 献

[1] 汪培庄，《模糊集合论及其应用》，上海科技出版社 (1983).

[2] Daniel, I. M., J. W. Lee and G. Yaniv, Damage mechanisms and stiffness degradation in graphite/epoxy composites, *The Proceedings of the Sixth International Conference on Composite Materials*, Elsevier Applied Science Publishers Ltd., U. K., July (1987), 4.129—138.

[3] Reifsnider, K. L. and W. W. Stinchcomb, Characterization and analysis of damage mechanisms in tension-tension fatigue of graphite/epoxy laminates, *Effects of Defects in Composite Materials*, ASTM, STP 836 (1984), 21—55.

[4] DiBenedetto, A. T., et al., Nondestructive determination of fatigue crack damage in composites using vibration tests, *Journal of Materials*, JMLSA, 7, 2, June (1972), 211—215.

[5] Reifsnider, K. L., The critical element model: a modeling philosophy, *Engineering Fracture Mechanics*, 25, 516 (1986), 739—750.

[6] 程耿东、刘扬，关于结构模糊优化若干问题的讨论，计算结构力学及其应用，6, 3 (1989).

[7] Ang, Alfredo H-S. and Wilson H. Tang, *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, Vol.2 (1984).

A Fuzzy Model for the Failure of Composite Structures

Pan Jing-zhe

(*Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian*)

Luo Zu-dao

(*Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai*)

Abstract

In this paper, the fuzzy theory is used to describe the uncertainty in failure definition of composite structures. The concept of structural failure level (SFL) is suggested and a method of evaluation is presented.