

颗粒的有限尺寸对颗粒在均匀各向同性湍流中扩散的影响*

谢 定 国

(浙江大学力学系, 1989年5月12日收到)

摘 要

本文指出固体颗粒对流体湍流运动的响应有不同的机理, 颗粒受大涡的粘性拖动, 但受小涡的随机碰撞. 基于这种原理, 本文计算了有限尺寸的固体颗粒在均匀各向同性湍流中的扩散. 结果显示存在着二种相互抵消的效应: 颗粒的惯性使颗粒长期扩散系数上升, 而颗粒尺寸使颗粒的长期扩散系数下降.

一、引 论

固体颗粒在湍流中的扩散是多相流研究中的一个重要问题. 1947年 Tchen^[1] 首先研究了单个球形的颗粒在湍流中的扩散. 鉴于问题的复杂性, 他不得不假定:

- (1) 湍流是定常, 均匀和各向同性的.
- (2) 颗粒直径远小于 Kolmogorov 尺度.
- (3) 颗粒的相对流动雷诺数远小于 1.
- (4) 颗粒分布很稀疏, 其相互作用可以忽略.
- (5) 颗粒始终被相同的流体团所包围.

后来的研究者, 包括 Csanady^[2], Reeks^[3], Pismen 和 Nir^[4] 等人, 主要在二个方面改进和发展了 Tchen 的研究. 首先, 他们取消了假设 (5), 详细地研究了颗粒穿越不同流体团的穿越轨迹效应, 证实这种效应使颗粒长期扩散系数减小. 另一方面许多研究者不是从湍流场的拉格朗日描述而是从湍流场的欧拉描述出发, 来求解单个颗粒的扩散问题. 但是, 他们仍然假定颗粒是很小的质点, 颗粒所响应的运动就是这个质点相应流场点的湍流运动. 于是这样就必须保留 Tchen 的假设 (2), 而在假设 (2) 成立并没有外力的情况下, 我们完全可以认为颗粒在流体团中的相对位置变化不大, 即可以象 Tchen 和 Hinze^[5] 一样把问题归结为一个简单的线性问题求解. 本文的目的是完全取消假设 (2) 的限制, 对大颗粒的有限尺寸对颗粒扩散的效应作进一步研究. 为了集中注意力, 本文不考虑颗粒的穿越轨迹效应, 即假定颗粒

* 蔡树棠推荐.

的平均漂移速度为零。

二、分 析

固体颗粒在湍流场中对流体脉动的响应可由下式描述

$$dw_i/dt = F_i(\bar{w}(t), \bar{u}(\bar{\rho}(t), t)) \quad (2.1)$$

这里 \bar{w} 是颗粒速度, \bar{u} 是湍流的欧拉脉动速度, $\bar{\rho}(t)$ 是球形粒子中心的轨迹, F_i 是 \bar{w} 和 \bar{u} 的泛函。在局部线性阻力律成立和 Basset 力及附加质量可以忽略的情况下, 方程(2.1)退化成下列形式

$$dw_i/dt = \gamma(u_i(\bar{\rho}(t), t) - w_i(t)) \quad (2.2)$$

式中 γ 是一常数, 流体速度 u_i 则随粒子位置的变化而变化, 而粒子的轨迹 $\rho(t)$ 则依据下式决定于粒子的速度

$$\bar{\rho}(t) = \int_0^t \bar{w}(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

这里取 $t=0$ 时颗粒的空间位置为空间坐标原点, 不难看出, 方程(2.2)和(2.3)依然构成一个十分复杂的非线性问题。而在本文的研究中, 颗粒的尺度是有限的, 可以大于 Kolmogorov 尺度, 因此方程(2.1)即使在线性阻力律成立和 Basset 力及附加质量可以忽略的情况下也不能简化为方程(2.2), 因此问题就更加复杂了。

为了解决这一困难, 我们发展了一种新的方法, 其基本思想是认为颗粒对湍流涡旋的响应有不同的机理。设颗粒的直径为 d , 如文献[9]引进一个特殊波数 $k_c \equiv 1/d$ 。对 $k \ll k_c$ 的大尺度涡旋, $k \gg k_c$ 的小尺度涡旋及与颗粒尺寸相仿的中尺度涡旋, 颗粒对流体脉动的响应遵循不同的规律, 下面我们分别予以讨论。

如图 1 所示, 对于尺度远大于 d , 波数 $k \ll k_c$ 的大涡旋, 我们认为颗粒受流体涡旋的粘性拖动, 从而对流体的湍流脉动作出响应, 这种响应可由下列方程描述

$$dw_{1i}(t)/dt = \gamma[\bar{u}_i(\bar{\rho}(t), t) - w_{1i}(t)] \quad k \ll k_c \quad (2.4)$$

式中 \bar{u}_i 是低波数涡旋迭加成的流场, 即是滤掉了高频分量的脉动速度场。

对于尺度远小于颗粒直径 d , 波数远大于 k_c 的小涡, 颗粒是受小涡旋的随机碰撞而对湍流脉动作出的响应的, 这种响应由下列 Langevin 方程描述

$$dw_{2i}(t)/dt + \gamma w_{2i}(t) = f(t, k_c) \quad k \gg k_c \quad (2.5)$$

式中 $f(t, k_c)$ 是小涡对颗粒的随机碰撞产生的驱动力, 左边第二项则是颗粒作随机扩散时受到的流体粘滞力。

对于涡旋尺度与 d 相差不大, 波数与 k_c 为一个量级的涡旋, 颗粒与涡旋的相互作用十分复杂, 为了得到一个比较实用的结果, 我们必须作出较大的简化, 即假设对波数域 $(0, k_c)$ 方程(2.4)成立, 而对波数域 (k_c, ∞) 方程(2.5)成立。

即有

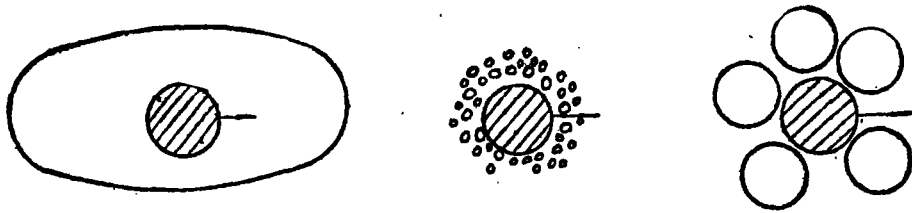
$$dw_{1i}/dt + \gamma w_{1i} = \gamma \bar{u}_i(\bar{\rho}(t), t) \quad k \leq k_c \quad (2.6)$$

$$dw_{2i}/dt + \gamma w_{2i} = f(t, k_c) \quad k \geq k_c \quad (2.7)$$

式(2.6)中的 $\bar{u}_i(\bar{\rho}(t), t)$ 不是完全的湍流场而是在波数 k_c 处被截断了的湍流场, 即

$$\bar{u}_i(\bar{r}, t) = \iiint_{\Omega_{k_c}} \bar{u}_i(\bar{k}, t) \exp[-i\bar{k} \cdot \bar{r}] d^3 \bar{k} \quad (2.8)$$

Ω_{k_0} 是在波矢空间中以 k_0 为半径, 原点为球心的积分球域, $\bar{u}_i(\vec{k}, t)$ 是未被截断的湍流场在波矢空间中的付里叶分量. 而 $f(t, k_0)$ 则是一个随机驱动力, 其平均值为零, 即 $\langle f(t, k_0) \rangle = 0$, $f(t, k_0)$ 的其它统计平均量则取决于 k_0 和湍流场的高波数能谱等因素, 我们将在后面作进一步的讨论.



(a) 颗粒对大涡的响应 (b) 颗粒对小涡的响应 (c) 颗粒对中间尺度涡旋的响应

图 1 颗粒对不同尺度涡旋的响应示意图

设在 $t=0$ 时, w_{1i} , w_{2i} 的初始值分别为二个随机量 w_{10i} , w_{20i} , 则方程(2.6), (2.7) 的解分别为

$$w_{1i}(t) = w_{10i} + \int_0^t \gamma \exp[-\gamma(t-t')] \delta_{ij} \bar{u}_j(\vec{\rho}(t'), t') dt' \quad (2.9)$$

$$w_{2i}(t) = w_{20i} + \int_0^t \exp[-\gamma(t-t')] f(t', k_0) dt' \quad (2.10)$$

于是单个有限尺度的颗粒在湍流中的速度响应可写成 w_{1i} , w_{2i} 的和, 即

$$w_i = w_{1i} + w_{2i} \quad (2.11)$$

由于 w_{10i} , w_{20i} 是独立的随机变量, 而 $w_{1i}(t)$, $w_{2i}(t)$, 又可以认为是独立的平稳随机过程, 则颗粒速度的自相关张量可写成下列形式

$$\begin{aligned} H_{ij}(s) &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle w_i(t) w_j(t+s) \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle w_{1i}(t) w_{1j}(t+s) \rangle + \lim_{t \rightarrow \infty} \langle w_{2i}(t) w_{2j}(t+s) \rangle \\ &\equiv H_{1ij}(s) + H_{2ij}(s) \end{aligned} \quad (2.12)$$

我们先来求解 H_{1ij} , 由方程(2.9) 可得

$$\begin{aligned} H_{1ij}(s) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \int_0^t \gamma \exp[-\gamma(t-t')] \delta_{ik} \bar{u}_k(\vec{\rho}(t'), t') dt' \right. \\ &\quad \left. \cdot \int_0^{t+s} \gamma \exp[-\gamma(t+s-t'')] \delta_{jl} \bar{u}_l(\vec{\rho}(t''), t'') dt'' \right\rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

令 $s' = t'' - t'$, $\tau = t - t'$

并变化式(2.13)中的积分次序得

$$\begin{aligned} H_{1ij}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{s(s-s')}^{\infty} \delta_{ik} \delta_{jl} \gamma^2 \exp[-\gamma(2\tau - s + s')] d\tau \right) G_{ki}(s') ds' \\ &= \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma|s-s'|] G_{ij}(s') ds' \end{aligned} \quad (2.14)$$

其中

$$G_{ij}(t) = \langle \bar{u}_i(0, 0) \bar{u}_j(\bar{\rho}(t), t) \rangle \\ = \int_{\Omega_{k_c}} \int_{\Omega_{k_c}} \langle \bar{u}_i(\bar{k}, 0) \bar{u}_j(\bar{k}', t) \exp[-i\bar{k}' \cdot \bar{\rho}(t)] \rangle d\bar{k}' d\bar{k} \quad (2.15)$$

是流体过滤速度场的互相关张量, 式(2.14)中的积分下限 $g(x)$ 是 x 的一个函数, 当 $x < 0$ 时 $g(x) = 0$, 当 $x \geq 0$ 时 $g(x) = x$.

由式(2.3)可以看出 $\bar{\rho}(t)$ 受时间 0 到 t 内所有流速波谱的影响, 但如果认为速度场的谱分布很广, 时间相关系数又很小, 则可以假定 $\exp[-i\bar{k} \cdot \bar{\rho}(t)]$ 与单个特定波数的流速付里叶分量的相关性可以忽略. 于是式(2.15)的积分核可以写成

$$\langle \bar{u}_i(\bar{k}, 0) \bar{u}_j(\bar{k}', t) \exp[-i\bar{k}' \cdot \bar{\rho}(t)] \rangle \\ \cong \langle \bar{u}_i(\bar{k}, 0) \bar{u}_j(\bar{k}', t) \rangle \langle \exp[-i\bar{k}' \cdot \bar{\rho}(t)] \rangle \quad (2.16)$$

这个假设首先由 Taylor 和 McNamara^[6] 引进, Lundgren 和 Pointin^[7] 后来证明了这个假设与 Corrsin^[8] 的下列猜想等价. 即拉格朗日速度相关张量等于欧拉速度相关张量的概率平均

$$\langle v_i(0) v_j(t) \rangle = \int \langle u_i(0, 0) u_j(\bar{x}, t) \rangle P(\bar{x}, t) d\bar{x} \quad (2.17)$$

$P(\bar{x}, t)$ 是流体团在 t 时刻位于 \bar{x} 的概率密度. 利用等式

$$\langle \bar{u}_i(\bar{k}, 0) \bar{u}_j(\bar{k}', t) \rangle = \phi_{ij}(\bar{k}, t) \delta(\bar{k}' - \bar{k}) \quad (2.18)$$

式中的 δ 是狄拉克函数, $\phi_{ij}(\bar{k}, t)$ 是能谱密度张量, 即欧拉速度场互相关张量的付里叶变换, 方程(2.15)可以简化成下列形式, 即

$$G_{ij}(t) = \int_{\Omega_{k_c}} \phi_{ij}(\bar{k}, t) \langle \exp[-i\bar{k} \cdot \bar{\rho}(t)] \rangle d\bar{k} \quad (2.19)$$

参照文献[4]、[7], 如假定 $w_i(t)$ 是一个正态平稳随机过程, 则不难得到

$$\langle \exp[-i\bar{k} \cdot \bar{\rho}(t)] \rangle = \exp\left[-\int_0^t (t-s) k_i k_j H_{ij}(s) ds\right] \quad (2.20)$$

所以

$$H_{ij}(t) = \frac{\gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma|t-t'|] dt' \int_{\Omega_{k_c}} \phi_{ij}(\bar{k}, t') \varepsilon(\bar{k}, t') d\bar{k} \quad (2.21)$$

式中

$$\varepsilon(\bar{k}, t') = \exp\left[-\int_0^{t'} (t'-s) k_i k_j H_{ij}(s) ds\right]$$

$H_{2ij}(s)$ 的计算相比之下比较简单, 由式(2.10)可以得到

$$H_{2ij}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle w_{2i}(t) w_{2j}(t+s) \rangle \\ = (\delta_{ij}/2\gamma) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma|s-s'|] \langle f(0, k_0) f(s', k_0) \rangle ds' \quad (2.22)$$

如前所述, 随机驱动力 $f(t, k_0)$ 产生于小涡对颗粒的随机碰撞, 而小涡的时间尺度是很小的, 故在颗粒运动的时间尺度内, 可以认为 $f(t, k_0)$ 的自相关系数为零, 即可以假定

$$\langle f(t, k_0) f(t+\tau, k_0) \rangle = H \delta(\tau) \quad (2.23)$$

其中 H 是个常数, 依赖于 k_0 和湍流的高波数段能谱, 它的值的决定要依赖于对小涡和颗粒之间的相互作用的物理认识. 由于小涡的时间尺度很小, 我们不妨用碰撞这个词来形象地描绘这种相互作用, 以区别大涡对颗粒的粘性拖动. 文献[9]讨论了如下两个可能的物理假设: (1) 模拟颗粒的布朗运动, 假定小涡运动和颗粒对小涡的响应运动通过不断地“碰撞”保持动能相等. (2) 假定小涡运动和颗粒对小涡的响应运动通过不断的“碰撞”保持动量相等. 由于假设(2)比假设(1)来得弱, 而且正如文献[9]指出的, 在数学上假设(2)代表一种简单的插值规律, 我们在这里采用后者. 由方程(2.22), (2.23)

$$H_{2ii}(\tau) = (3H/2\gamma) \exp[-\gamma\tau] \quad (2.24)$$

再由动量的均分假设可得

$$\rho_p \left(\frac{\langle w_{2i} w_{2i} \rangle}{2} \right)^{1/2} = \rho_f \left(\int_{k_c}^{\infty} E(k) dk \right)^{1/2} \quad (2.25)$$

而 $\langle w_{2i} w_{2i} \rangle = H_{2ii}(0)$, 所以不难得到

$$H = \frac{4\gamma}{3\alpha^2} \int_{k_c}^{\infty} E(k) dk \quad (2.26)$$

式中 $\alpha = \rho_p/\rho_f$ 是颗粒对流体的密度比, $E(k)$ 是湍流的三维能谱, 于是

$$H_{2ij}(s) = \frac{2}{3\alpha^2} \int_{k_c}^{\infty} E(k) dk \exp[-\gamma s] \quad (2.27)$$

由方程(2.12), (2.21), (2.27) 不难得到

$$\begin{aligned} H_{ij}(t) &= \frac{1}{2} \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma(t-t')] dt' \int_{\Omega_k} \phi_{ij}(\bar{k}, t') \varepsilon(\bar{k}, t') d\bar{k} \\ &\quad + \frac{2\delta_{ij}}{3\alpha^2} \int_{k_c}^{\infty} E(k) dk \end{aligned} \quad (2.28)$$

我们把颗粒随机位移张量写成下列形式

$$\begin{aligned} R_{ij}(t) &\equiv \langle \rho_i(t) \rho_j(t) \rangle = \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \langle w_i(t') w_j(t'') \rangle \\ &= \int_0^t dt' \int_{-t'}^{t-t'} H_{ij}(s) ds = 2 \int_0^t (t-s) H_{ij}(s) ds \end{aligned} \quad (2.29)$$

由此即有

$$d^2 R_{ij}(t)/dt^2 = 2H_{ij}(t) \quad (2.30)$$

由于湍流场的各向同性性质, 可将 R_{ij} 重写成如下形式

$$R_{ij}(t) = Y(t) \delta_{ij}$$

由方程(2.27)~(2.30) 可得如下方程

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dt^2} &= \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\gamma|t-t'|] dt' \int_0^{k_c} \frac{4\pi k^2}{3} \phi_{ii}(k, t') \\ &\quad \cdot \exp\left[-\frac{k^2}{2} Y\right] dk + \frac{4}{3\alpha^2} \int_{k_c}^{\infty} E(k) dk \exp[-\gamma t] \end{aligned} \quad (2.31)$$

为了作进一步的计算我们假定湍流具有 Kraichnan^[10] 能谱, 即

$$\phi_{ii}(k, t) = \frac{E(k)}{2\pi k^2} \exp\left[-\frac{1}{2}(u_0 k_0 t)^2\right] \quad (2.32)$$

式中,

$$E(k) = 16\sqrt{2/\pi} u_0^2 k^4 k_0^{-5} \exp[-2k^2/k_0^2] \quad (2.33)$$

特征速度 u_0 , 由下列方程确定

$$\int_0^\infty E(k) dk = \frac{3}{2} u_0^2 \quad (2.34)$$

同时引入下列无量纲变量

$$y = k_0^2 Y, \quad \tau = u_0 k_0 t, \quad \lambda = \nu/u_0 k_0, \quad \tilde{k} = k/k_0 \quad (2.35)$$

则方程式(2.31)可以写成如下形式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{d\tau^2} = & \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\lambda|\tau-\tau'|] d\tau' \int_0^{\tilde{k}_c} \frac{32}{3} \tilde{k}^4 \exp\left[-2\left(1\right.\right. \\ & \left.\left.+ \frac{y}{4}\right) \tilde{k}^2 - \frac{\tau^2}{2}\right] d\tilde{k} + \frac{2}{\alpha^2} \beta \exp[-\lambda\tau] \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\text{式中} \quad \beta \equiv \int_{\tilde{k}_c}^{\infty} E(k) dk / \int_0^{\infty} E(k) dk$$

颗粒的长期扩散张量为

$$D_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{dR_{ij}}{dt} \quad (2.37)$$

由各项同性性质

$$D_{ij} = (u_0/k_0) \bar{D} \delta_{ij} \quad (2.38)$$

式中 \bar{D} 是无量纲扩散系数, 可由方程(3.35)和(3.37)求得

$$\bar{D} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{dy}{d\tau} \quad (2.39)$$

相应于方程(2.36)的初始条件是

$$\tau=0, \quad y=0, \quad dy/d\tau=0 \quad (2.40)$$

三、计算结果与讨论

由方程(2.36), (2.39)可以看出, 颗粒的长期扩散系数由代表颗粒惯性, 颗粒尺寸和颗粒密度的三个无量纲参数决定。 α 通常较大, 对液气、固气的 α 远大于 1; 对水和沙粒的情况 $\alpha \cong 2.6$ 。 β 通常也是个小数, 故方程(2.36)右边第二项通常可以略掉, 这样我们就可以集中注意力考虑 λ 和 \tilde{k}_c 对颗粒长期扩散系数的效应。

方程(2.36)是个积分微分方程, 具体计算时采用迭代法。先在时间 τ 的足够多个离散点上假定一个初始值, 则不难计算方程(2.36)右边的积分, 然后依次推进求得 y 在各离散点上的新值, 并马上用新值代替原值计算右边的积分, 直至各离散点上 y 的新旧值之差的总和小于一个小数 10^{-4} 。

图2显示了 \tilde{k}_0 和 λ 这两个参数对颗粒长期扩散系数的影响。当 $\tilde{k}_0=2$ 时,曲线与 $\tilde{k}_0=\infty$ 的曲线相差很小,图中没有画出。当 $\tilde{k}_0=1.5$ 时长期扩散系数明显减小,当 $\tilde{k}_0=1$ 时,颗粒扩散系数大大减小。图3则展示了当 λ 值等于4时,颗粒扩散系数随颗粒体积的变化。从图2可以看出当 λ 减小时,颗粒扩散系数增大,在 $\lambda=2$ 时这种增长变得显著。即颗粒的惯性使颗粒扩散系数增大,当颗粒的响应时间达到湍流的特征时间的一半时,这种效应变得显

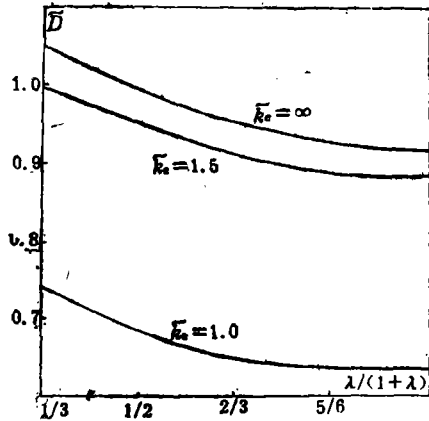


图2 颗粒扩散系数 \bar{D} 随颗粒惯性的变化

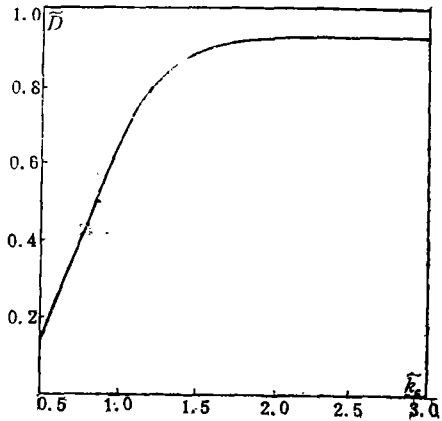


图3 颗粒扩散系数 \bar{D} 随颗粒尺寸的变化

著。但颗粒的有限体积却促使扩散系数减小,当颗粒直径达到颗粒含能涡旋的一半时,这种效应也变得显著。尽管Reeks, Pismen和Nir的研究都证实颗粒惯性增大扩散系数这个事实,但本文的研究则显示颗粒的有限体积有相反的效应,这两种效应相互抵消,在通常的情况下它们都不显著,难怪Wells和Stock^[11]没能在他们精心设计的实验中发现颗粒惯性增大扩散系数的这种现象。但在一些特殊情况下,例如壁面附近,颗粒的尺度与含能涡旋相比不是很小,此时有限体积对扩散系数的效应会变得显著。这时,本文的结果可以用于解释颗粒从管道湍流中向壁面的沉积,这方面的研究作者将以后另文报道。

参 考 文 献

- [1] Tchen, C. M., Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid, Ph. D. Dissertation, University of Delf (1947).
- [2] Csanady, G. T., Turbulent diffusion of heavy particles in atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 20 (1963), 201—208.
- [3] Reeks, M. W., On the dispersion of small particles suspended in an isotropic turbulent fluid, *J. Fluid Mech.*, 83, 3 (1977), 529—546.
- [4] Pismen, L. M. and A. Nir, On the motion of suspended particles in stationary homogeneous turbulence, *J. Fluid Mech.*, 84, 1 (1978), 193—206.
- [5] Hinze, J. O., *Turbulence*, Second Edition, McGrall-Hill Book Company (1975), 460—471.
- [6] Taylor, J. B. and B. McNamara, Plasma diffusion in two dimensions, *Physics of Fluids*, 14 (1971), 1492.
- [7] Lundgren, T. S. and Y. B. Pointin, Turbulent self-diffusion, *Physics of Fluids*, 19 (1976), 355—358.

- [8] Corrsin, S., *Atmospheric Diffusion and Air Pollution*, edited by F. N. Frenkiel and P. A. Snepard, Academic, New York (1959), 161—184.
- [9] Xie Ding-guo, Turbulent kinetic energy of particle phase in solid-fluid suspension turbulence, *Proceedings of the International Symposium on Multiphase Flows*, Hangzhou, China (1987), 396—401.
- [10] Kraichnan, R. H., Diffusion by a random velocity field, *Physics of Fluids*, 13 (1970), 22—31.
- [11] Wells, M. R. and D. E. Stock, The effects of crossing trajectories on the dispersion of particles in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, 136 (1983), 31—61.

The Size Effect on the Dispersion of a Particle in a Homogeneous Isotropic Turbulence

Xie Ding-guo

(Department of Mechanics, Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

The mechanism of the response motion of a suspended particle to turbulent motion of its surrounding fluid is different according to size of turbulent eddies. The particle is dragged by the viscous force of large eddies, and meanwhile driven randomly by small eddies. Based on this understanding, the dispersion of a particle with finite size in a homogeneous isotropic turbulence is calculated in this study. Results show that there are two competing effects: when enhanced by the inertia of a particle, the long-term particle diffusivity is reduced by the finite size of the particle.